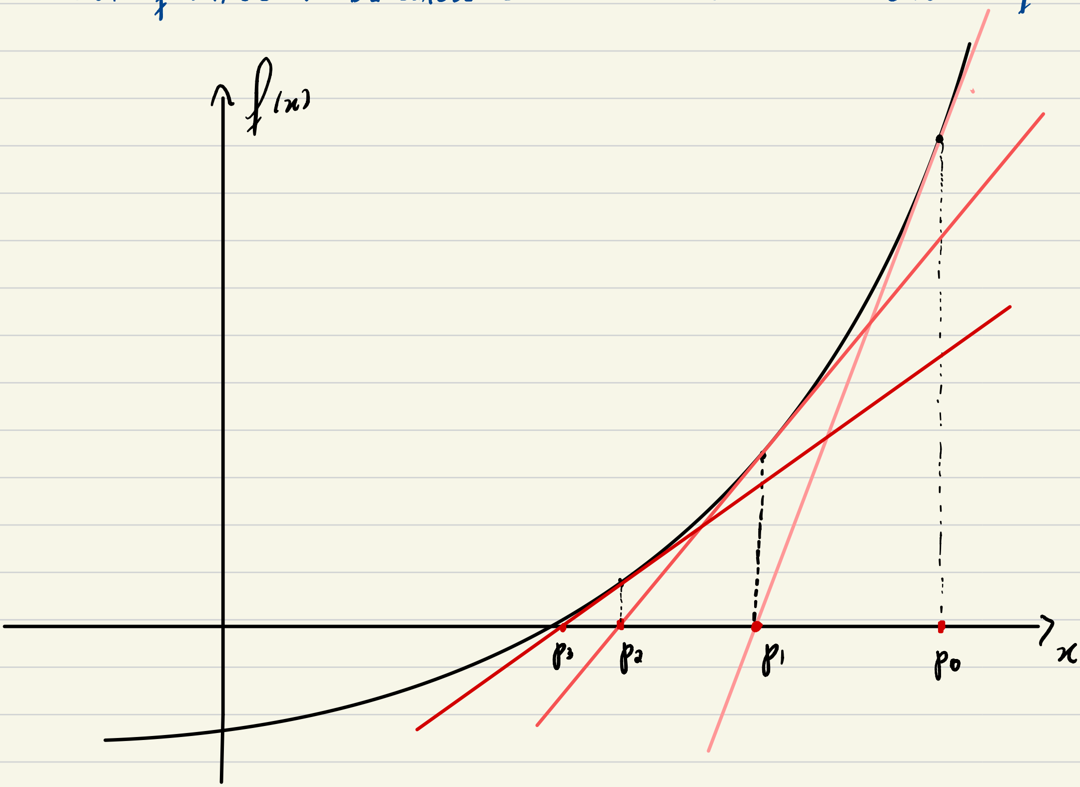
O Método de Newton-Raphson 1

- Dedução geométrica do Algoritmo
- Interpretação via Teorema de Ponto Fixo.
- Convergência
- Estimativa de Erro.

COMO FUNCIONA O MÉTODO?

SEJA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ DE CLASSE C^1. QUEREMOS ACHAR UM ZERO DE f.



1) ESCOLHO p_0

2) TRAÇO RETA TANGENTE A f EM $(p_0, f(p_0))$.

$r(x) = f(p_0) + f'(p_0)(x - p_0)$.

ACHO A RAIZ DESTA RETA $p_1 = p_0 - \dfrac{f(p_0)}{f'(p_0)}$

3) TRAÇO RETA TANGENTE A f EM $(p_1, f(p_1))$.

$r(x) = f(p_1) + f'(p_1)(x - p_1)$

ACHO A RAIZ DESTA RETA $p_2 = p_1 - \dfrac{f(p_1)}{f'(p_1)}$.

Algoritmo

Método de Newton-Raphson

1) Escolho p_0.

2) Defino a sequência $p_{n+1} = p_n - \dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)}$, $n \geq 0$.

Observação: O método precisa que $f'(p_n)$ seja $\neq 0$, $\forall n \geq 0$.

Interpretação via Ponto Fixo:

- Seja $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Logo $p_{n+1} = g(p_n) = p_n - \dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)}$.
- Observe que $g(p) = p \Leftrightarrow p = p - \dfrac{f(p)}{f'(p)} \Leftrightarrow f(p) = 0$.

