Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #03

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

29/03/2022

Agenda:

1. Elasticidade Linear, Lei de Hooke e Coeficiente de Poisson (item 1.5)
2. Tensão e Deformação de Cisalhamento (item 1.6)
3. Tensões e Cargas Admissíveis (item 1.7)
4. Dimensionamento para Cargas Axiais e Cisalhamento Puro (item 1.8)

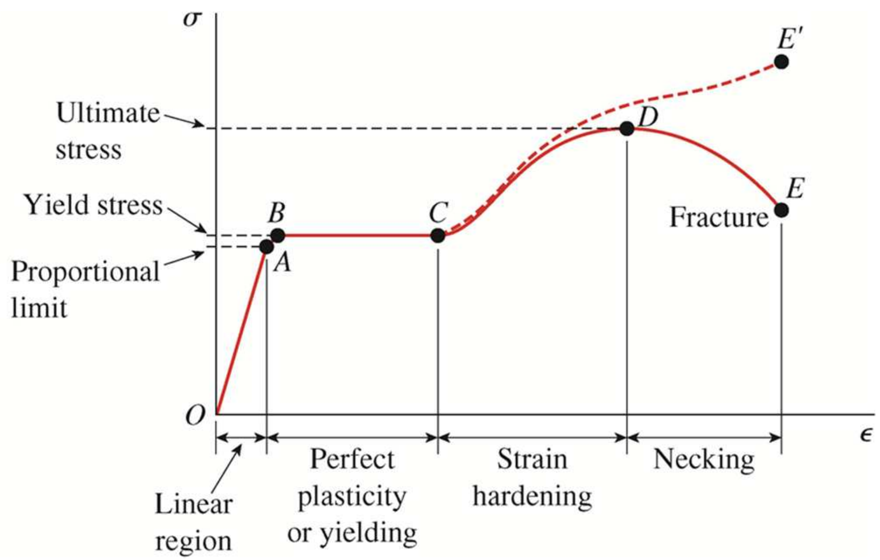
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Elasticidade Linear, Lei de Hooke e Coeficiente de Poisson

Grande parte das estruturas são projetadas para que trabalhem na região de elasticidade linear, onde vale a Lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

onde *E* é o módulo de elasticidade (ou módulo de Young) do material.



O módulo de elasticidade (ou módulo de Young) é dado pela declividade da curva Tensão × Deformação na região de elasticidade linear do material.

Valores de referência do módulo de elasticidade de materiais comumente empregados na construção mecânica são [1]:

Aço: E = 190 – 210 GPa;

Ligas de alumínio: E = 70 – 79 GPa;

Ferro fundido: E = 83 – 170 GPa;

Cobre e ligas de cobre: E = 110 – 120 GPa;

Nylon: E = 2,1 – 3,4 GPa;

Polietileno: E = 0,7 – 1,4 GPa;

...

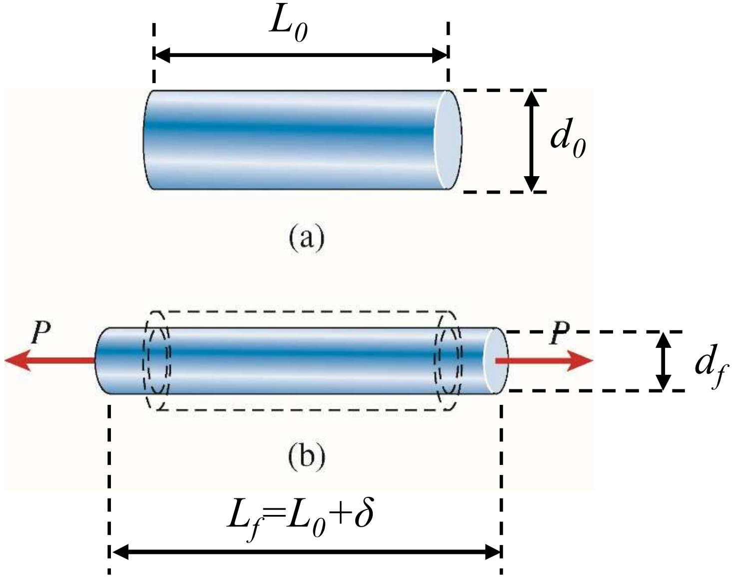
Obs: Uma fonte interessante para a obtenção de várias propriedades mecânicas de materiais é a MatWeb [2].

Coeficiente de Poisson (e efeito de Poisson) [1, 3]:

Quando uma barra prismática (feita de um material *homogêneo e isótropo*) é carregada em tração, o alongamento axial é acompanhado por uma contração lateral (ou transversal):

(a) Barra na Configuração de Referência (ou inicial):

(b) Barra na Configuração Deformada (ou final):



Definimos:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_f - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$ (alongamento unitário longitudinal)

E: $\varepsilon' = \dfrac{\Delta d}{d_0} = \dfrac{d_f - d_0}{d_0}$ (alongamento unitário transversal)

Vemos que, como no caso do alongamento unitário longitudinal, o alongamento unitário transversal também é um ___adimensional___ e é definido exatamente da mesma maneira que o alongamento unitário longitudinal (ou seja, pela razão entre a variação de uma dimensão e a mesma dimensão tomada na configuração de referência).

