Matemática – a Linguagem da Física I

Física I – Módulo I – Noções Básicas

Embora as regras da Matemática sempre nos levem a declarações corretas ...

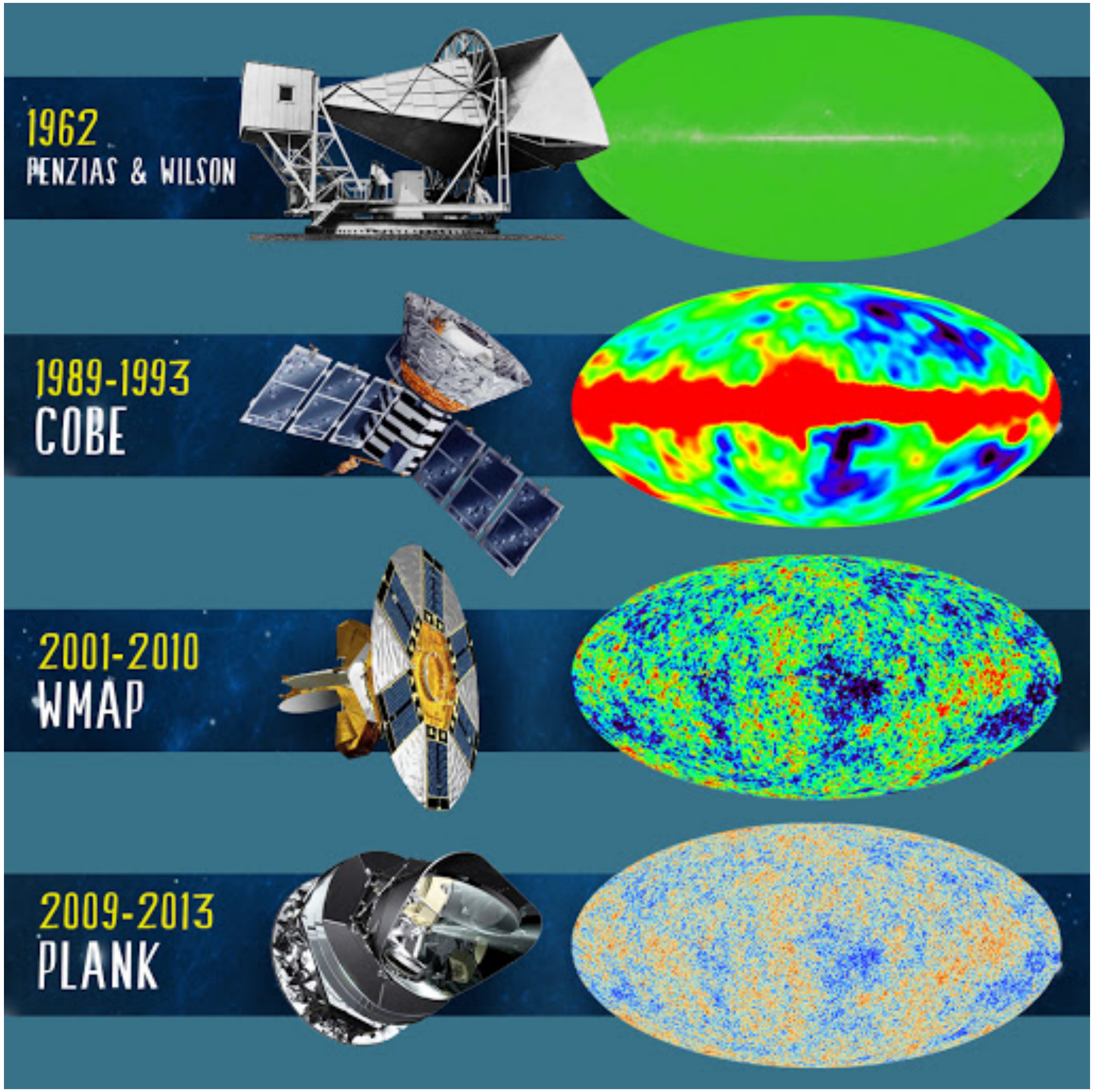
As afirmações que fazemos sobre a natureza (e que permitem a formulação Matemática) não são verdades matemática!

São questões experimentais

Medidas são a base da Física e logo a Geometria tem um papel muito importante para nós

Qual a geometria que melhor descreve o mundo ?

Geometria do Universo



radiação cósmica de fundo

$T \approx 3$ K

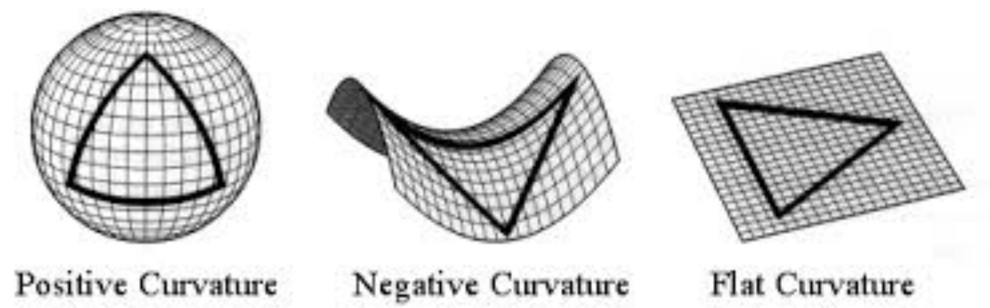
1ª evidência da homogeneidade e isotropia

em larga escala é isotrópico & homogêneo em 1 parte em 10^5

curvatura constante

Geometria do Universo

3 classes de geometrias segundo Riemann



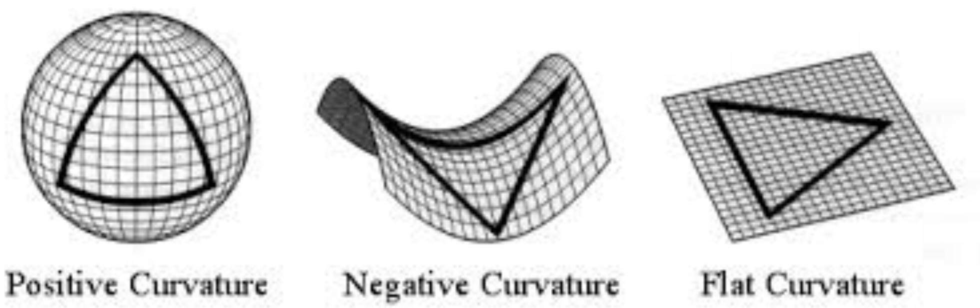
ângulos internos de triângulos somam mais do que π