(Supomos que $f'(x) \neq 0$ perto de p).

EXEMPLO: VAMOS APLICAR O MÉTODO DE NEWTON NA FUNÇÃO $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ DADA POR $f(x) = \frac{1}{x} - a$, $a > 0$

NOTE QUE $f(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} = a \Leftrightarrow p = \frac{1}{a}$. LOGO O MÉTODO APROXIMARÁ $\frac{1}{a}$.

NOTE QUE $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. LOGO DADO $p_0 \in \mathbb{R}$, DEFINIMOS

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} = p_n - \frac{\frac{1}{p_n} - a}{-\frac{1}{p_n^2}} = p_n + p_n^2\left(\frac{1}{p_n} - a\right) = 2p_n - ap_n^2$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{n+1} = 2p_n - ap_n^2}$$

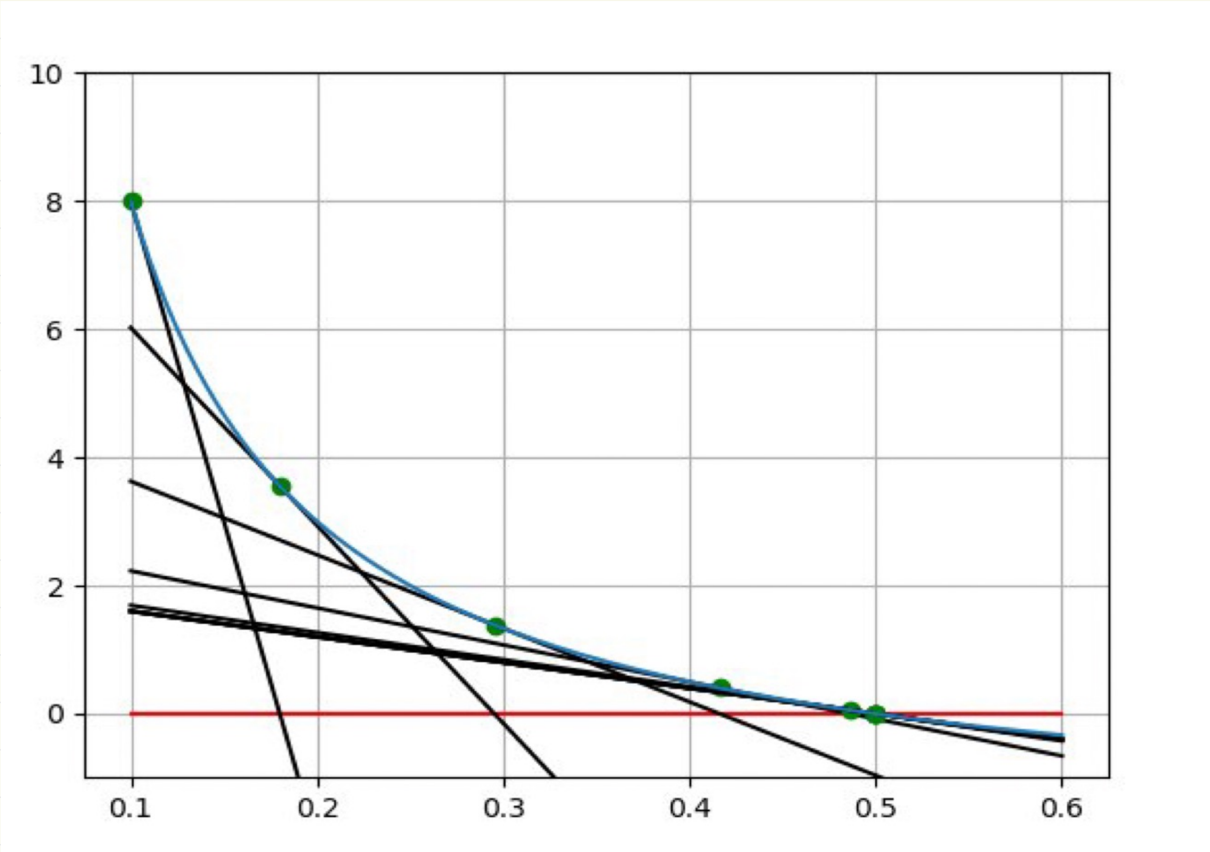
CALCULAMOS $\frac{1}{a}$ SEM USAR DIVISÃO!