É possível verificar (experimentalmente) que, ___na região de elasticidade linear do material___, o alongamento unitário transversal é proporcional ao alongamento unitário longitudinal. Como os dois alongamentos são adimensionais, tal constante de proporcionalidade também será um ___adimensional___. Designando tal constante pela letra grega ν (nu), denominada Coeficiente de Poisson, teremos:

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

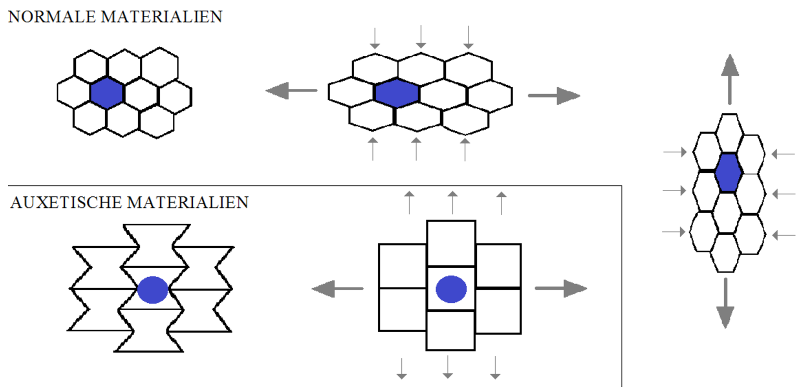
O sinal negativo é inserido na equação para que o coeficiente de Poisson resulte positivo (já que os alongamentos longitudinal e transversal têm sinais contrários para os materiais de construção usuais).

Observações:

1. O coeficiente de Poisson leva o nome do matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840) que tentou determiná-lo utilizando uma teoria molecular de materiais. Para materiais isótropos, Poisson encontrou $\nu = 0,25$, mas cálculos recentes baseados em modelos de estrutura atômica fornecem $\nu = 0,33$;
2. Os valores acima são próximos a valores reais medidos, que estão no intervalo de 0,25 a 0,35 para a maioria dos metais e outros materiais (ver Tabela H2 no livro texto);
3. Um limite superior teórico para o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,5$ (a borracha tem um coeficiente de Poisson próximo deste valor limite). Tais materiais são denominados incompressíveis;
4. Quando as deformações em um material tornam-se grandes (fora da região de elasticidade linear), o coeficiente de Poisson muda. No caso do aço estrutural, p.ex., o coeficiente se aproxima de 0,5 quando ocorre o escoamento plástico;

Observações:

5. Existem, contudo, materiais com coeficientes de Poisson negativos, os quais são denominados materiais auxéticos [4, 5]:



6. Valores de referência para o coeficiente de Poisson para alguns materiais [1]:

Aço: 0,3	Alumínio: 0,33	Concreto: 0,1 – 0,2
Borracha: 0,45 – 0,50	Tungstênio: 0,2	Vidro: 0,17 – 0,27
Níquel: 0,31	Plásticos (nylon, PE): 0,4	

...

Observações:

7. Cristais são, em geral, materiais anisótropos (suas propriedades mecânicas variam de acordo com a direção), mas, considerando que as orientações dos diferentes cristais, dentro de uma estrutura policristalina, variam de forma aleatória, pode-se considerar que o material é "isótropo" (macroscopicamente). Desta forma, os valores assinalados para as constantes elásticas, nesta situação, representam este comportamento macroscópico "médio" do material.

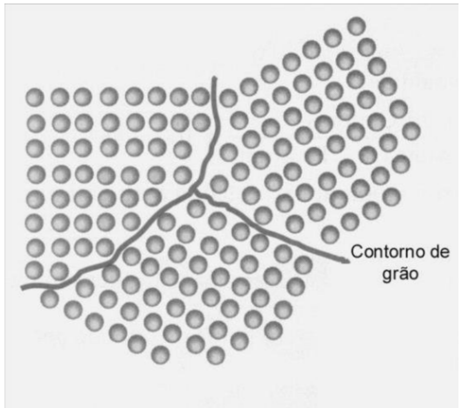
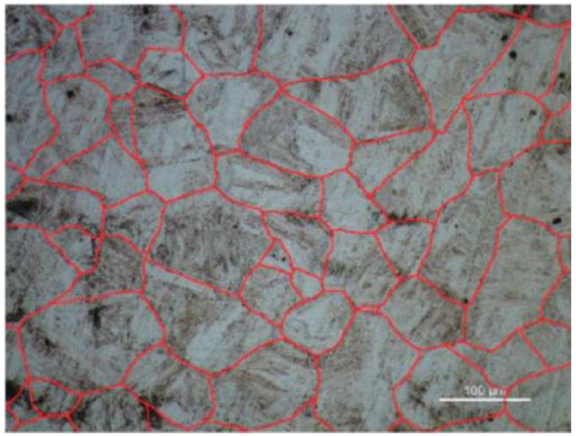


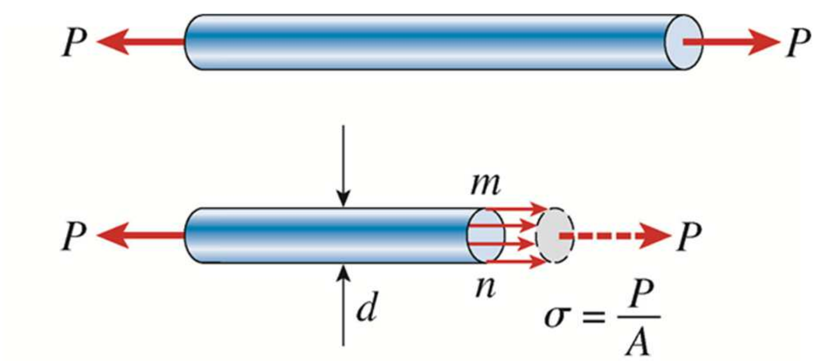
Figura esquemática mostrando os contornos de grão [6].



