CONVERGÊNCIA MONÓTONA E ALTERNADA.

- DEFINIÇÃO DE SEQUÊNCIAS ALLTERNADAS E MONÓTONAS
- CRITÉRIOS PARA DETERMINAR SE $p_{n+1} = g(p_n)$ É ALTERNADA OU MONÓTONA E SE CONVERGE OU NÃO.
- MÉTODOS COM PRECISÃO PRÉ-FIXADA PARA SEQUÊNCIAS ALTERNADAS E MONÓTONAS.

PRÉ-REQUISITO: **TEOREM DO VALOR MÉDIO**: SEJA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ DE CLASSE C^1.

DEPENDE DE X E Y.

ENTÃO PARA CADA $p, q \in [a,b]$, $\exists\, \theta \in]0,1[$ TAL QUE $f(p) - f(q) = f'(p + \theta(q-p))(p-q)$.

COROLÁRIO: SE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ É DE CLASSE C^1 E $k := \max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$,

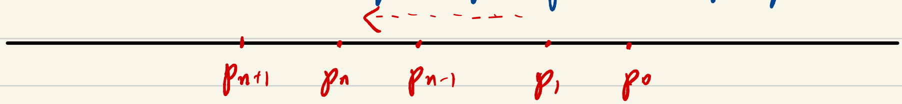
ENTÃO $|f(p) - f(q)| \leq k\,|p-q|, \; \forall\, p, q \in [a,b]$.

Convergência Monótona e Alternada

Definição: Dizemos que uma sequência (p_n) em $\mathbb{R}$ é:

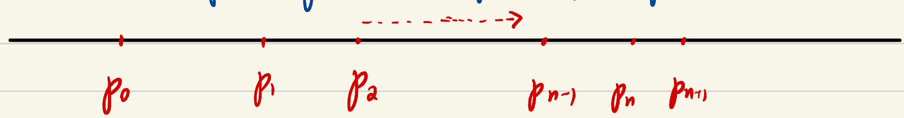
1) Monótona se $\ldots < p_{n+1} < p_n < p_{n-1} < \ldots < p_1 < p_0$.

M1)



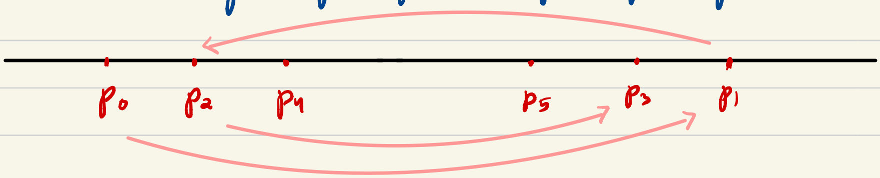
ou se $p_0 < p_1 < \ldots < p_{n-1} < p_n < p_{n+1} < \ldots$

M2)



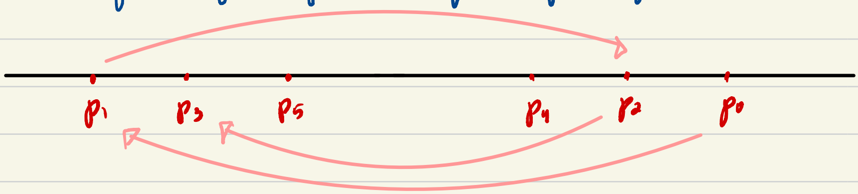
2) Alternada se $p_0 < p_2 < p_4 < \ldots < p_5 < p_3 < p_1$.

A1)



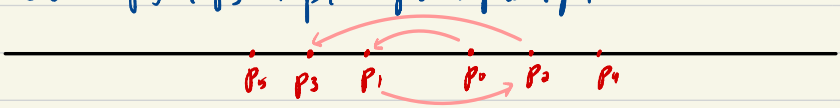
ou $p_1 < p_3 < p_5 < \ldots < p_4 < p_2 < p_0$

A2)



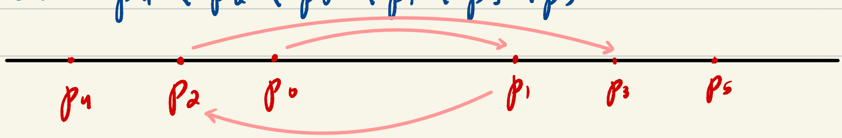
ou $p_5 < p_3 < p_1 < p_0 < p_2 < p_4$

A3)



ou $p_4 < p_2 < p_0 < p_1 < p_3 < p_5$

A4)



Proposição: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo (pode não ser limitado) e $g: I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Seja $p_0 \in I$ tal que a sequência $p_{n+1} = g(p_n)$, $n \geq 0$, esteja bem definida e $p_1 = g(p_0) \neq p_0$.

Assim,

1) Se $g'(x) > 1$, $\forall x \in I$, então a sequência é monótona divergente.

2) Se $0 < g'(x) < 1$, $\forall x \in I = [a,b]$ (intervalo fechado e limitado), então a sequência é monótona convergente.

3) Se $g'(x) < -1$, $\forall x \in I$, então a sequência é alternada divergente.

4) Se $-1 < g'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então a sequência é alternada convergente.

Demo: Suponha que $g' > 0$ e $p_1 = g(p_0) > p_0$, então $g(p_1) > g(p_0) \Rightarrow p_2 > p_1$.

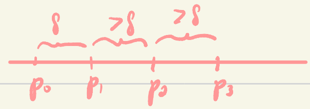
Da mesma forma $p_3 > p_2$. Assim, $p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots$

Se $p_0 > p_1$, então $g(p_0) > g(p_1) \Rightarrow p_1 > p_2$. Da mesma forma, $p_2 > p_3$.

Assim, $\dots < p_3 < p_2 < p_1 < p_0$

Concluímos que (p_n) é monótona.

1) Suponha que $g'(x) > 1$, $\forall x \in I$.



Vamos supor que $p_1 > p_0$. Logo $\delta := p_1 - p_0 > 0$.

Teorema do valor médio

Vemos assim que $p_2 - p_1 = g(p_1) - g(p_0) = g'(p_0 + \theta(p_1 - p_0))(p_1 - p_0)$

$\theta \in]0,1[$.

Como $g' > 1$, concluímos que $p_2 - p_1 > p_1 - p_0 = \delta$.

Assim, $p_2 - p_0 = p_2 - p_1 + p_1 - p_0 > 2\delta$. Por indução, usando o mesmo argumento, vemos que $p_n - p_0 > n\delta$, $\forall n > 0$. Logo (p_n) diverge.

Se $p_1 < p_0$, usamos o mesmo argumento.

2) Suponha que $0 < g'(x) < 1$, $\forall x \in I = [a,b]$

Como g' é contínua, I é fechado e limitado e $0 < g'(x) < 1$, $\forall x \in I$, concluímos que $\max_{x \in [a,b]} |g'(x)| := k < 1$. Estamos nas condições do Teorema do Ponto Fixo.

Portanto (p_n) converge.

3) Suponha que $g'(x) < -1$, $\forall x \in I$.

Vamos supor que $p_1 > p_0$. Logo $\delta := p_1 - p_0 > 0$.