EXEMPLOS:

$a = 2,\ p_0 = 0.1$	$a = 2,\ p_0 = 1$	$a = \pi,\ p_0 = 0.1$
0.1	2	0.1
0.18	-4	0.16858407
0.2952	-40	0.24788223
0.41611392	-3280	0.30272741
0.48592625	-21523360	0.31754707
0.49960386	NÃO CONVERGE	0.31830806
CONVERGE		0.318309886

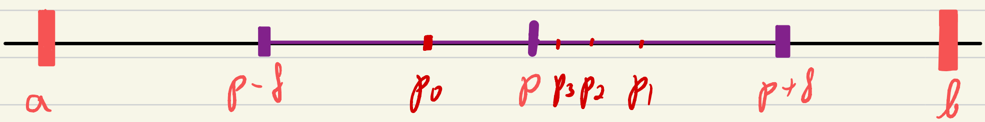
IGUAL DA CALCULADORA

Figura para $a = 2$ e $p_0 = 0.1$



CONVERGÊNCIA

TEOREMA: SEJA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO DE CLASSE C^2 (f, f', f'' EXISTEM E SÃO CONTÍNUAS). LOGO SE $p\in\,]a,b[$ É TAL QUE $f(p)=0$ E $f'(p)\neq 0$, ENTÃO $\exists\,\delta>0$ TAL QUE $[p-\delta, p+\delta]\subset\,]a,b[$, $f'(x)\neq 0$, $\forall\, x\in[p-\delta, p+\delta]$, E PARA TODO $p_0\in[p-\delta,p+\delta]$, A SEQUÊNCIA (p_n) DEFINIDA COMO $p_{n+1}=p_n-\dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)}$ ESTÁ BEM DEFINIDA E CONVERGE PARA p.



DEMO: COMO f' É CONTÍNUA E $f'(p)\neq 0$, PODEMOS ESCOLHER $\tilde{\delta}>0$ TAL QUE $[p-\tilde{\delta}, p+\tilde{\delta}]\subset\,]a,b[$ E $f'(x)\neq 0, \forall x\in[p-\tilde{\delta},p+\tilde{\delta}]$

SEJA $g:[p-\tilde{\delta}, p+\tilde{\delta}]\to\mathbb{R}$ DADO POR $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

EM PARTICULAR, $g(p)=p-\dfrac{f(p)}{f'(p)}=p$. $\Rightarrow$ p É PONTO FIXO DE g.

NOTE QUE $g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + f(x)\frac{1}{f'(x)}f''(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$

ASSIM, $g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{f'(p)^2} = 0$.

COMO g' É CONTÍNUA, DADO $0 < k < 1$, $\exists\, 0 < \delta \leq \tilde{\delta}$ TAL QUE, SE $x \in [p-\delta, p+\delta]$, ENTÃO $|g'(x)| \leq k < 1$.

POR FIM, SE $x \in [p-\delta, p+\delta]$, ENTÃO

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| \underset{\downarrow}{\leq} k|x-p| \leq k\delta \Rightarrow g(x) \in [p-\delta, p+\delta].$$

TEOREMA DO VALOR MÉDIO.

RESUMINDO:

i) SE $x \in [p-\delta, p+\delta]$, ENTÃO $g(x) \in [p-\delta, p+\delta]$.

ii) $|g'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in [p-\delta, p+\delta]$.

POR i), PARA TODO $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$ A SEQUÊNCIA (p_n) DADA POR $p_{n+1} = g(p_n)$ ESTÁ BEM DEFINIDA. POR ii) E PELO TEOREMA DO PONTO FIXO, $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

BASTA, POR FIM, OBSERVAR QUE

$$p_{n+1} = g(p_n) = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} \qquad \blacksquare$$

Estimativa de Erro

Corolário: Nas condições anteriores, temos

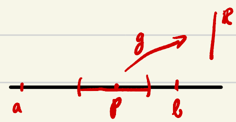
1) $|p_n - p| \leq k^n |p_0 - p| \quad (\leq k^n \delta)$

2) $|p_n - p| \leq \dfrac{k^n}{1-k} |p_0 - p_1|$

3) $|p_n - p| \leq \dfrac{k}{1-k} |p_{n-1} - p|$

Demo: Segue dos resultados de ponto fixo.