Contornos de grão destacados [7]

2. Tensão e Deformação de Cisalhamento

Na aula anterior, investigamos as <u>tensões normais</u> *(normal stresses),* assim chamadas pois a direção destas tensões é normal (ortogonal) ao plano em que atuam:



Na aula de hoje investigaremos outro tipo de tensão, denominada tensão cisalhante *(shear stress)*, que age tangencialmente (paralelamente) ao plano em que atua.

Como ilustração da ação das tensões de cisalhamento, consideremos a união parafusada indicada abaixo, submetida ao corte duplo (ou cisalhamento duplo):

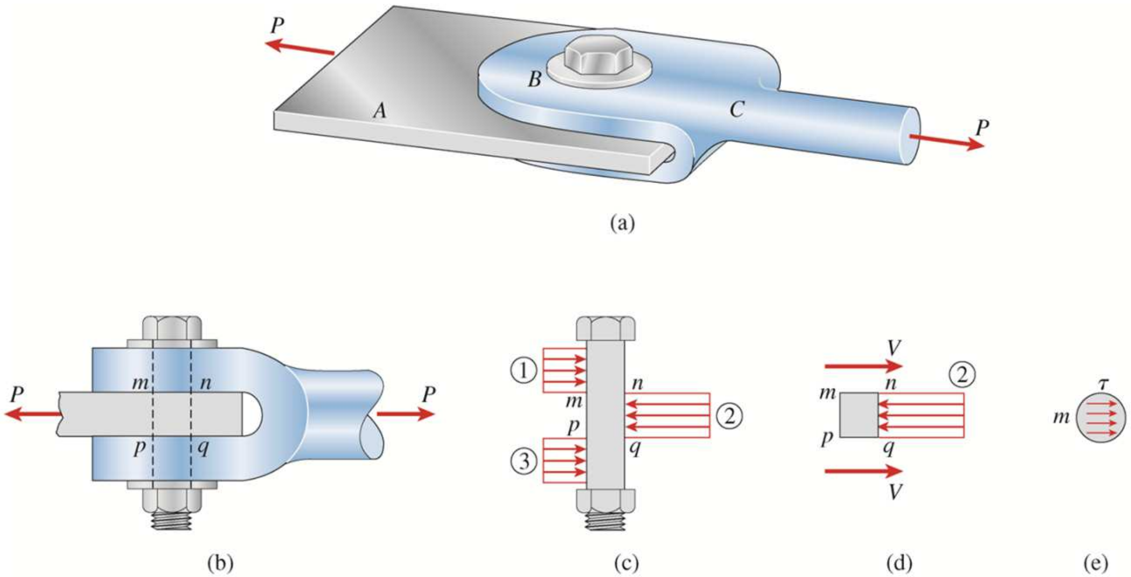


FIG. 1-24 Bolted connection in which the bolt is loaded in double shear

Neste caso, obtemos: $$2V = P \iff V = \frac{P}{2}$$

Deve-se observar que a força *V* indicada na Figura 1.24-d representa a força decorrente da integral das <u>forças internas</u> distribuídas na área da seção transversal, projetadas segundo a linha de ação da força *P*. Designando por $\vec{e}_x$ o versor que indica a linha de ação da força *P* e denominando estas forças internas (por unidade de área) pela letra grega τ (tau), teremos:

$$V = \iint_A (\vec{\tau}.\vec{e}_x)dA \quad \Rightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{V}{A}$$

A tensão $\bar{\tau}$ é a tensão de cisalhamento (ou tensão de corte) <u>média</u> que atua na área da seção transversal (e é paralela à seção transversal). Do exposto, temos:

$$\begin{cases} \bar{\tau} = \dfrac{V}{A} \\ V = \dfrac{P}{2} \end{cases} \Longrightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{P}{2A}$$

<u>Corte duplo</u>: a carga total *P* é dividida por 2A.