$\theta \in]0,1[$

Vemos assim que $p_2 - p_1 = g(p_1) - g(p_0) = g'(p_0 + \theta(p_1 - p_0))(p_1 - p_0)$

Teorema do valor médio

Como $g' < -1$, concluímos que $p_2 - p_1 < p_0 - p_1 \Rightarrow p_2 < p_0$.

Assim, $p_2 < p_0 < p_1$. O mesmo argumento implica que $p_1 < p_3$.

Por indução, temos $\ldots < p_4 < p_2 < p_0 < p_1 < p_3 < p_5 < \ldots$

Se $p_1 < p_0$, o mesmo argumento nos leva a $\ldots < p_3 < p_1 < p_0 < p_2 < \ldots$

A sequência (p_n) diverge, portanto.

4) Suponha que $-1 < g'(x) < 0$, $\forall x \in I$.

Vamos supor que $p_1 > p_0$. Logo $\delta := p_1 - p_0 > 0$.

$\theta \in]0,1[$

Vemos assim que $p_2 - p_1 = g(p_1) - g(p_0) = g'(p_0 + \theta(p_1 - p_0))\,(p_1 - p_0)$

Como $-1 < g' < 0$, concluímos que $p_2 - p_1 > p_0 - p_1 \Rightarrow p_2 > p_0$ e $p_2 - p_1 < 0 \Rightarrow p_2 < p_1$

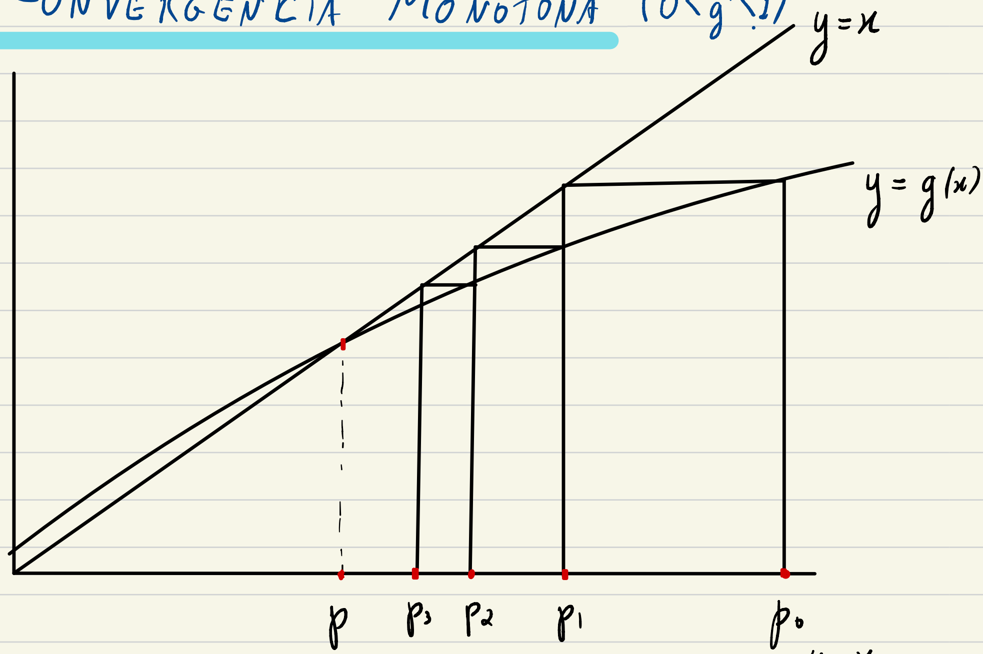
Assim, $p_0 < p_2 < p_1$. O mesmo argumento implica que $p_2 < p_3 < p_1$.

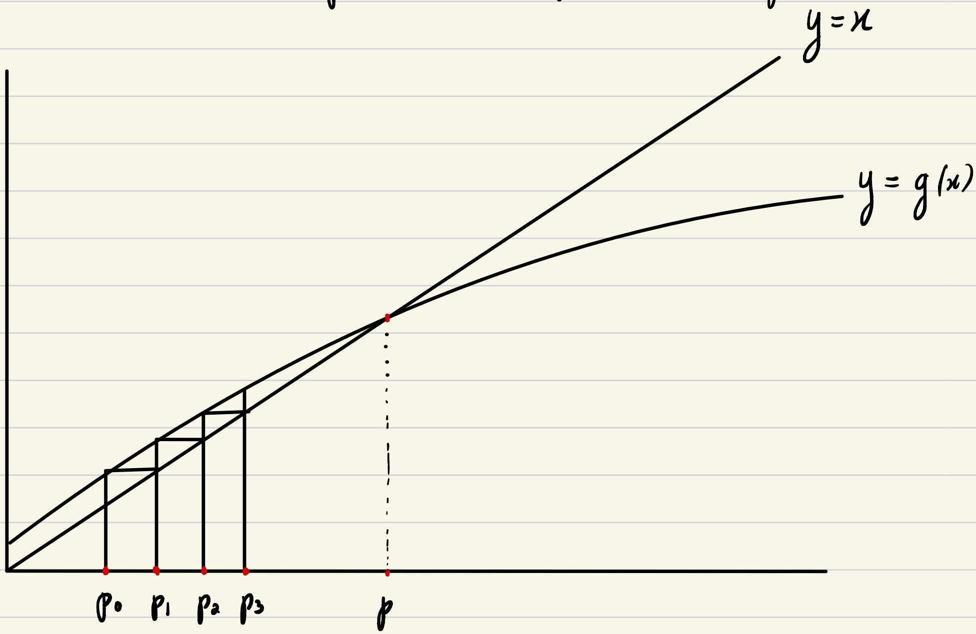
Por indução, temos $p_0 < p_2 < p_4 < \ldots < p_5 < p_3 < p_1$. É alternada!

Se $p_1 < p_0$, o mesmo argumento nos leva a $p_1 < p_3 < p_5 < \ldots < p_4 < p_2 < p_0$.