Teorema: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^3, $p \in [a,b]$ tal que $f(p) = 0$ e $f'(p) \neq 0$. Se $p_0 \in [a,b]$ é tal que a sequência (p_n) definida por $p_{n+1} = p_n - \dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)}$, $n \geq 0$, converge para p, então a convergência é quadrática.



Demo: Basta definir $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ numa vizinhança de p e observar que $p_{n+1} = g(p_n)$, para n grande.

- Como f é $C^3 \Rightarrow g$ é de classe C^2
- $g'(p) = \dfrac{f(p) f''(p)}{f'(p)^2} = 0$, pois $f(p) = 0$

$\Big\}$ A convergência é quadrática.

$\blacksquare$

Exemplo: Seja $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x} - \pi$

O método de Newton consiste em achar o ponto fixo da função

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{1}{x} - \pi}{-1/x^2} = 2x - \pi x^2.$$

Note que $\frac{1}{0.3} = \frac{10}{3} = 3.333 > \pi$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\pi} \in [0.3, 0.35]$

$\frac{1}{0.35} = 2.857\ldots < \pi$

Vemos também que $g(x) = x(2 - \pi x)$. Logo os zeros de g são

$x = 0$ e $x = \frac{2}{\pi} > \frac{2}{0.4} = \frac{20}{4} = 5$

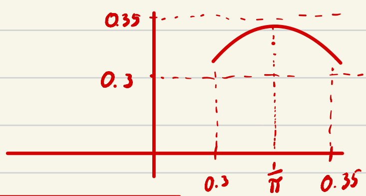
$g'(x) = 2(1 - \pi x)$. Logo o zero de g é $\frac{1}{\pi}$

Logo g é crescente de 0.3 a $\frac{1}{\pi}$ e decrescente de $\frac{1}{\pi}$ a 0.35.

$g(0.3) = 2 \times 0.3 - \pi \times (0.3)^2 \doteq 0.3172\ldots \in [0.3, 0.35]$

$g\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \in [0.3, 0.35]$

$g(0.35) = 0.3151\ldots \in [0.3, 0.35]$



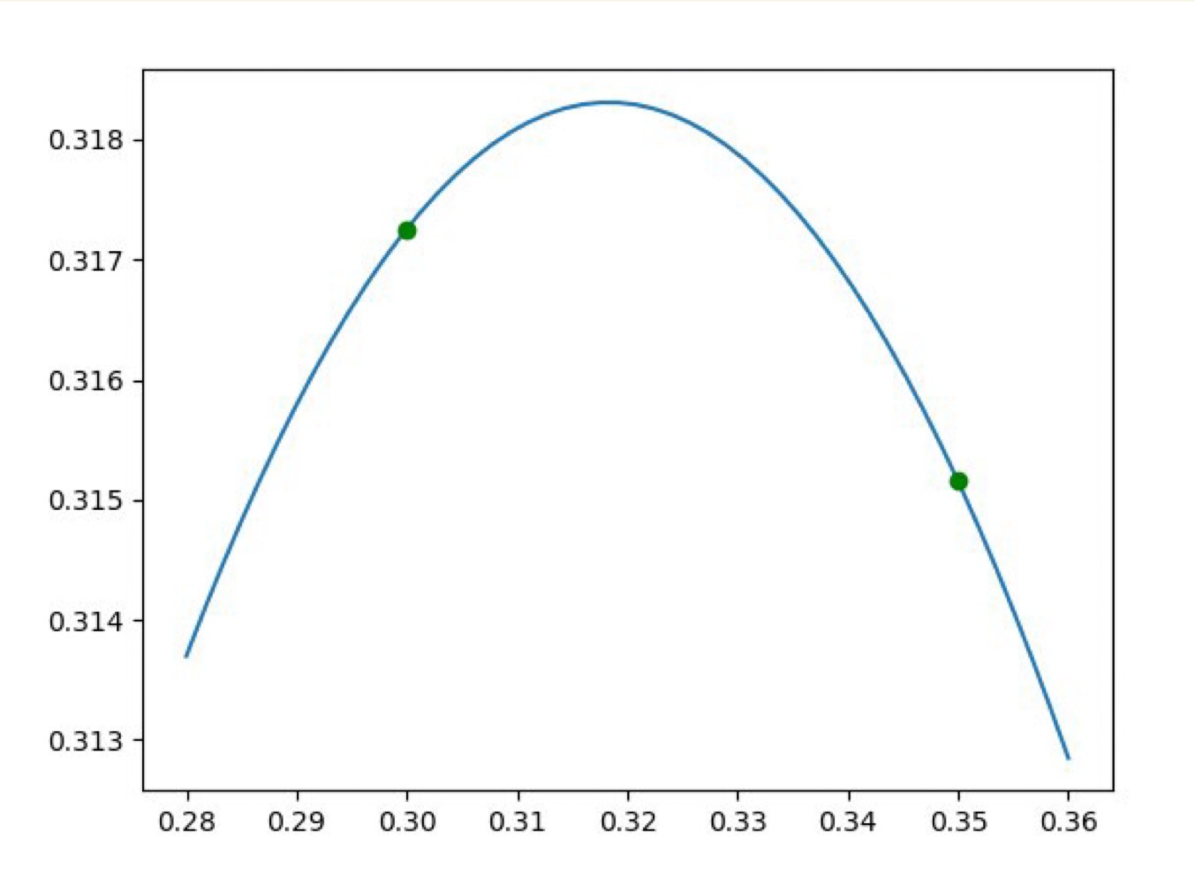
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Se } x \in [0.3, 0.35], \text{ então } g(x) \in [0.3, 0.35].}$