linhas paralelas eventualmente se cruzam

curvatura positiva - Espaço Esférico

Geometria do Universo

3 classes de geometrias Riemannianas



ângulos internos de triângulos somam menos do que π

linhas paralelas divergem

curvatura negativa - Espaço Hiperbólico

Geometria do Universo

3 classes de geometrias Riemannianas

ângulos internos de triângulos somam π

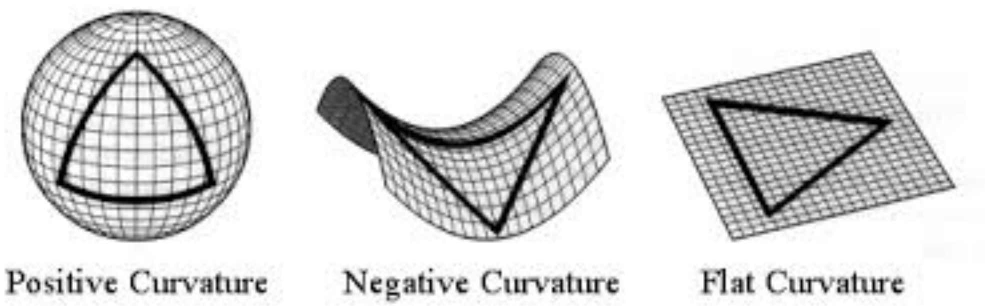
linhas paralelas nunca se encontram

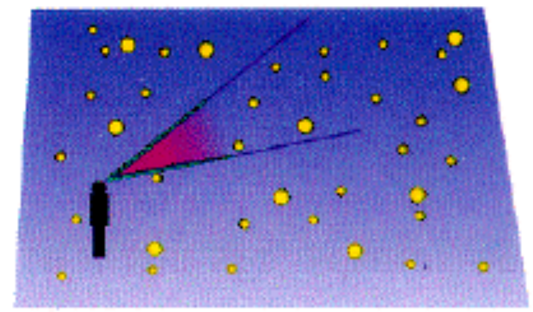
curvatura nula - Espaço Euclidiano

Geometria do Universo

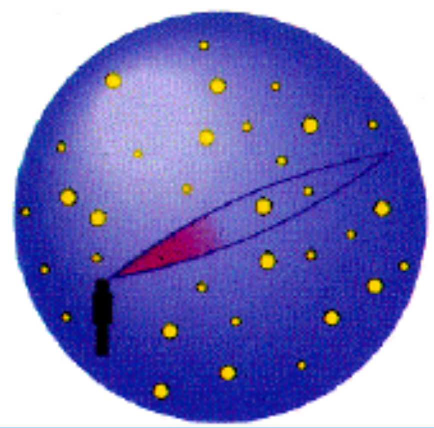
Espaço Plano

Universo Expande para Sempre





Plano



Curvatura Positiva

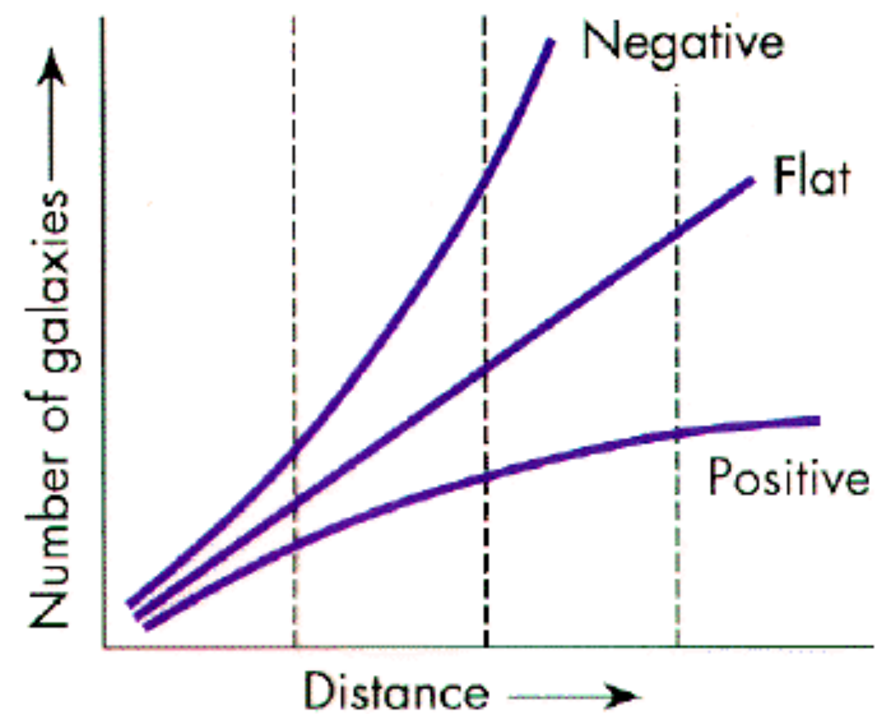
Espaço Esférico

Universo Expande e Colapsa Novamente

Curvatura Negativa

Espaço Hiperbólico

Universo Expande para Sempre



Geometria do Universo

Note que essas observações dizem respeito ao raio de curvatura médio

Não são sensíveis às perturbações que ocorrem nas vizinhanças imediatas de objetos extremamente massivos (planetas, estrela, buracos negros etc.) que sabemos contribuem para a curvatura do espaço(-tempo) com previsto pela Teoria da Relatividade Geral

Diversos experimentos em escalas que vão da sub-atômica até astronômica e cosmológica trazem evidências que a Geometria Euclidiana é uma ótima aproximação para a grande maioria das aplicações

Vamos então admitir a Geometria Euclidiana como experimentalmente válida para descrever o mundo Físico

Consequências do Espaço Euclidiano

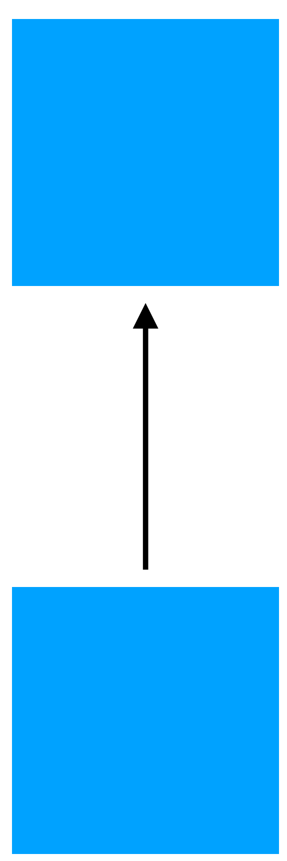
- Invariância por translação (ou Simetria de translação)

todos os pontos do espaço são equivalentes = o espaço é homogêneo

Consequências do Espaço Euclidiano

- Invariância por translação (ou Simetria de translação)