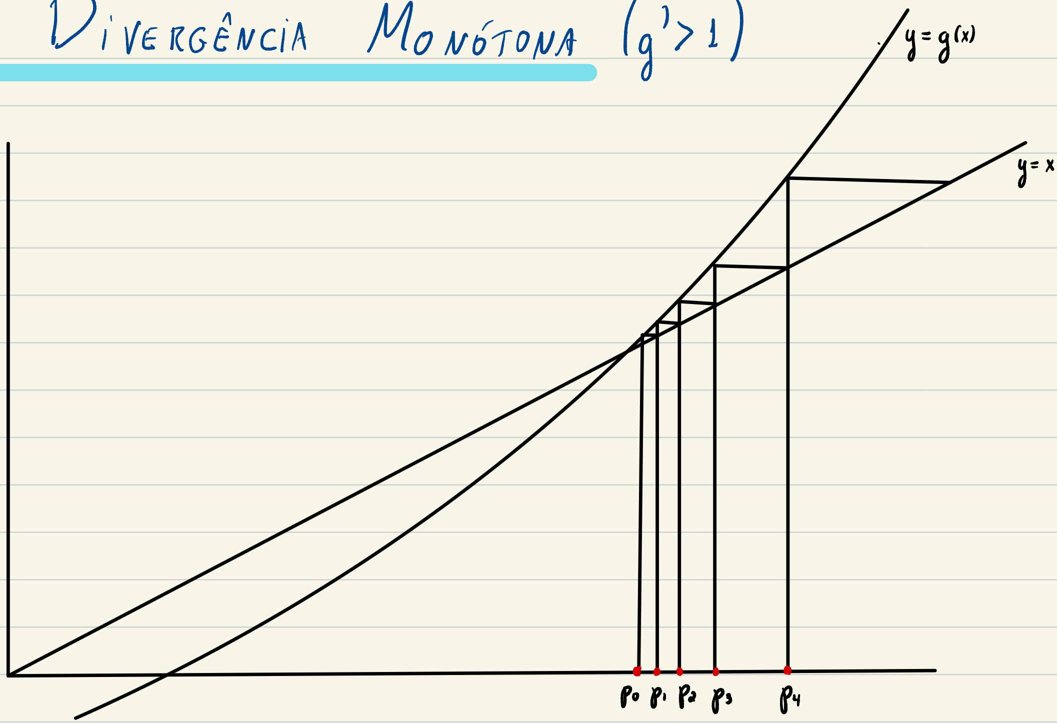
A sequência (p_n) pertence, portanto ao intervalo $J = [p_0, p_1]$, $J = [p_1, p_0]$. Como $|g'(x)| < 1$ neste intervalo e g' é contínua, temos $k := \max_{x \in J} |g'(x)| < 1$. Estamos nas condições do Teorema do ponto fixo. Assim, a sequência converge. ∎