Por fim, $g'(x) = 2 - 2\pi x$ $\to$ $g'(0.3) = 0.115\ldots$, $g'(0.35) = -0.1991\ldots$ $\Big\}$ $\boxed{|g'(x)| \leq 0.2, \ \forall x \in [0.3, 0.35]}$

Pouco Prático!

Abaixo: $g(x) = 2x - \pi x^2$

- $(\underset{x}{0.3}, \underset{g(x)}{0.3172})$
- $(\underset{x}{0.35}, \underset{g(x)}{0.3151})$



Aula 5: Método de Newton-Raphson 1

Ideia: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $p \in [a,b]$ tal que $f(p) = 0$ (p é um zero de f). Dado o ponto $p_0 \in [a,b]$, calculamos $f(p_0)$, $f'(p_0)$ e a reta tangente que passa por $(p_0, f(p_0))$. A reta será dada por $r(x) = f(p_0) + f'(p_0)(x - p_0)$. Achamos a raiz de r. Esta raiz será dada por $p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$. Repetindo este processo chegamos à sequência:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}.$$

Veremos que, sob certas condições, a sequência acima convergirá para p.

Método de Newton-Raphson (também chamado apenas de método de Newton):
Escolhemos $p_0 \in [a,b]$.
Para cada $n \geq 0$, definimos $p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$. (Precisamos sempre que $f'(p_n) \neq 0$).

Observação 1. Seja $g : I \to \mathbb{R}$, $I = \{x \in [a,b]; f'(x) \neq 0\}$, a função definida como $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Seja $p \in [a,b]$ tal que $f(p) = 0$ e $f'(p) \neq 0$. Então p é um ponto fixo de g. De fato, $g(p) = p$ se, e somente se, $p - \frac{f(p)}{f'(p)} = p$, ou seja, $f(p) = 0$. Além disso, vemos que o método de Newton-Raphson pode ser escrito como $p_{n+1} = g(p_n)$, que é exatamente a iteração do método do ponto fixo.

Teorema 2. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Seja $p \in]a,b[$ tal que $f(p) = 0$ e $f'(p) \neq 0$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $[p-\delta, p+\delta] \subset [a,b]$ e para todo $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$, a sequência (p_n) dada por $p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$ está bem definida e converge para p.*

Observação 3. Nas condições do Teorema acima, podemos estimar os erros com as estimativas a priori e posteriori dos erros do método do ponto fixo.

Proposição 4. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^3 e $p \in [a,b]$ tal que $f(p) = 0$ e $f'(p) \neq 0$. Seja $p_0 \in [a,b]$. Se a sequência (p_n) do método de Newton convergir para p, então a sequência converge quadraticamente.*

Observação 5. Nas condições da Proposição 4, a sequência sempre converge caso p_0 esteja suficientemente próximo a p, pelo Teorema 2. Na aula seguinte, o Teorema da Convexidade dará uma condição mais simples para a convergência.