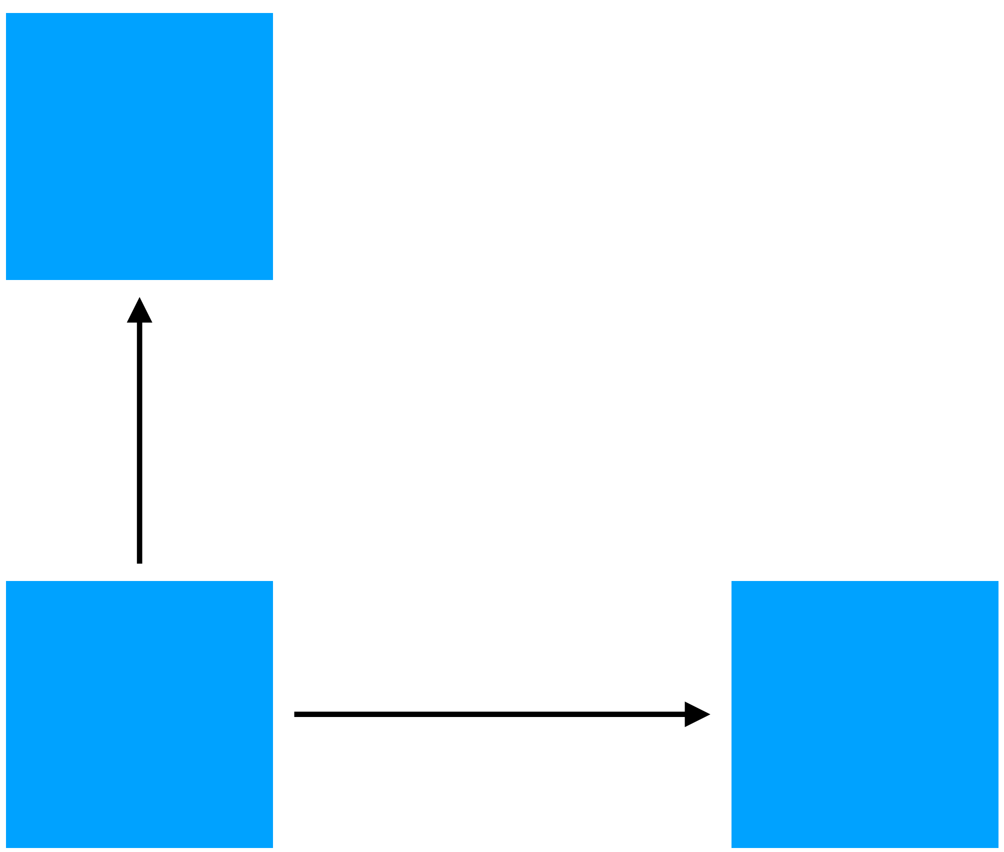
todos os pontos do espaço são equivalentes = o espaço é homogêneo



Consequências do Espaço Euclidiano

- Invariância por translação (ou Simetria de translação)

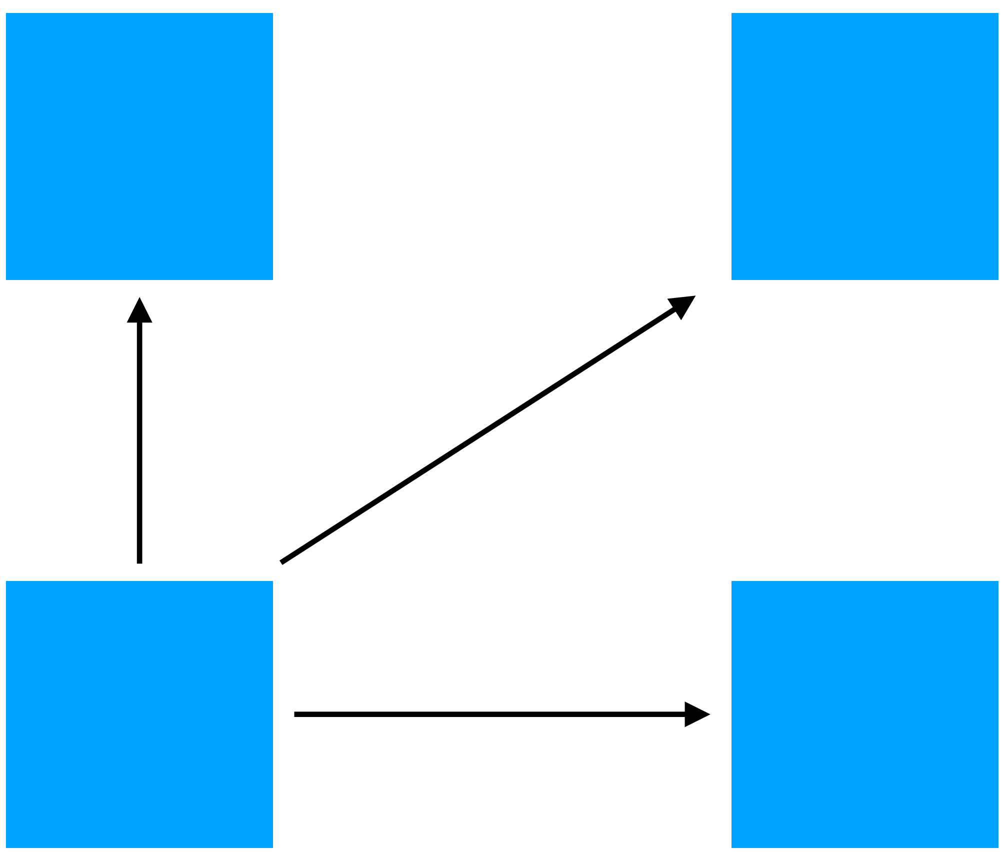
todos os pontos do espaço são equivalentes = o espaço é homogêneo



Consequências do Espaço Euclidiano

- Invariância por translação (ou Simetria de translação)

todos os pontos do espaço são equivalentes = o espaço é homogêneo

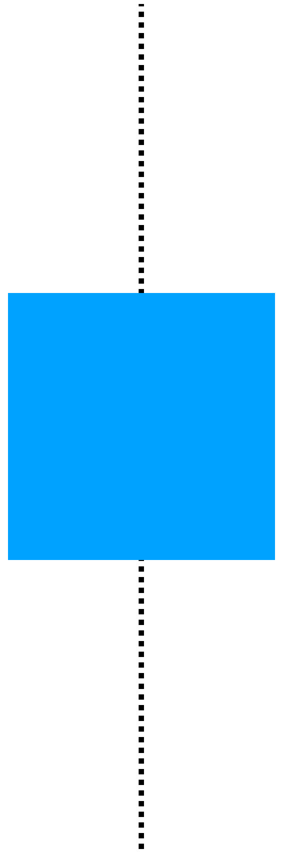


forma e tamanho não mudam

Consequências do Espaço Euclidiano

- Invariância por rotação (ou Simetria de rotação)