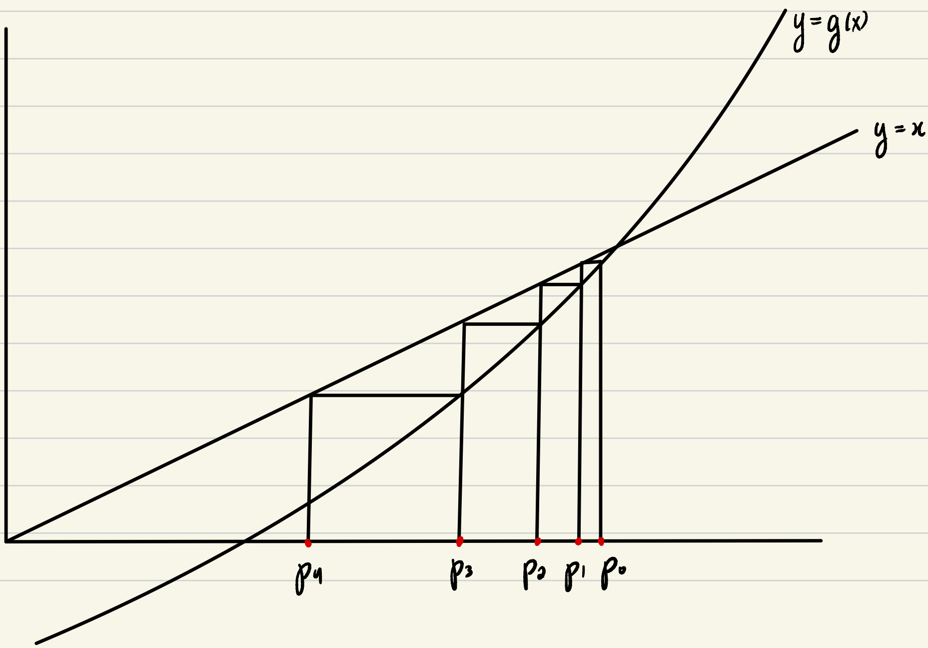
Convergência Monótona $(0<g'<1)$



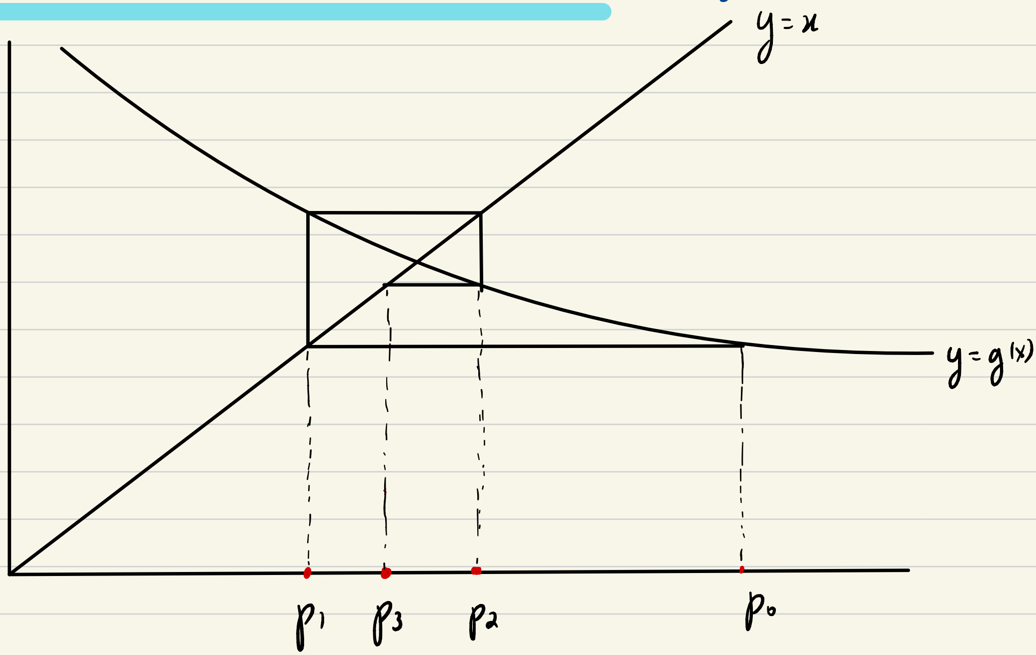


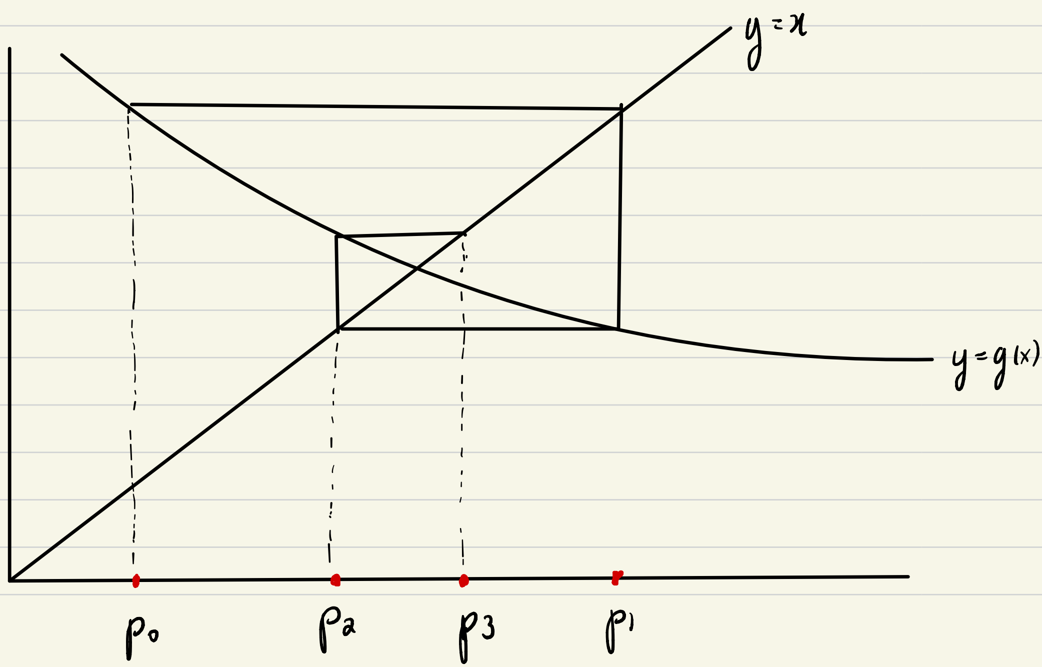
Divergência Monótona $(g' > 1)$



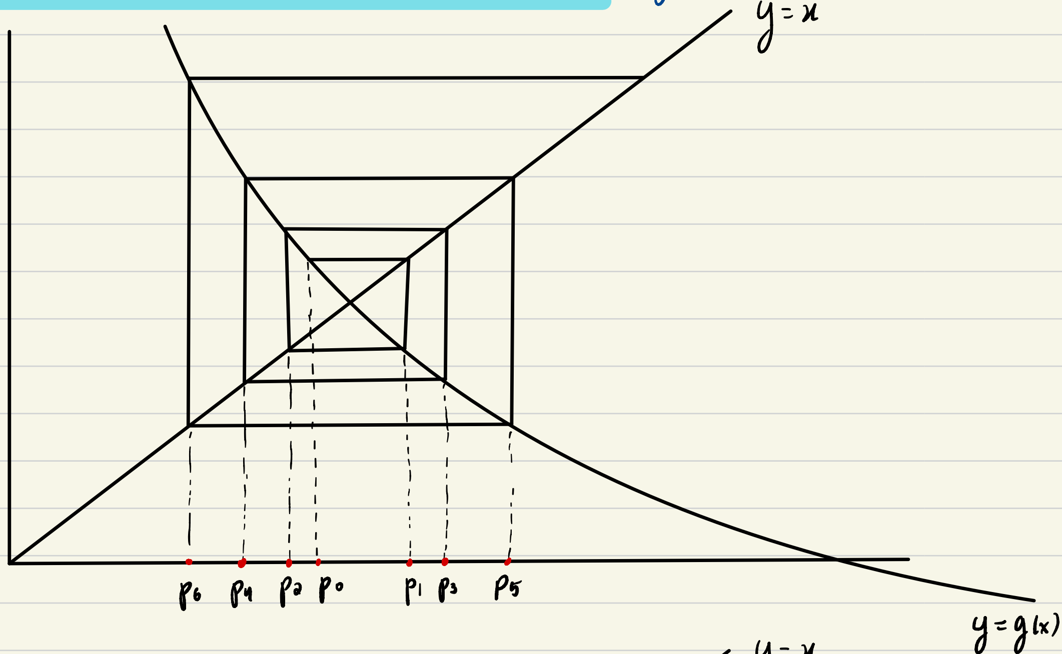


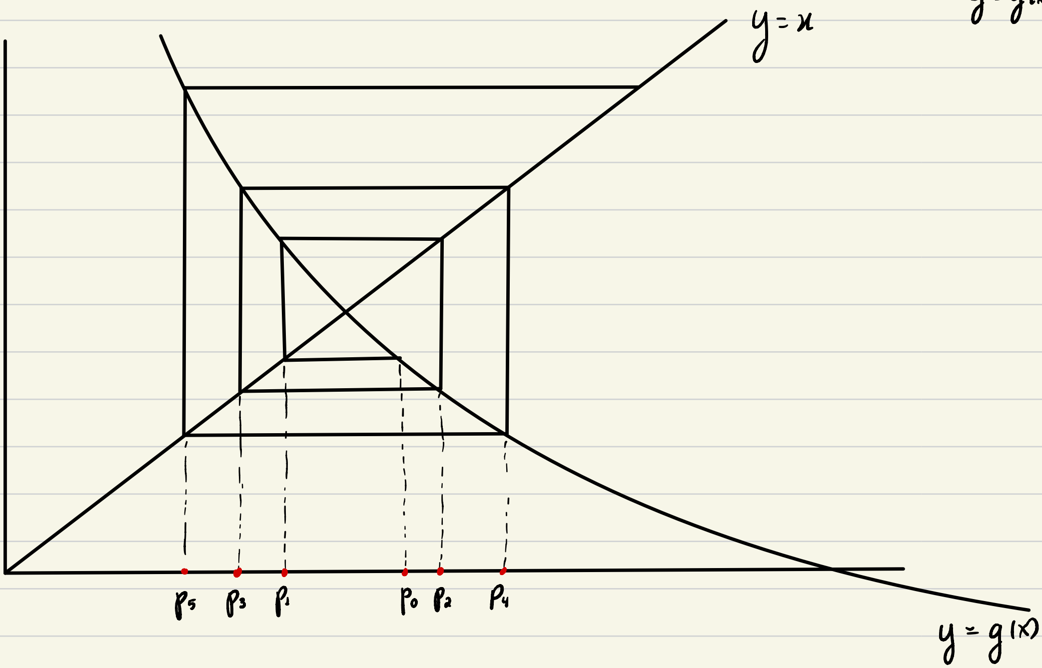
Convergência Alternada $(-1 < g' < 0)$





Divergência Alternada ($g' < -1$)





EXEMPLO: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DADO POR $g(x) = x^2$.

PONTOS FIXOS: 0 E 1

$$g'(x) = 2x \in \begin{cases}]1, \infty[, \text{ SE } x > \frac{1}{2} \\ ]-1, 1[, \text{ SE } x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ ]-\infty, -1[, \text{ SE } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