O exemplo abaixo ilustra outro caso envolvendo tensões de cisalhamento, o qual denominamos corte simples (ou cisalhamento simples):

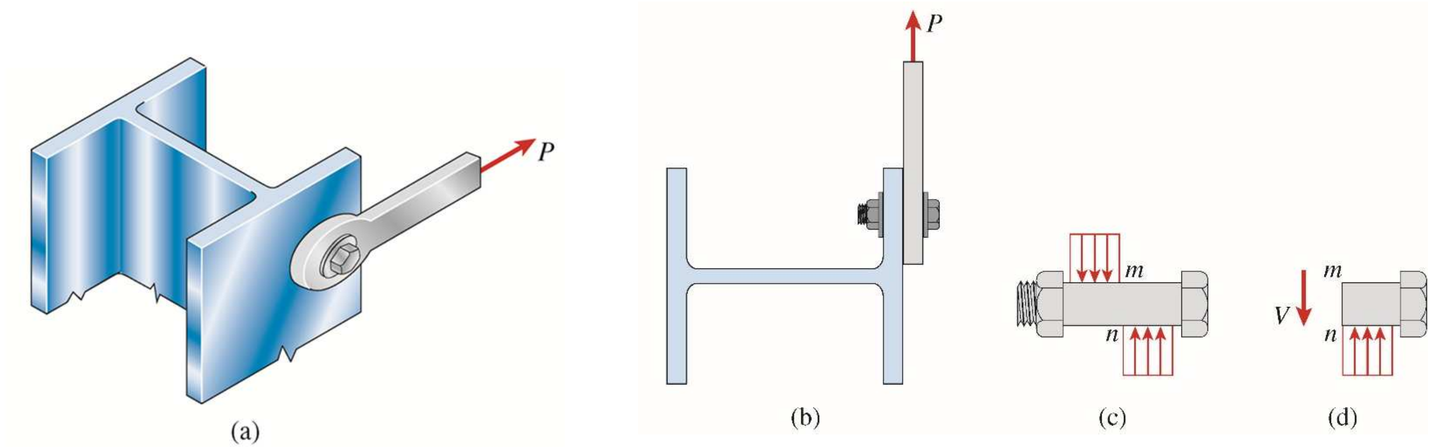


FIG. 1-25 Bolted connection in which the bolt is loaded in single shear

Neste caso, obtemos:

$$\begin{cases} \bar{\tau} = \dfrac{V}{A} \\ V = P \end{cases} \Rightarrow \bar{\tau} = \frac{P}{A}$$

<u>Corte simples</u>: a carga total *P* é dividida por A.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

1. A tensão cisalhante calculada pelas fórmulas indicadas representa um valor médio das tensões de corte na seção transversal;

2. A força V é denominada força cortante (*shear force*) e devemos lembrar sempre que tal força é uma resultante das tensões internas (tensões cisalhantes) que atuam no material (*stress resultant*);

3. Do exposto, verifica-se que a unidade das tensões cisalhantes no S.I. é:

$$[\tau] = \frac{[V]}{[A]} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

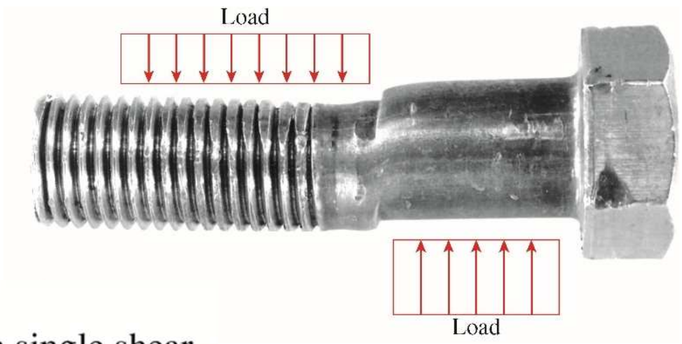
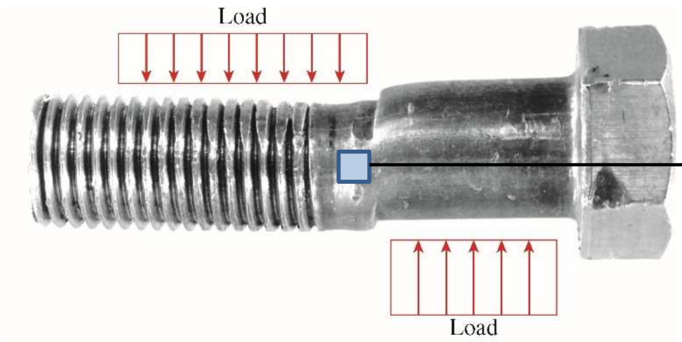


FIG. 1-26 Failure of a bolt in single shear

Igualdade das tensões de cisalhamento em planos perpendiculares:



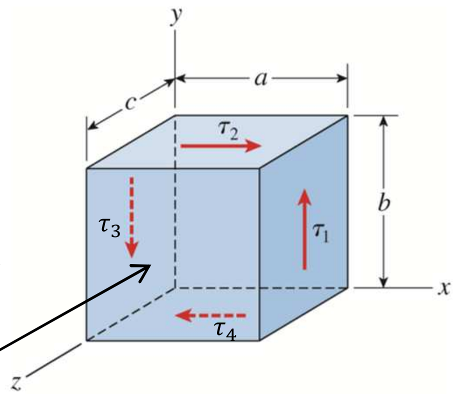


FIG. 1-27 Small element of material subjected to shear stresses

Note que as faces paralelas ao plano xy estão visivelmente descarregadas (isentas de tensões).

$$\sum F_x = 0 \;\Leftrightarrow\; \tau_2(ac) = \tau_4(ac) \;\Leftrightarrow\; \tau_2 = \tau_4$$