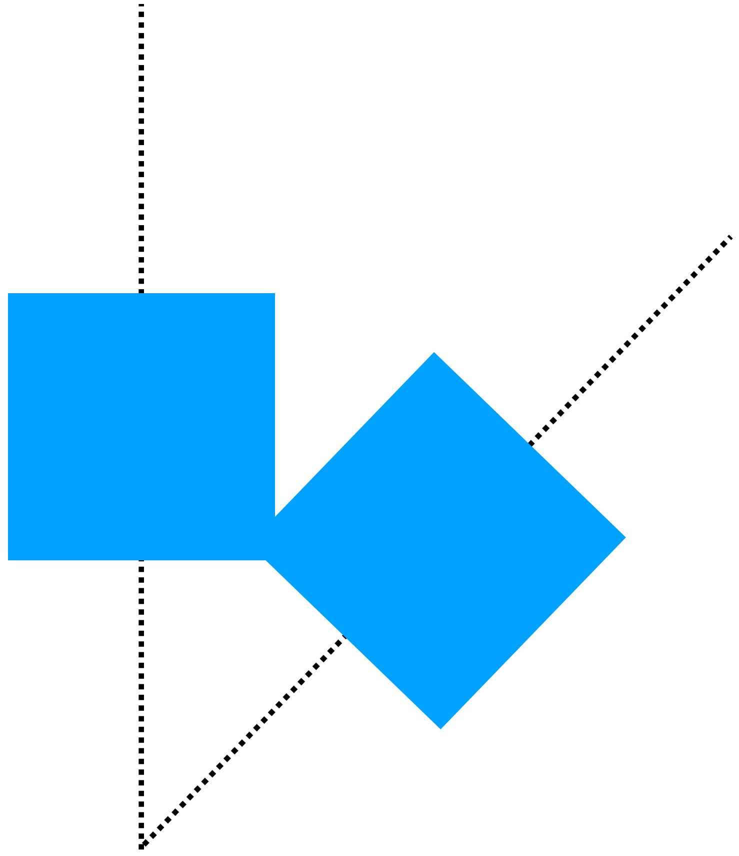
todas as direções do espaço são equivalentes = o espaço é isotrópico



Consequências do Espaço Euclidiano

- Invariância por rotação (ou Simetria de rotação)

todas as direções do espaço são equivalentes = o espaço é isotrópico



forma e tamanho não mudam

O que é Simetria ?

Simetria é a invariância de um objeto ou sistema a uma mudança (transformação)

"Eu tenho dois objetivos: por um lado clarificar, passo a passo, o significado filosófico-matemático da idéia de simetria e, por outro lado, mostrar a grande variedade de aplicações da simetria nas artes, na natureza orgânica e inorgânica."

(Hermann Weyl)

"Simetrias são fascinantes para a mente humana; todo mundo gosta de objetos ou padrões que apresentam graus de simetria...mas nós estamos interessados nas simetrias que existem nas leis básicas da Física."

(Richard Feynman)

Formalmente

Simetria está ligada à idéia de Grupo

(conceito matemático introduzido por Galois em 1832)

Um objeto (sistema) A é invariante sob uma transformação g se

g A = A (não muda!)

O conjunto de transformações {g} que deixa A invariante constituem um grupo de simetria G

O conceito de grupo de simetria não diz respeito apenas a objetos (sistemas) individuais mas também a suas relações

Uma relação é dita invariante se

$$\forall g \in G$$

$g\,A_i = A_i$

$f\,(A_1, A_2, \ldots) = 0 \quad \Rightarrow \quad f\,(gA_1, gA_2, \ldots) = 0$

G é um grupo de simetria para essa relação

Simetrias na Física

Desde Galileo (1632) sabemos que as leis da Mecânica são as mesmas (invariantes) por transformações de coordenadas entre referenciais inerciais : translações, rotações e "boosts" (impulso) não alteram a forma das leis da Física!

Principio de Relatividade de Galileo

Einstein estendeu esse Principio para toda a Física e por essa razão teve que generalizar a Mecânica de Newton

Qualquer equação que descreve uma lei Física deve exibir essas simetrias !

De fato é a existência dessas simetrias que leva às leis de conservação do momento linear, da energia, do momento angular etc. (1905, Emmy Noether)

Simetrias na Física

"Para toda simetria contínua de uma lei Física existe uma lei de conservação correspondente. Para toda lei de conservação há uma simetria contínua correspondente" (Teorema matemático de Emmy Noether)

Há muitas outras leis de conservação e simetrias na Física :
a conservação da carga elétrica em todas as reações, por exemplo, está ligada a um tipo de simetria da Natureza denominada simetria de gauge (ou de calibre). Essa é uma simetria abstrata que não envolve espaço ou tempo. Simetrias desse tipo parecem governar as interações da Natureza!

O fato que simetrias parecem controlar a Natureza de forma fundamental é talvez a lição mais importante do século XX !

Notação Covariante

A validade da geometria Euclidiana tem como consequência:
invariância por translação & rotação

As Leis da Física (até onde sabemos) são as mesmas sob translação e rotação dos eixos do sistema de coordenadas

Essas simetrias das Leis Físicas são tão importantes que vamos usar uma técnica matemática para explorar essas propriedades: deixar as equações que definem as Leis Físicas explicitamente invariantes sob essas transformações
i.e. tendo a mesma forma sob transformações de translação e rotação (covariantes)

Análise Vetorial $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{notação compacta} \\ \textbf{sem necessidade de uso de sistema de coordenadas} \end{array} \right.$

Grandezas Escalares e Vetoriais

Do ponto de vista das transformações (translação e rotação) existem 2 tipos de grandezas Físicas : escalares e vetoriais★

Escalares

definidas por um único número (real) que é o mesmo (invariante) em quaisquer 2 sistemas de referência S e S' (transladados ou rodados)

ex: comprimento, temperatura, volume, massa etc.

Note que a coordenada x de um ponto P não é um escalar (mesmo em 1D!) Por quê?

★ de fato muito mais - existem tensores de várias ordens

Grandezas Escalares e Vetoriais

Do ponto de vista das transformações (translação e rotação) existem 2 tipos de grandezas Físicas : escalares e vetoriais★

Vetores

são objetos geométricos independentes do sistema de coordenadas

Podem ser vistos como um segmento de linha direcionado

São quantidades com: magnitude, direção e sentido

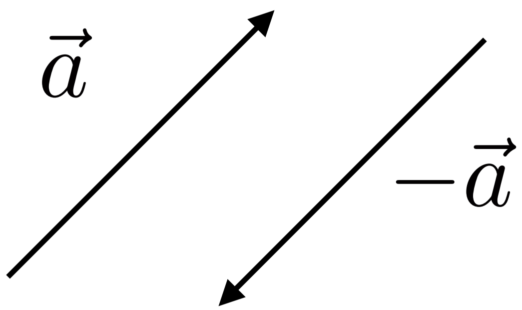
ex: deslocamentos, velocidade, aceleração, força etc.