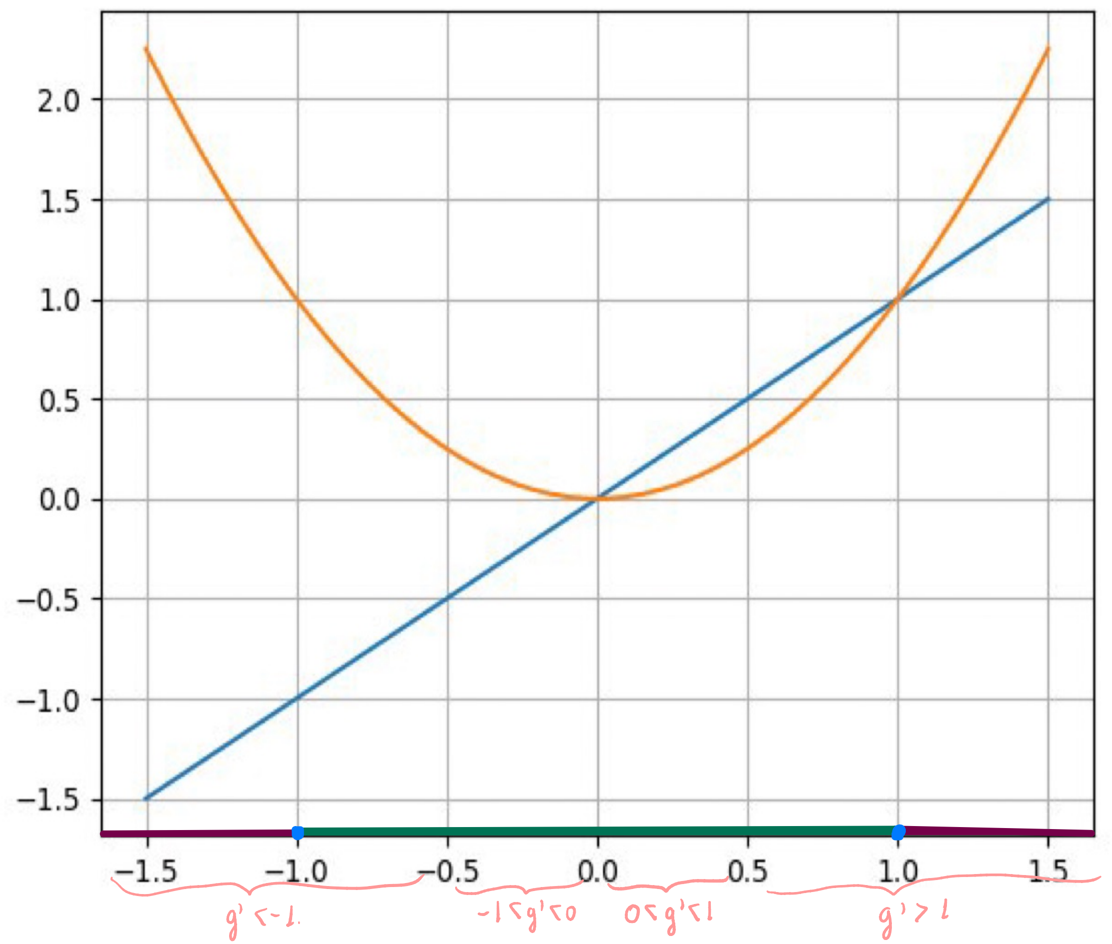
SE $p_0 > 1 \Rightarrow (p_n)$ DIVERGE

$p_0 = 1 \Rightarrow (p_n)$ CONVERGE PARA 1

$|p_0| < 1 \Rightarrow (p_n)$ CONVERGE PARA 0.

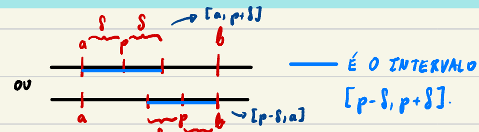
$p_0 = -1 \Rightarrow (p_n)$ CONVERGE PARA 1

$p_0 < -1 \Rightarrow (p_n)$ DIVERGE.



SEJA $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ DE CLASSE C^1 TAL QUE $k := \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$ E COM UM (ÚNICO) PONTO FIXO $p \in [a,b]$. DADO $p_0 \in [a,b]$, QUANDO É QUE A SEQUÊNCIA (p_n), $p_{n+1} = g(p_n)$, $\forall n \geq 0$, ESTÁ BEM DEFINIDA? (E, PORTANTO, CONVERGE PELO TEOREMA DO PONTO FIXO).

PROPOSIÇÃO: NAS CONDIÇÕES ACIMA:



a) SEJA $\delta := \min\{p-a, b-p\}$, ENTÃO, SE $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$, A SEQUÊNCIA (p_n) ESTÁ BEM DEFINIDA

↳ CONSEQUÊNCIA: SE p ESTÁ MAIS PRÓXIMO A a, PODEMOS ESCOLHER $p_0 = a$. SE p ESTÁ MAIS PRÓXIM A b, PODEMOS ESCOLHER $p_0 = b$.

b) SE $g'(x) \geq 0$, ENTÃO PARA TODO $p_0 \in [a,b]$ ESTÁ BEM DEFINIDA.

DEMO: a) VAMOS PROVAR POR INDUÇÃO QUE SE $p_n \in [p-\delta, p+\delta]$ PARA ALGUM $n \geq 0$, ENTÃO $g(p_n) \in [p-\delta, p+\delta] \subset [a,b]$. ISTO SEGUE DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO, POIS

$$|g(p_n) - p| = |g(p_n) - g(p)| \leq k|p_n - p| \leq k\delta < \delta.$$

b) VAMOS SUPOR QUE $p_0 > p$ ($p_0 < p$ É ANÁLOGO). VAMOS MOSTRAR POR INDUÇÃO QUE SE $p \leq p_n \leq b$, ENTÃO $g(p_n) \in [p, p_n] \subset [a,b]$. ISTO SEGUE DE

$$g(p_n) - p = g(p_n) - g(p) = g'(p + \theta(p_n - p))(p_n - p).$$

ASSIM, $g(p_n) \geq p$ (POIS $g' \geq 0$) E $g(p_n) \leq p_n$ (POIS $g' < 1$). EM PARTICULAR, TEMOS

$$p \leq \ldots \leq p_{n+1} \leq p_n \leq \ldots \leq p_0$$

OBSERVAÇÃO: $|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| \leq k|x-p| \leq |x-p| \Rightarrow p$ + PRÓXIMO DE p_{n+1} DO QUE DE p_n

EXEMPLO: $g:[1,2]\to\mathbb{R}$ DADO POR $g(x) = \dfrac{2.08}{x+0.96}$.

$g(1) = 1.0612\ldots > 1$, $g(2) = 0.702 < 2$ EXISTÊNCIA OK!

$g'(x) = -\dfrac{2.08}{(x+0.96)^2} \begin{cases} < 0 \\ > -\dfrac{2.08}{(1.96)^2} = -0.54144\ldots \end{cases}$ UNICIDADE OK!

SE $p_0 = 2$, ENTÃO $g(2) = \dfrac{2.08}{2.96} = 0.7098\ldots \notin [1,2] \Rightarrow (p_n)$ MAL DEFINIDO.

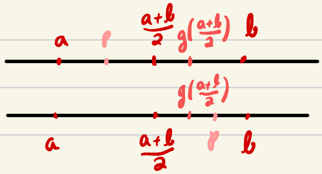
COMO SABER QUAL EXTREMIDADE, a OU b, ESTÁ MAIS PRÓXIMA DO PONTO FIXO?

PROPOSIÇÃO: SEJA $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ DE CLASSE C^1 COM PONTO FIXO E TAL QUE $k := \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$.

a) SE $g\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{a+b}{2}$, ENTÃO p ESTÁ MAIS PRÓXIMO A b DO QUE A a.

b) SE $g\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{a+b}{2}$, ENTÃO p ESTÁ MAIS PRÓXIMO A a DO QUE A b.