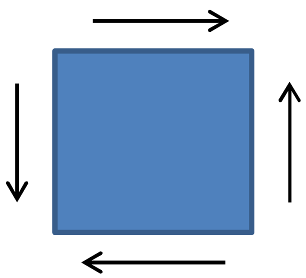
$$\sum F_y = 0 \;\Leftrightarrow\; \tau_1(bc) = \tau_3(bc) \;\Leftrightarrow\; \tau_1 = \tau_3$$

$$\sum M_z = 0 \;\Leftrightarrow\; \tau_1(bc)a = \tau_2(ac)b \;\Leftrightarrow\; \tau_1 = \tau_2$$

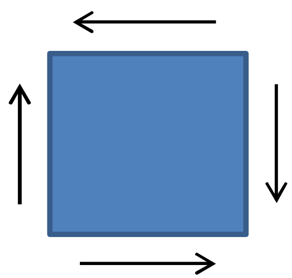
$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau$$

Em resumo:

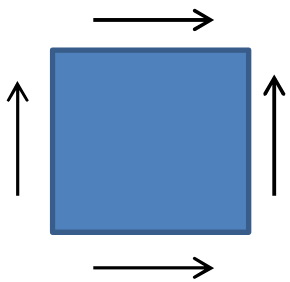
1. Tensões de cisalhamento em faces opostas (e paralelas) são iguais em magnitude e opostas em direção;
2. Tensões de cisalhamento em faces adjacentes (e perpendiculares) de um elemento são iguais em magnitude e têm direções e sentidos tais que ambas convergem (apontam) para a aresta comum, ou divergem (afastam-se) da aresta comum.



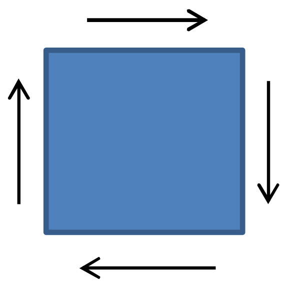
(possível)



(possível)



(impossível)



(impossível)

Deformações por cisalhamento (distorções):

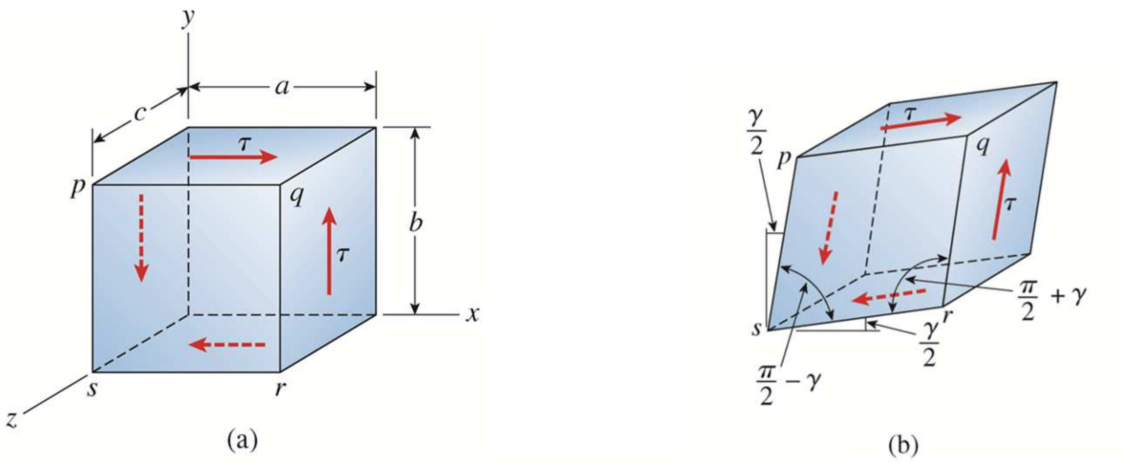


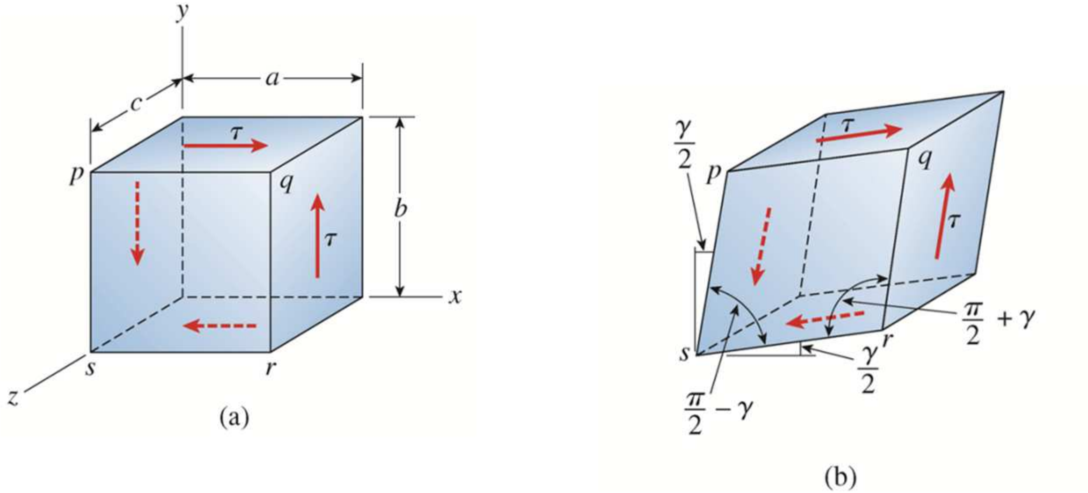
FIG. 1-28 Element of material subjected to shear stresses and strains