Veremos mais tarde que nem tudo que tem magnitude, direção e sentido é um vetor !

★ de fato muito mais - existem tensores de várias ordens

Vetores

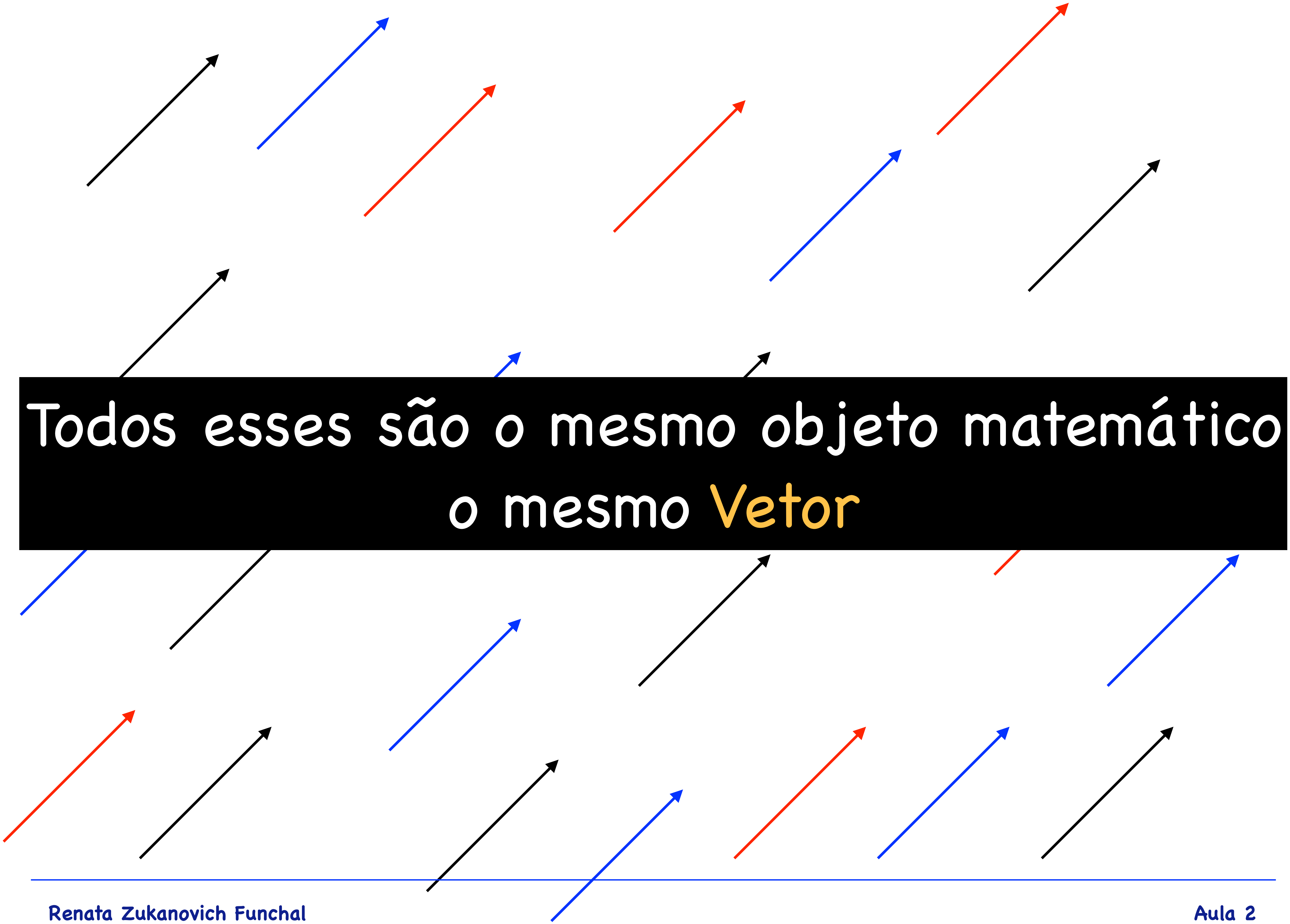
Representação



para descrever um vetor precisamos especificar um comprimento (magnitude ou módulo) e uma direção e sentido

translação paralela (transporte paralelo) não muda um vetor (Espaço Euclidiano)

$\Longrightarrow \vec{a} = \vec{b}$ se tiverem o mesmo módulo, direção e sentido

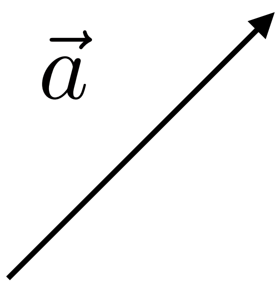


Todos esses são o mesmo objeto matemático
o mesmo Vetor

Vetores

o comprimento de um vetor (módulo ou magnitude) é um escalar que identificamos por barras verticais (ou simplesmente sem a flecha)

$\vec{a}$



$$|\vec{a}| = a$$

se o módulo de um vetor for 1 chamamos esse vetor de unitário ou versor

designamos o versor paralelo a $\vec{a}$ por

$$\hat{a} \equiv \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{a} \qquad \Longrightarrow \vec{a} = a\,\hat{a}$$

Vetores

Propriedades Básicas (Algumas)

- **Multiplicação de um vetor por um escalar**

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{c} = \alpha \vec{a}$

$$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{\alpha \vec{a}}{|\alpha \vec{a}|} = \frac{\alpha \vec{a}}{\alpha |\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{a} = \hat{a}$$

$\alpha > 0$ **é um vetor paralelo a** $\vec{a}$ **com módulo** $\alpha\, a$

$\alpha < 0$ **é um vetor antiparalelo a** $\vec{a}$ **com módulo** $\alpha\, a$

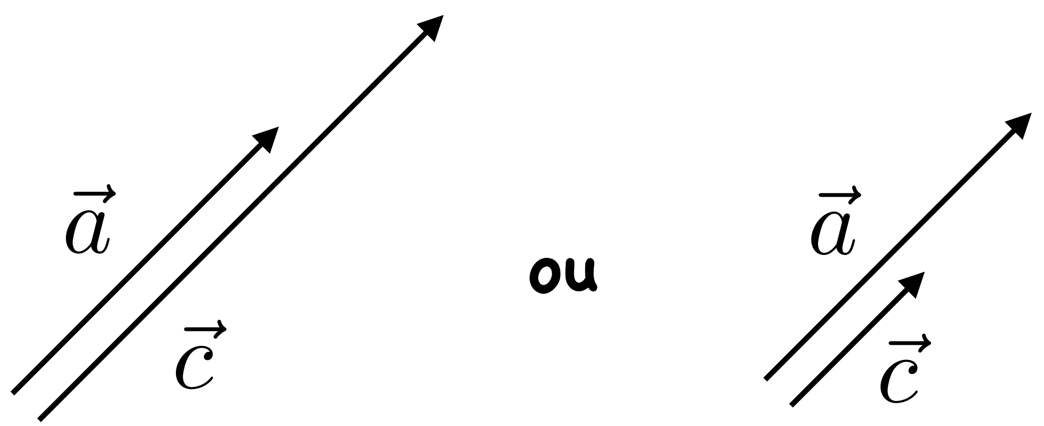
Vetores

Propriedades Básicas (Algumas)

