Eletromagnetismo — 7600021

Primeira lista suplementar.

30/03/2022

Os exercícios que vêm do livro texto (Griffiths - Introdução à Eletrodinâmica - 3a. edição) estão indicados com o número em negrito.

1. **1.53** Verifique o teorema fundamental da divergência para o campo

$$\vec{v} = r^2 \cos\theta \hat{r} + r^2 \cos\phi \hat{\theta} - r^2 \cos\theta \sin\phi \hat{\phi},$$

   usando com volume um octante da esfera de raio R (Fig. 1.48). Inclua toda a superfície do octante.

2. **1.55** Calcule a integral de linha de

$$\vec{v} = 6\hat{x} + yz^2\hat{y} + (3y + z)\hat{z}$$

   ao longo do caminho triangular na Fig. 1.49. Verifique o resultado por meio do teorema de Stokes.

3. **1.58** Verifique o teorema fundamental da divergência para o campo

$$\vec{v} = r^2 \sin\theta \hat{r} + 4r^2 \cos\theta \hat{\theta} + r^2 \tan\theta \hat{\phi},$$

   usando o volume do sorvete na Fig. 1.52, onde a superfície superior é uma calota esférica de raio R, centrada na origem.

4. **1.59** Duas elegantes verificações dos teoremas fundamentais:

   (a) Combine o corolário 2 do teorema do gradiente com o teorema de Stokes (com $\vec{v} = \vec{\nabla} T$). Mostre que o resultado concorda com o que você já sabe sobre derivadas segundos.

   (b) Combine o corolário 2 do teorema do rotacional com o teorema da divergência. Mostre que o resultado concorda com o que você já sabe.

5. **1.61** A integral

$$\vec{a} \equiv \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\vec{a}$$

   é conhecida como a *área vetorial* da superfície $\mathcal{S}$. Se $\mathcal{S}$ for plana, então $|\vec{a}|$ é a área ordinária.

   (a) Encontre a área vetorial de uma calota hemisférica de raio R.

   (b) Mostre que $\vec{a} = 0$ para qualquer superfície fechada.

(c) Mostre que $\vec{a}$ é o mesmo vetor para todas as superfícies com uma mesma borda.

(d) Mostre que

$$\vec{a} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{\ell},$$

onde a integral corre ao longo da borda. *Sugestão:* Desenhe o cone que vai da origem até a borda. Divida a superfície do cone em triângulos infinitesimais, cada um vértice na origem e lado oposto $d\vec{\ell}$ e explore a interpretação geométrica do produto vetorial.

(e) Mostre que

$$\oint (\vec{c} \cdot \vec{r})\, d\vec{\ell} = \vec{a} \times \vec{c},$$

para quqlauer vetor $\vec{c}$.

6. **1.62(a)** Encontre a divergência do campo

$$\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r}.$$

Para isso,

(a) Calcule diretamente o divergente;

(b) Teste seu resultado por meio do teorema da divergência;

7. Admita que a Terra é uma esfera com raio $R = 6371\,\text{km}$. A partir dessa suposição, encontre a distância entre o IFSC (latitude 22.009 S e longitude 47.897 W) e o Elevador Lacerda em Salvador (latitude 12.947 S e longitude 38.513480 W) de duas maneiras:

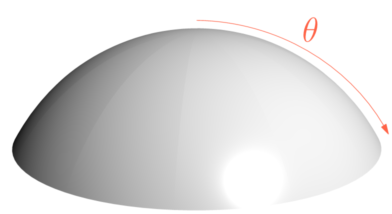
(a) Como se fosse o deslocamento diferencial em coordenadas esféricas;

(b) Sem nenhuma aproximação *Sugestão: encontre o ângulo entre os vetores posição dos dois locais.*

8. Encontre a expressão para o divergente em coordenadas esféricas.

9. Encontre a expressão para a componente radial $(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\mathbf{v}})_s$ do rotacional em coordenadas cilíndricas.

10. Calcule o volume da calota esférica na figura, com raio R e ângulo polar θ.



;