DEMO: a) SABEMOS QUE p ESTÁ MAIS PRÓXIMO DE $g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ DO QUE DE $\frac{a+b}{2}$. SE $g\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{a+b}{2}$ ENTÃO p TEM QUE ESTAR ENTRE $\frac{a+b}{2}$ E b. LOGO b É O PONTO MAIS PRÓXIMO DE p.



ABSURDO $g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ + LONGE DE p.

OK!

b) MESMO ARGUMENTO. ■

EXEMPLO: SE $g(x) = \dfrac{2.08}{x+0.96}$, ENTÃO $g(1.5) = 0.84\ldots < 1.5$. LOGO O PONTO FIXO ESTÁ MAIS PRÓXIMO A 1. PORTANTO, SE $p_0 = 1$, A SEQUÊNCIA (p_n) ESTÁ BEM DEFINIDA E CONVERGE.

Método com precisão préfixada

Consideremos o caso em que $p_0 > p$ ($p_0 < p$ é análogo).

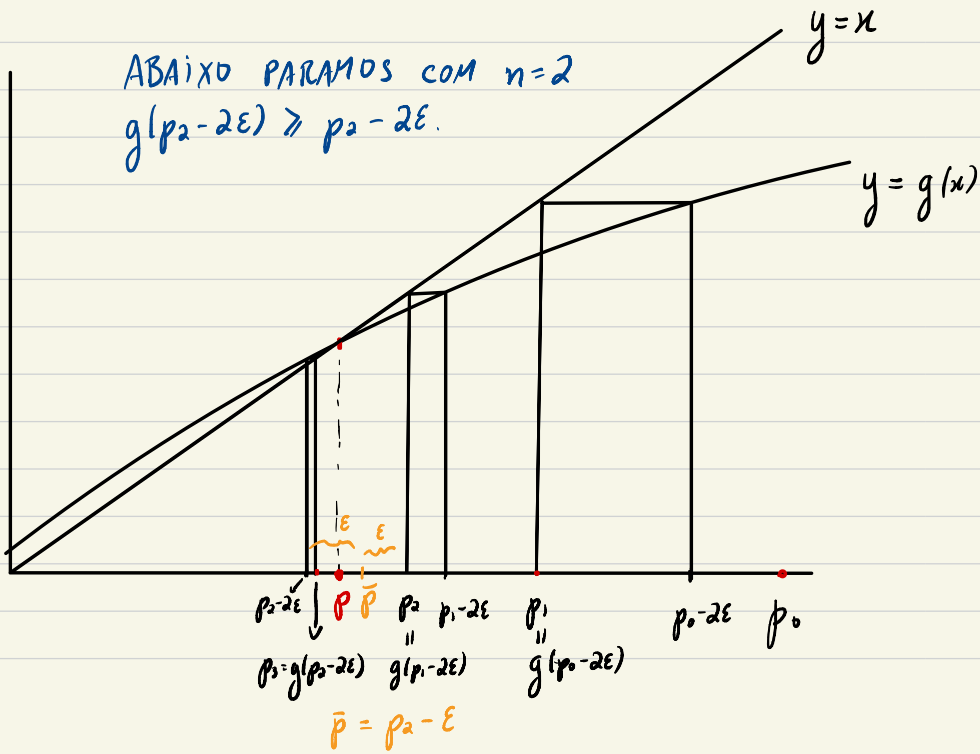
<u>Hipóteseses:</u>
- $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com ponto fixo p.
- $0 < g'(x) < 1, \ \forall x \in [a, b]$
- $\varepsilon > 0$ é tal que que $[p - 2\varepsilon, p + 2\varepsilon] \subset [a, b]$.

<u>Algoritmo:</u> Seja $p_0 > p$. Para $n \geq 0$:

i) Se $g(p_n - 2\varepsilon) \geq p_n - 2\varepsilon$. Paramos! Seja $\bar{p} := p_n - \varepsilon \Rightarrow |\bar{p} - p| \leq \varepsilon$.

ii) Se $g(p_n - 2\varepsilon) < p_n - 2\varepsilon$, então $p_{n+1} = g(p_n - 2\varepsilon)$

Abaixo paramos com $n = 2$
$g(p_2 - 2\varepsilon) \geq p_2 - 2\varepsilon$.



EXEMPLO: Queremos calcular $\sqrt{2}$. Como fazê-lo?

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^2 - 2$. Logo $\sqrt{2}$ é um zero de f.

Note que $x^2 = 2 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x - f(x) = x$

Assim, x é raiz de $f \Leftrightarrow x$ é ponto fixo de $g(x) = x - x^2 + 2$

Mas g não é boa função, pois $g'(x) = -2x + 1 < -1$, para $x > 1$.

Porém, se $a \neq 0$, então $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x - af(x) = x$.

Vamos escolher $a = \frac{1}{4}$. Logo $g(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$ e

$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}x$. Note que se $x \in [0.5, 1.5]$, então

$g'(x) \in [0.25, 0.75]$. Logo $0 < g'(x) < 1$, $\forall x \in [0.25, 1.5]$

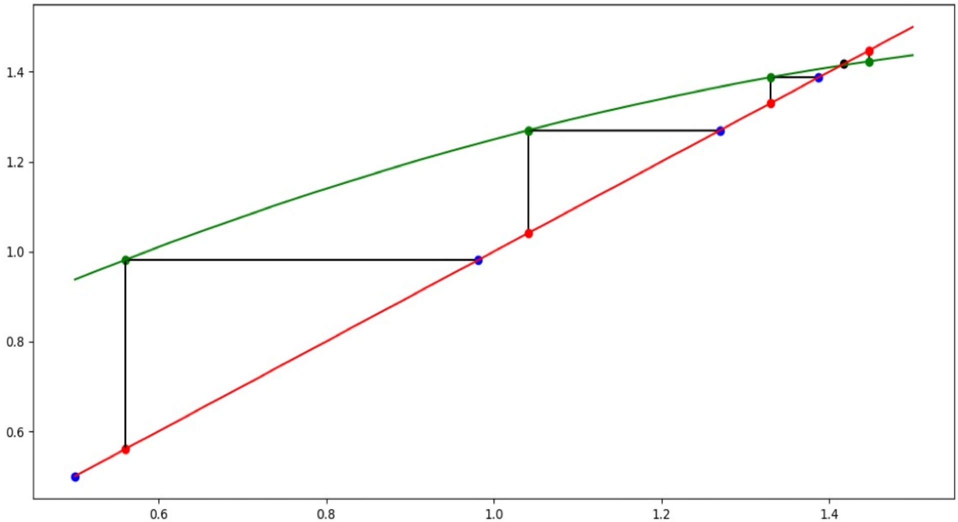
CONCLUSÃO: $\sqrt{2}$ é o único ponto fixo de $g: [0.5, 1.5] \to \mathbb{R}$.

A sequência (p_n), $p_{n+1} = g(p_n)$, converge $\forall p_0 \in [0.5, 1.5]$.

A convergência é monótona.