- **Multiplicação de um vetor por um escalar**

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{c} = \alpha \vec{a}$



$\alpha > 0$ **é um vetor paralelo a** $\vec{a}$ **com módulo** $\alpha\, a$

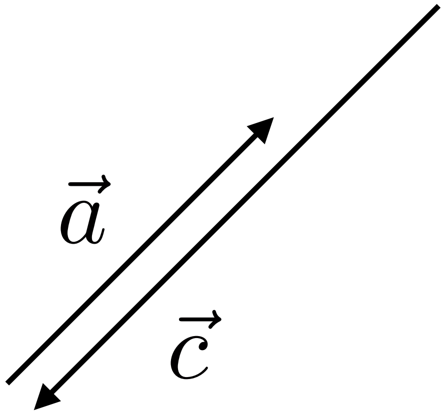
Vetores

Propriedades Básicas (Algumas)

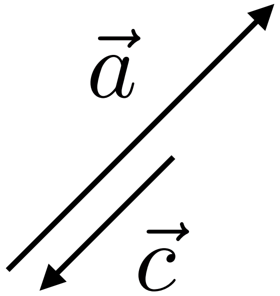
- **Multiplicação de um vetor por um escalar**

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{c} = \alpha \vec{a}$



ou

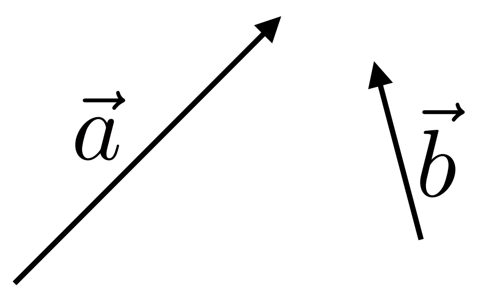


$\alpha < 0$ **é um vetor antiparalelo a** $\vec{a}$ **com módulo** $\alpha\, a$

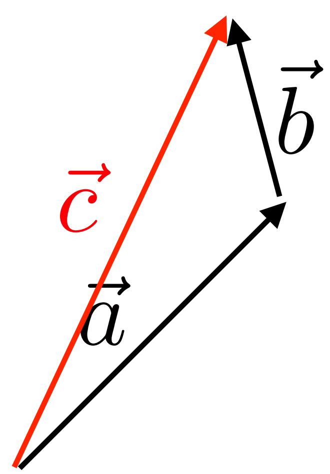
Vetores

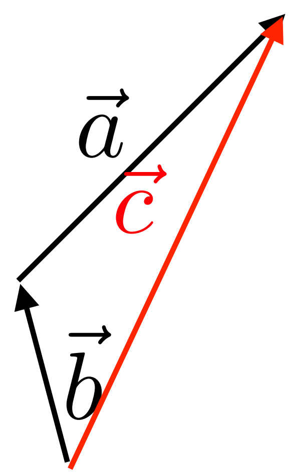
- **Adição (ou Subtração) de vetores**

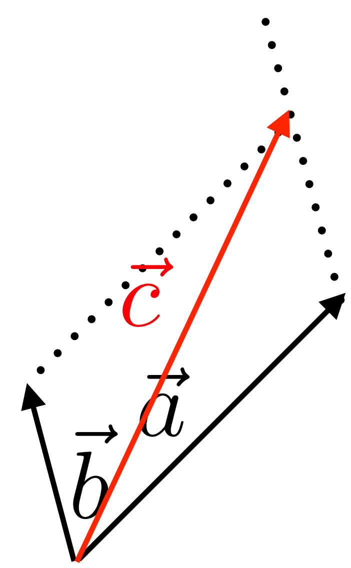
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{c} \qquad \textbf{(comutativa)}$$



todos equivalentes







Claramente

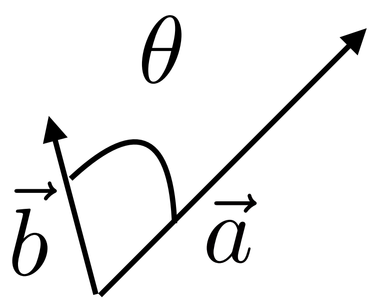
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0 \quad \textbf{vetor nulo}$$

Também é associativa (Mostre!)

Vetores

- **Produto Escalar de 2 vetores**

é um escalar



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta = a\,b\,\cos\theta$$

$a\,\cos\theta$ **é a projeção de** $\vec{a}$ **na direção de** $\vec{b}$

$b\,\cos\theta$ **é a projeção de** $\vec{b}$ **na direção de** $\vec{a}$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

ângulo entre os vetores

se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **então**

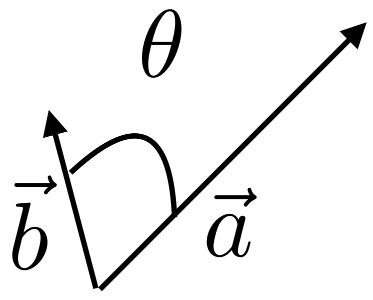
ou $|\vec{a}| = 0$ **(vetor nulo)**

ou $|\vec{b}| = 0$ **(vetor nulo)**

ou $\cos\theta = 0$ $\quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \therefore \vec{a} \perp \vec{b}$

Vetores

- **Produto Escalar de 2 vetores**



é um escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta = a\,b\,\cos\theta$$

$a\,\cos\theta$ **é a projeção de** $\vec{a}$ **na direção de** $\vec{b}$

$b\,\cos\theta$ **é a projeção de** $\vec{b}$ **na direção de** $\vec{a}$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

ângulo entre os vetores

Note que

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$$

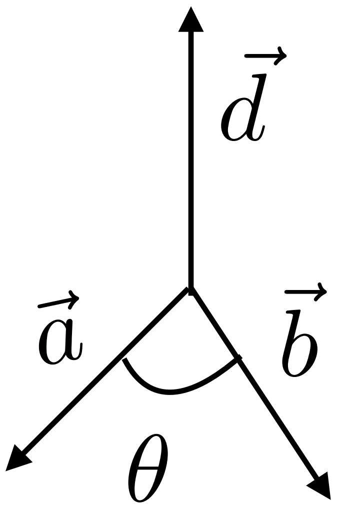
O produto escalar é distributivo (Mostre!)

i.e $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

Vetores

- **Produto Vetorial de 2 vetores**

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$$



$$|\vec{d}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta = a\, b\, \sin\theta$$

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \qquad \vec{a} \times \vec{a} = 0$$

regra da mão direita

o produto vetorial é nulo para

$\theta = 0,\ \theta = \pi$ **ou** $\vec{a} \parallel \vec{b}$ **ou** $\vec{a} \parallel -\vec{b}$

Definimos Vetores e suas Propriedades sem fazer uso de Sistema de Coordenadas

Na prática muitas vezes é útil definir um sistema de coordenadas específico ....