As tensões de cisalhamento são acompanhadas por deformações denominadas distorções que provocam mudanças na forma do elemento. A distorção será representada pela letra grega γ (gamma) e é definida como a mudança do ângulo entre duas direções que, na configuração de referência, eram ortogonais entre si.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

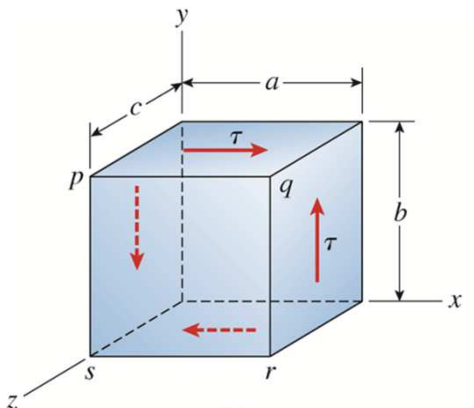
A figura abaixo ilustra, por exemplo, a distorção que ocorre entre as direções *x* e *y*, a qual recebe estes índices como subscritos para que isto fique claro: γ_{xy} é, portanto, a distorção entre as fibras (inicialmente ortogonais entre si) que, na configuração de referência, eram paralelas aos eixos *x* e *y*, respectivamente.

Naturalmente, tal distorção está associada à tensão cisalhante que leva os mesmos subscritos: τ_{xy} é a tensão de cisalhamento que age na face de normal $\vec{n} = \vec{e}_x$ e que tem a direção do versor $\vec{e}_y$; já τ_{yx} é a tensão de cisalhamento que age na face de normal $\vec{n} = \vec{e}_y$ e que tem a direção do versor $\vec{e}_x$. Como vimos antes, o equilíbrio de momentos impõe que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. E também é óbvio que $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$.

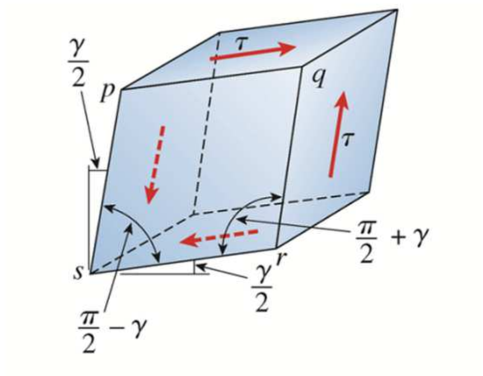


Denotando o ângulo final (na configuração deformada) entre os planos que antes formavam os planos *xz* e *yz* por θ_{xy}, definimos a distorção associada γ_{xy} como:

$$\theta_{xy} + \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta_{xy}$$



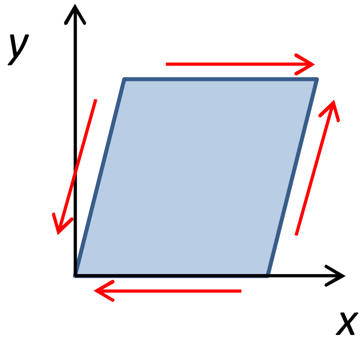
(a)



(b)

Assim, se o ângulo final entre as faces for menor do que $\pi/2$, teremos uma distorção positiva e, se o ângulo entre as faces for maior do que $\pi/2$, teremos uma distorção negativa.

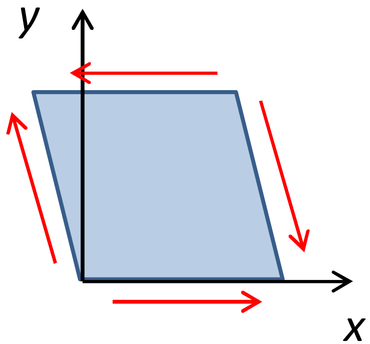
Exemplos:



Aqui: $\theta_{xy} < \pi/2$

$\gamma_{xy} > 0$

$\tau_{xy} > 0$

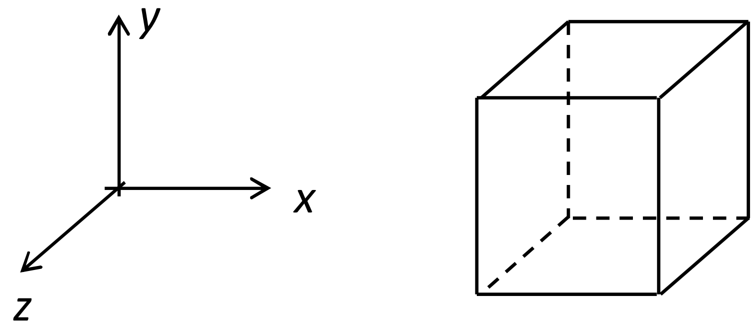


Aqui: $\theta_{xy} > \pi/2$

$\gamma_{xy} < 0$

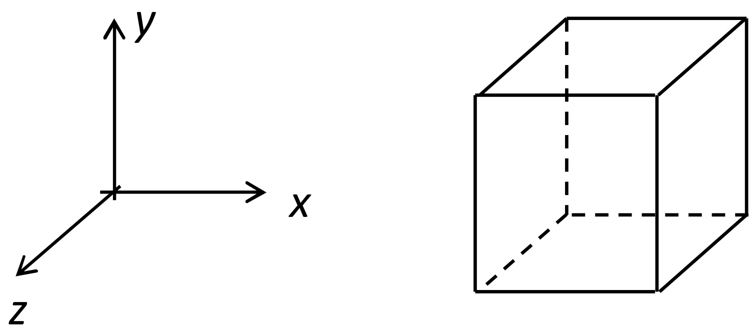
$\tau_{xy} < 0$

Convenção de Sinais para Tensões Cisalhantes:



Faces de orientação positiva: são aquelas cuja normal externa tem o mesmo sentido de um dos eixos coordenados. Na figura acima, as três faces "visíveis" são as de orientação positiva (normais externas são: $+\vec{e}_x, +\vec{e}_y$ ou $+\vec{e}_z$)
Faces de orientação negativa: são aquelas cuja normal externa tem o sentido contrário a um dos eixos coordenados. Na figura acima, as três faces "invisíveis" são as de orientação negativa (normais externas são: $-\vec{e}_x, -\vec{e}_y$ ou $-\vec{e}_z$).

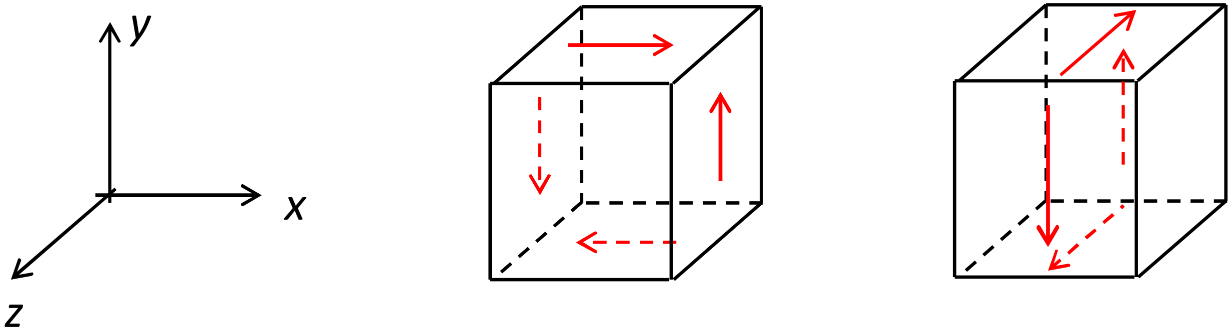
Convenção de Sinais para Tensões Cisalhantes:



Nas faces de orientação positiva, as tensões cisalhantes que possuírem os mesmos sentidos dos eixos coordenados serão consideradas positivas, e aquelas que possuírem sentidos contrários aos eixos coordenados serão consideradas negativas.

Já nas faces de orientação negativa, ocorre o contrário: as tensões cisalhantes que possuírem sentidos contrários aos dos eixos coordenados serão consideradas positivas, e aquelas que possuírem os mesmos sentidos dos eixos coordenados serão consideradas negativas.

Exemplo:



(1) (2)

No elemento (1), todas as quatro tensões cisalhantes indicadas são positivas ($\tau_{xy} = \tau_{yx} > 0$).
Já no elemento (2), todas as quatro tensões cisalhantes indicadas são negativas ($\tau_{zy} = \tau_{yz} < 0$).

Lei de Hooke em Cisalhamento:

De forma análoga à relação vista entre a tensão normal (σ) e o alongamento unitário (ε) medido na mesma direção de aplicação da tensão normal, em que admitimos a linearidade entre as duas grandezas na forma:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

...também é possível verificar que o mesmo vale para a relação entre a tensão cisalhante (τ) e a distorção associada (γ). A constante de proporcionalidade encontrada neste caso (G) é denominada módulo de elasticidade transversal (ou módulo de cisalhamento):

$$\tau = G\gamma$$

Observações:

1. Unidades no S.I.:

$$[\tau] = \frac{N}{m^2} = Pa, \quad [\gamma] = rad, \quad [G] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

2. Pode-se demonstrar que, para materiais homogêneos e isótropos, o módulo de cisalhamento (*G*) está relacionado ao módulo de elasticidade (*E*) e ao coeficiente de Poisson (ν) pela seguinte relação:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

3. Tensões e Cargas Admissíveis

Como já visto, uma estrutura é, em linhas gerais, *qualquer objeto capaz de suportar e transmitir cargas*.

Se a falha estrutural deve ser evitada, as cargas que a estrutura é capaz de suportar devem ser maiores que as cargas às quais a estrutura será submetida quando utilizada.

Como *resistência* é a capacidade de uma estrutura de resistir cargas, podemos também afirmar que: *a resistência real de uma estrutura deve exceder a resistência exigida*.

Assim, definimos o fator de segurança de uma estrutura pela razão:

$$\text{Fator de segurança} = \text{FS} = n = \frac{\textit{Resistência Real}}{\textit{Resistência Exigida}}$$

Naturalmente, o fator de segurança deve ser sempre maior que 1, a fim de evitar falhas. Dependendo das circunstâncias, fatores de segurança ligeiramente acima de 1 até quase 10 são utilizados.