ESCOLHENDO $\varepsilon = 0{,}03$

n	p_n	$p_n + 2\epsilon$	$\phi(p_n + 2\epsilon) - p_n - 2\epsilon$	$\lvert p_n - \sqrt{2} \rvert$
p0	0.5	0.56	0.5416000000000001	0.9142135623730951
p1	0.9816	1.0416	0.34876736	-0.4326135623730951
p2	1.27036736	1.33036736	0.17753067186165755	-0.1438462023730951
p3	1.3878980318616576	1.4478980318616577	-0.024102177667215452	-0.026315530511437535
pfinal		1.4178980318616576		0.003684469488562492
pexato		1.4142135623730951		



Método com precisão préfixada

Consideremos o caso em que $p_0 > p$ ($p_0 < p$ é análogo).

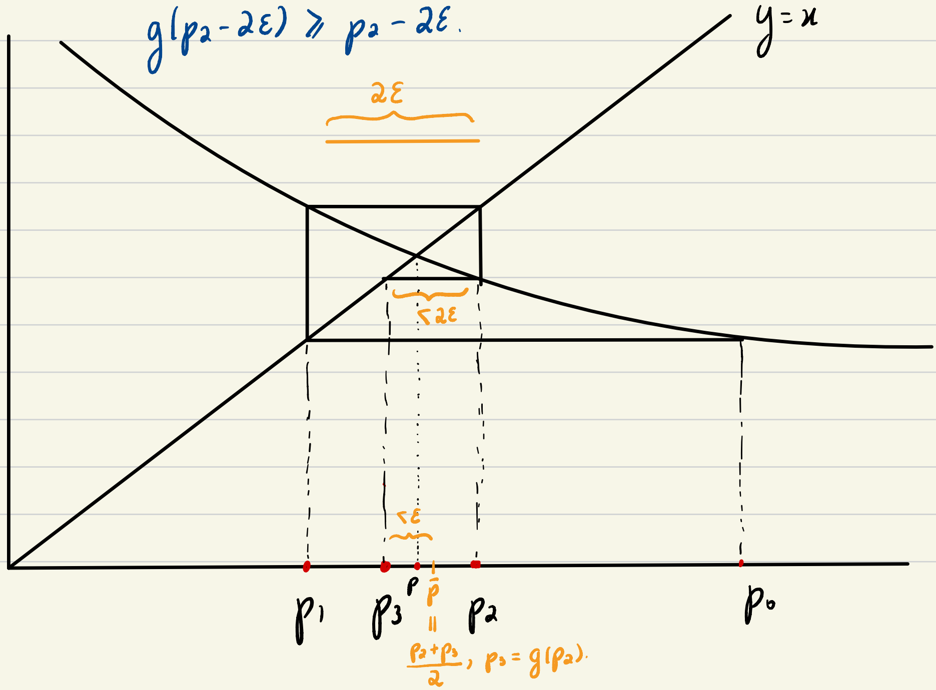
<u>Hipóteseses:</u> • $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com ponto fixo p.
• $-1 < g'(x) < 0, \ \forall x \in [a, b]$

Algoritmo: Seja p_0 tal que (p_n) esteja bem definida. Para $n \geq 0$:

i) Se $|g(p_n) - p_n| \leq 2\varepsilon$. Paramos! Seja $\bar{p} := \frac{p_n + g(p_n)}{2} \Rightarrow |\bar{p} - p| \leq \varepsilon$.

ii) Se $|g(p_n) - p_n| > 2\varepsilon$, então $p_{n+1} = g(p_n)$

Abaixo paramos com $n = 2$
$g(p_2 - 2\varepsilon) \geq p_2 - 2\varepsilon$.



EXEMPLO: Seja $p(x) = x^2 + 0.96x - 2.08$. Para achar um zero de p, podemos usar a função $\phi(x) = \frac{2.08}{x+0.96}$. De fato,

$$\phi(q) = q \Leftrightarrow \frac{2.08}{q+0.96} = q \Leftrightarrow q^2 + 0.96q = 2.08 \Leftrightarrow p(q) = 0.$$

Note que

$$\left.\begin{array}{l} \phi(0.5) = \frac{2.08}{x+0.96} = 1.4246\ldots > 0.5 \\ \phi(1.5) = 0.8455\ldots < 1.5 \end{array}\right\} \text{EXISTÊNCIA OK!}$$

$$\phi'(x) = -\frac{2.08}{(0.96+x)^2} \begin{cases} < 0 \\ > -\frac{2.08}{(0.96+0.5)^2} = -0.9757\ldots \end{cases} \neq 1 \quad \text{UNICIDADE OK!}$$

$-1 < g' < 0 \Rightarrow$ SEQUÊNCIAS ALTERNADAS.

COMO ϕ É DECRESCENTE

$$\Rightarrow \phi(x) \in [0.84, 1.43] \subset [0.5, 1.5]$$

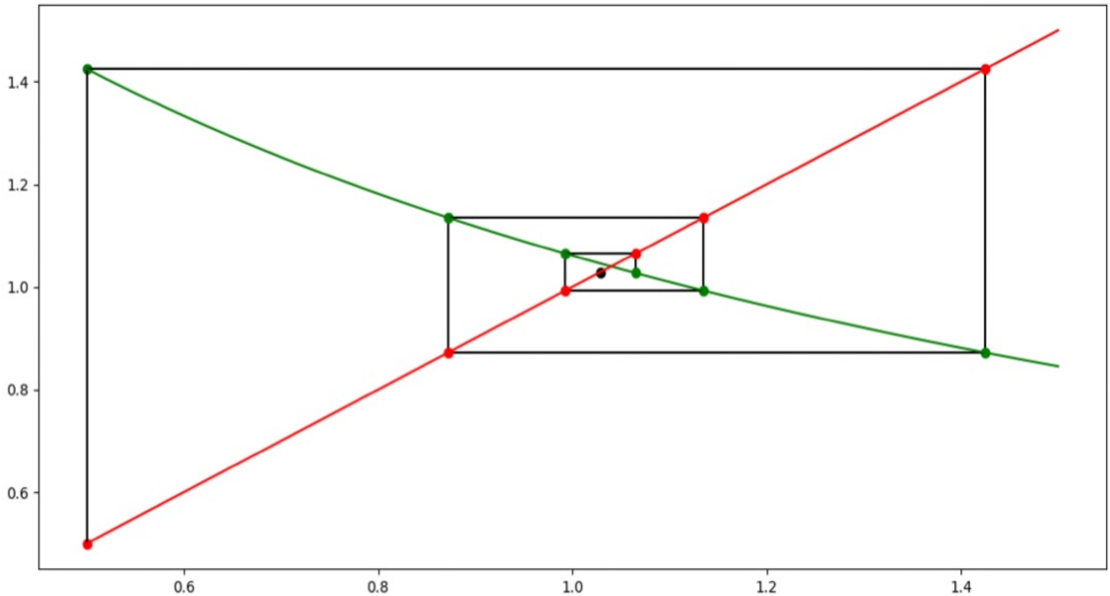
$$\Rightarrow (p_n) \text{ ESTÁ BEM DEFINIDA, } \forall p_0.$$

OBSERVAÇÃO: Aqui $a = 0.5$ e $b = 1.5$. Logo $\frac{a+b}{2} = 1$.