Sistemas de Coordenadas

úteis para descrever e resolver problemas em Física

O ponto aqui : escolher aquele que for mais adequado para um determinado problema, explorando vínculos & simetrias

IDEIA GERAL

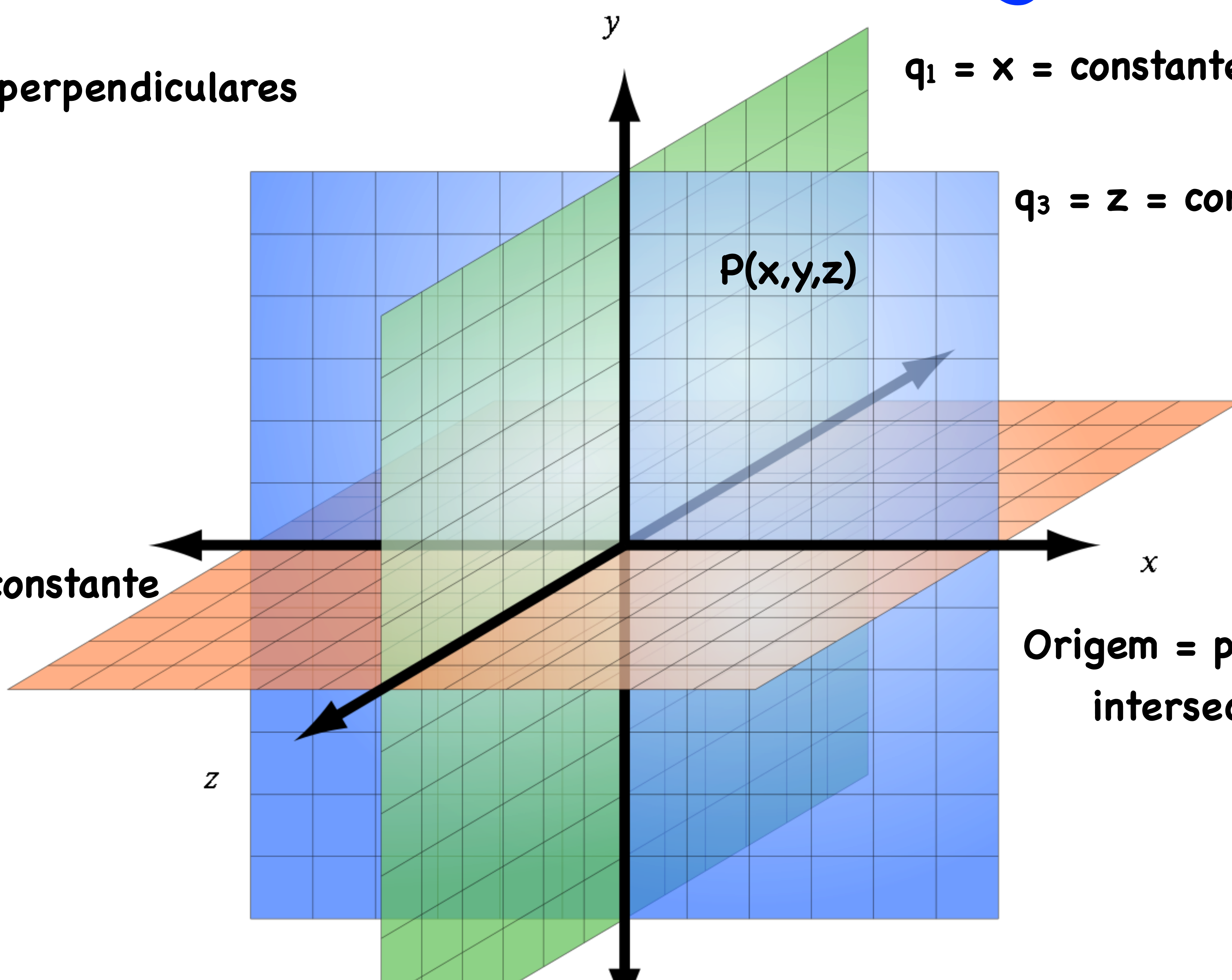
um ponto P no espaço pode ser descrito como a intersecção de três famílias de superfícies (que consideraremos mutualmente perpendiculares)

$$q_1 = \text{const.} \quad q_2 = \text{const.} \quad q_3 = \text{const.}$$

$$P \equiv (q_{1P}, q_{2P}, q_{3P})$$

3D $\longrightarrow$ 2D $\longrightarrow$ 1D

Sistema de Coordenadas Cartesiano ou Retangular

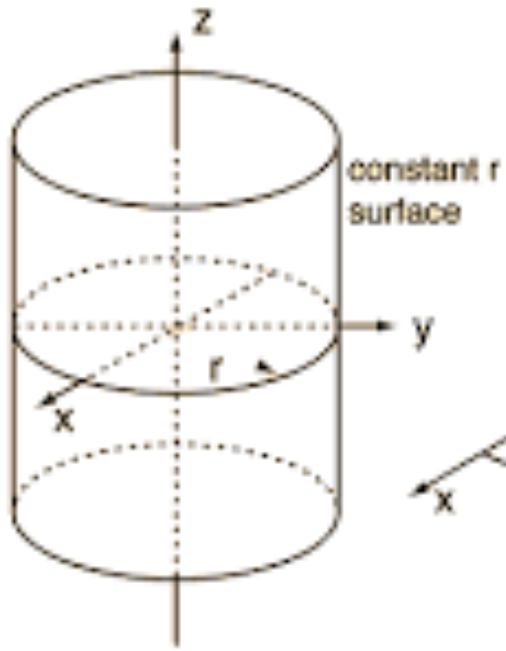


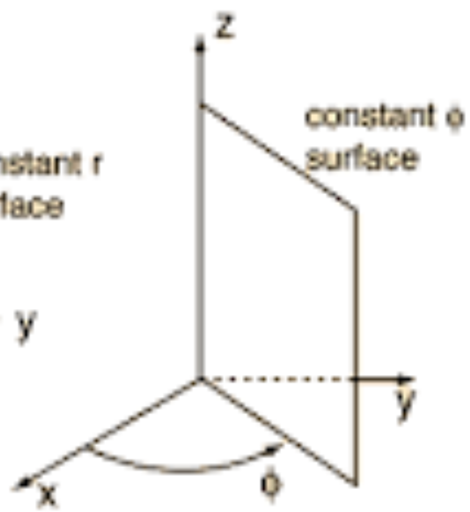
Sistema de Coordenadas Polares & Cilíndricas