Definimos a margem de segurança de uma estrutura por:

Margem de Segurança = MS = $n - 1$

Assim, se, por exemplo, uma determinada estrutura possui uma resistência real que é o dobro da resistência exigida, ela terá um fator de segurança igual a 2 ($n = 2$), e uma margem de segurança igual a 1 (ou seja, de 100%).

Tensões Admissíveis:

Para muitas estruturas, é importante que o material permaneça no regime elástico linear a fim de que sejam evitadas deformações permanentes quando as cargas são removidas. Nesta condições, o fator de segurança é estabelecido em relação ao escoamento na estrutura, que tem início quando a *tensão de escoamento é alcançada em qualquer ponto da estrutura* (geralmente nos pontos de maior solicitação, denominados *pontos críticos*).

Como,

$$n = \frac{Resistência\ Real}{Resistência\ Exigida} = \frac{Cargas\ máximas\ que\ podem\ ser\ aplicadas}{Cargas\ efetivamente\ aplicadas}$$

Então, considerando que a carga máxima que pode ser aplicada à estrutura é aquela que levará o ponto mais solicitado ao início de escoamento e que as cargas efetivamente aplicadas na estrutura levam a uma tensão (no ponto crítico) que é proporcional a elas, podemos escrever:

$$n = \frac{Tensão\ de\ escoamento\ do\ material}{Tensão\ no\ ponto\ crítico}$$

Ou ainda:

$$\underbrace{Tensão\ no\ ponto\ crítico}_{Tensão\ admissível} = \frac{Tensão\ de\ escoamento\ do\ material}{n}$$

Assim, se tivermos, por exemplo, uma estrutura fabricada com um determinado aço que possua uma tensão de escoamento de 250 MPa e o coeficiente de segurança desejado for *n* = 2, isto significa que a tensão admissível que pode ocorrer no ponto mais solicitado da estrutura durante a utilização da mesma é:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{n} = \frac{250\ MPa}{2} = 125\ MPa$$

Cargas Admissíveis:

Nos casos mais simples, onde é possível admitir que a distribuição de tensões na estrutura é praticamente uniforme (como nos casos das barras sob tração ou compressão ou ainda, de forma simplificada, como nos casos das tensões de cisalhamento médias em pinos e parafusos), teremos:

$$\sigma_{adm} = \frac{P_{adm}}{A} \quad \Leftrightarrow \quad P_{adm} = (\sigma_{adm})A$$

4. Dimensionamento para Cargas Axiais e Cisalhamento Puro

O processo de determinação da resposta de uma estrutura dada (com material já selecionado e com propriedades mecânicas conhecidas), com geometria conhecida (comprimentos, diâmetros, espessuras, etc.) sob a ação de carregamentos determinados (forças concentradas ou distribuídas, porém conhecidas), e com condições de contorno também conhecidas, é denominado Análise. Como "resposta da estrutura", queremos dizer "tensões, deformações e deslocamentos" produzidas pelas cargas.

O processo inverso é denominado Dimensionamento. Ao dimensionar uma estrutura, devemos determinar suas propriedades para que ela suporte as cargas de tal forma que a tensão admissível não seja superada.

Novamente, nos casos mais simples, onde é possível admitir que a distribuição de tensões na estrutura é praticamente uniforme, teremos:

$$\sigma_{adm} = \frac{P_{adm}}{A} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{P_{adm}}{\sigma_{adm}}$$

Observações Adicionais:

1. Adicionalmente às considerações de resistência, no dimensionamento de uma estrutura é importante que outros requisitos (como a rigidez e a estabilidade estrutural) também sejam devidamente considerados. A rigidez refere-se à capacidade da estrutura de resistir a mudanças na forma e é muito importante tanto na estática quanto na análise dinâmica da estrutura (determinação dos modos e frequências de vibração). Já a estabilidade está associada à perda da capacidade da estrutura em resistir a esforços de compressão (localmente ou globalmente);
2. Outra parte do processo de dimensionamento é a otimização, que busca dimensionar a estrutura para que resista aos esforços previstos e que tenha o menor peso possível (maior eficiência estrutural);

Observações Adicionais:

3. Ao analisar ou dimensionar uma estrutura, nos referimos às forças que atuam sobre ela como **cargas** ou **reações**. Cargas são *forças ativas* aplicadas à estrutura por alguma causa externa, como gravidade, pressão exercida por algum fluido, movimentações do solo (recalques ou vibrações), variações de temperatura, etc. Reações são *forças passivas* induzidas nos suportes da estrutura e são necessárias para garantir o equilíbrio (em condições estáticas ou dinâmicas).

Referências:

[1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p.

[2] http://www.matweb.com

[3] https://pt.wikipedia.org/wiki/Coeficiente_de_Poisson

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Auxetics

[5] https://www.youtube.com/watch?v=Fbqn-swwf-Q

[6] Colpaert, H. Metalografia dos Produtos Siderúrgicos Comuns, 4ª ed., Ed. Blücher, 2008.

[7] Carvalho, F.M.; Braga, A.P.; Nishikawa, A.S., Goldenstein, H. Efeito do Molibdênio, Boro e Nióbio na Transformação Bainítica no Resfriamento Contínuo. In: 73º Congresso Anual da ABM, 2018, São Paulo, SP, Brasil.