Como $\phi(1) = \frac{2.08}{1.96} = 1.0612\ldots > 1$, então o ponto fixo p está mais próximo a 1.5. Portanto, caso não soubéssemos que ϕ leva $[0.5, 1.5]$ em $[0.5, 1.5]$, poderíamos escolher $p_0 = 1.5$ e saberíamos que (p_n) está bem definida e converge.

ESCOLHENDO $\varepsilon = 0.04$

n	Valores obtidos
p0	0.5
p1	1.4246575342465755
p2	0.8722426470588235
p3	1.1352208198727853
p4	0.9927354578913982
pfinal	1.0289539509027747
pexato	1.04
|pfinal-pexato|	0.011046049097225286



FIM

ZERO DE FUNÇÕES

Aula 3: Convergência alternada e monótona e métodos com precisão pré-fixada

Convergência Alternada e Monótona.

Definição 1. Seja (p_n) uma sequência em $\mathbb{R}$. Dizemos que

1) A sequência é *monótona* se a condição 1 i) ou 1 ii) é satisfeita:
1 i) Para todo $n \geq 0$, temos $p_n < p_{n+1}$. Assim, $p_0 < p_1 < p_2 < ....$
1 ii) Para todo $n \geq 0$, temos $p_{n+1} < p_n$. Assim, $... < p_2 < p_1 < p_0$.

2) A sequência é *alternada* se uma das condições abaixo são satisfeitas:
2 i) Para todo $n \geq 0$, temos $p_{2n} < p_{2n+2} < ... < p_{2n+3} < p_{2n+1}$. Assim, $p_0 < p_2 < ... < p_3 < p_1$.
2 ii) Para todo $n \geq 0$, temos $p_{2n+1} < p_{2n+3} < ... < p_{2n+2} < p_{2n}$. Assim, $p_1 < p_3 < ... < p_2 < p_0$.
2 iii) Para todo $n \geq 0$, temos $p_{2n+2} < p_{2n} < ... < p_{2n+1} < p_{2n+3}$. Assim, $p_2 < p_0 < ... < p_1 < p_3$.
2 iv) Para todo $n \geq 0$, temos $p_{2n+3} < p_{2n+1} < ... < p_{2n} < p_{2n+2}$. Assim, $p_3 < p_1 < ... < p_0 < p_2$.

Proposição 2. *Seja $g : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que pode ser ilimitado. Seja $p_0 \in I$ e (p_n) a sequência definida como $p_{n+1} = g(p_n)$, $n \geq 0$. Se a sequência está bem definida, então*

i) Se $g'(x) > 1$, $\forall x \in I$, então a sequência é monótona e diverge.

ii) Se $0 < g'(x) < 1$, $\forall x \in I$, e $I = [a, b]$ é um intervalo fechado e limitado, então a sequência é monótona e converge. Em particular, temos

$$p_0 < p_1 < ... < p_n < p_{n+1} < ... < p$$

ou

$$p < ... < p_{n+1} < p_n < ... < p_1 < p_0.$$

iii) Se $g'(x) < -1$, $\forall x \in I$, então a sequência é alternada e diverge.

iv) Se $-1 < g'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então a sequência é alternada e converge. Em particular, temos

$$p_0 < p_2 < ... < p_{2n} < p_{2n+2} < ... < p < ... < p_{2n+3} < p_{2n+1} < ... < p_3 < p_1$$

ou

$$p_1 < p_3 < ... < p_{2n+1} < p_{2n+3} < ... < p < ... < p_{2n+2} < p_{2n} < ... < p_2 < p_0.$$

Proposição 3. *Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $k := \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$. Suponha que g tenha um ponto fixo $p \in [a, b]$ (ele é único, pois $g'(x) \neq 1$, para todo $x \in [a, b]$).*

a) Seja $\delta := \min \{p - a, b - p\}$, então se $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$, a sequência (p_n) dada por $p_{n+1} = g(p_n)$, $n \geq 0$, está bem definida (e, portanto, converge pelo teorema do ponto fixo).

b) Se $g'(x) \geq 0$, então para todo $p_0 \in [a, b]$, a sequência (p_n) dada por $p_{n+1} = g(p_n)$, $n \geq 0$, está bem definida (e converge).

Observação 4. Nas condições da Proposição 3, vemos que se $x \in [a, b]$, então p sempre está mais próximo de $g(x)$ do que de x (a não ser quando $p = x$). De fato, pelo teorema do valor médio, temos

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| \leq k |x - p| < |x - p| .$$

Em particular, se a sequência (p_n), $p_{n+1} = g(p_n)$, $\forall n \geq 0$, estiver bem definida, p_{n+1} sempre será uma aproximação melhor de p do que p_n (a não ser quando $p_n = p$).

Observação 5. Pelo que vimos acima, se a sequência é monótona, então qualquer escolha de p_0 nos leva a uma sequência bem definida. Se a sequência for alternada, podemos ter problemas. No entanto, pelo item a), se escolhermos p_0 como o ponto a ou b que esteja mais próximo do ponto fixo p, então a sequência estará bem definida e convergirá. Isto ocorre, pois, se p está mais próximo de a do que de b, então então $a \in [p-\delta, p+\delta]$, pois $p-\delta = a$. Por outro lado, se p está mais próximo de b do que de a, então $b \in [p-\delta, p+\delta]$, pois $p+\delta = b$. Como saber qual extremidade, a ou b, está mais próxima do ponto fixo? Podemos usar a proposição abaixo.

Proposição 6. *Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $k := \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$. Suponha que g tenha um (único) ponto fixo $p \in [a,b]$.*
i) Se $g(\frac{a+b}{2}) > \frac{a+b}{2}$, então p está mais próximo de b que do que a.
ii) Se $g(\frac{a+b}{2}) < \frac{a+b}{2}$, então p está mais próximo de a que do que b.

Métodos com precisão pré-fixada. Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com um único ponto fixo p.

Método de ponto fixo com precisão pré-fixada com convergência monótona $(0 < g' < 1)$:

Seja p o ponto fixo. Seja $\epsilon > 0$ tal que $[p-2\epsilon, p+2\epsilon] \subset [a,b]$ e $p_0 > p$ (o caso $p_0 < p$ é análogo)

Para $n \geq 0$:

i) Se $g(p_n - 2\epsilon) \geq p_n - 2\epsilon$, então paramos o método e $p_n - \epsilon$ é uma aproximação do ponto fixo p com erro $\leq \epsilon$.

ii) Se $g(p_n - 2\epsilon) < p_n - 2\epsilon$, então $p_{n+1} = g(p_n - 2\epsilon)$.

Método de ponto fixo com precisão pré-fixada com convergência alternada $(-1 < g' < 0)$:

Seja p o ponto fixo. Vamos escolher $p_0 \in [a,b]$ tal que a sequência (p_n), $p_{n+1} = g(p_n)$, $\forall n \geq 0$, esteja bem definida.

Para $n \geq 0$:

i) Se $|g(p_n) - p_n| \leq 2\epsilon$, então paramos o método e $\frac{p_n + g(p_n)}{2}$ é uma aproximação do ponto fixo p com erro $\leq \epsilon$.

ii) Se $|g(p_n) - p_n| > 2\epsilon$, então $p_{n+1} = g(p_n)$.