$q_1 = r$ = constante

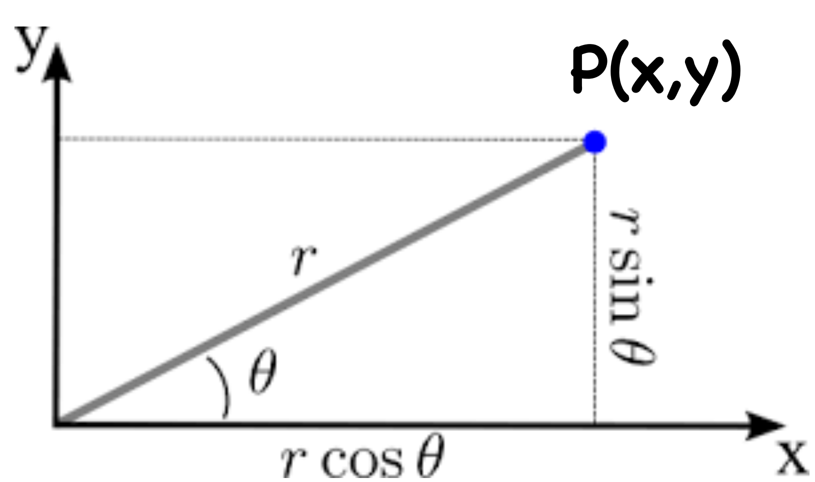
$q_2 = \theta$ = constante

cilíndros concêntricos





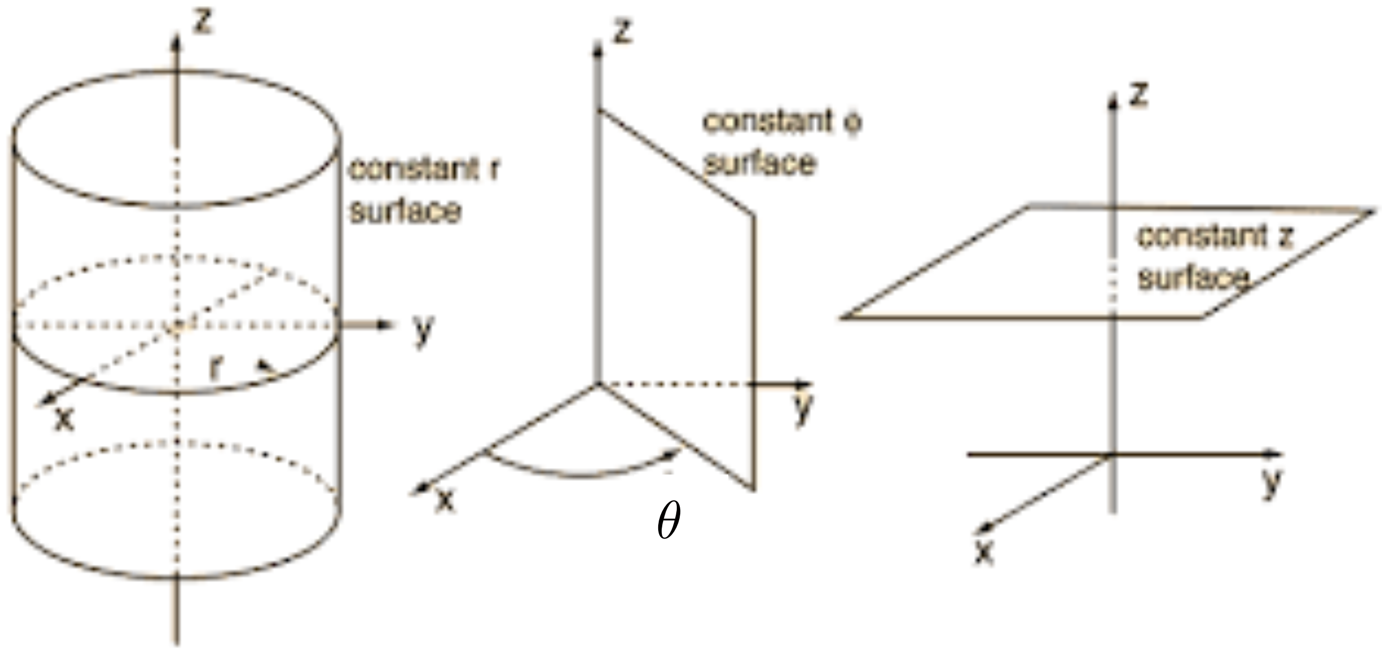
semi-planos



Polares (2D)

Sistema de Coordenadas Polares & Cilíndricas

q_1 = r = constante **q_2 = θ= constante** **Cilíndricas (3D)**

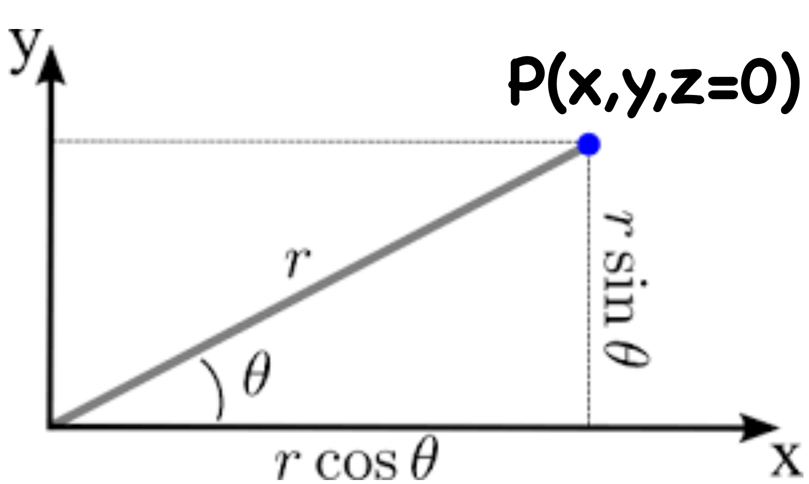


q_3 = z = constante

$$x = x(q_1 = r, q_2 = \theta) = r\cos\theta$$

$$y = y(q_1 = r, q_2 = \theta) = r\sin\theta$$

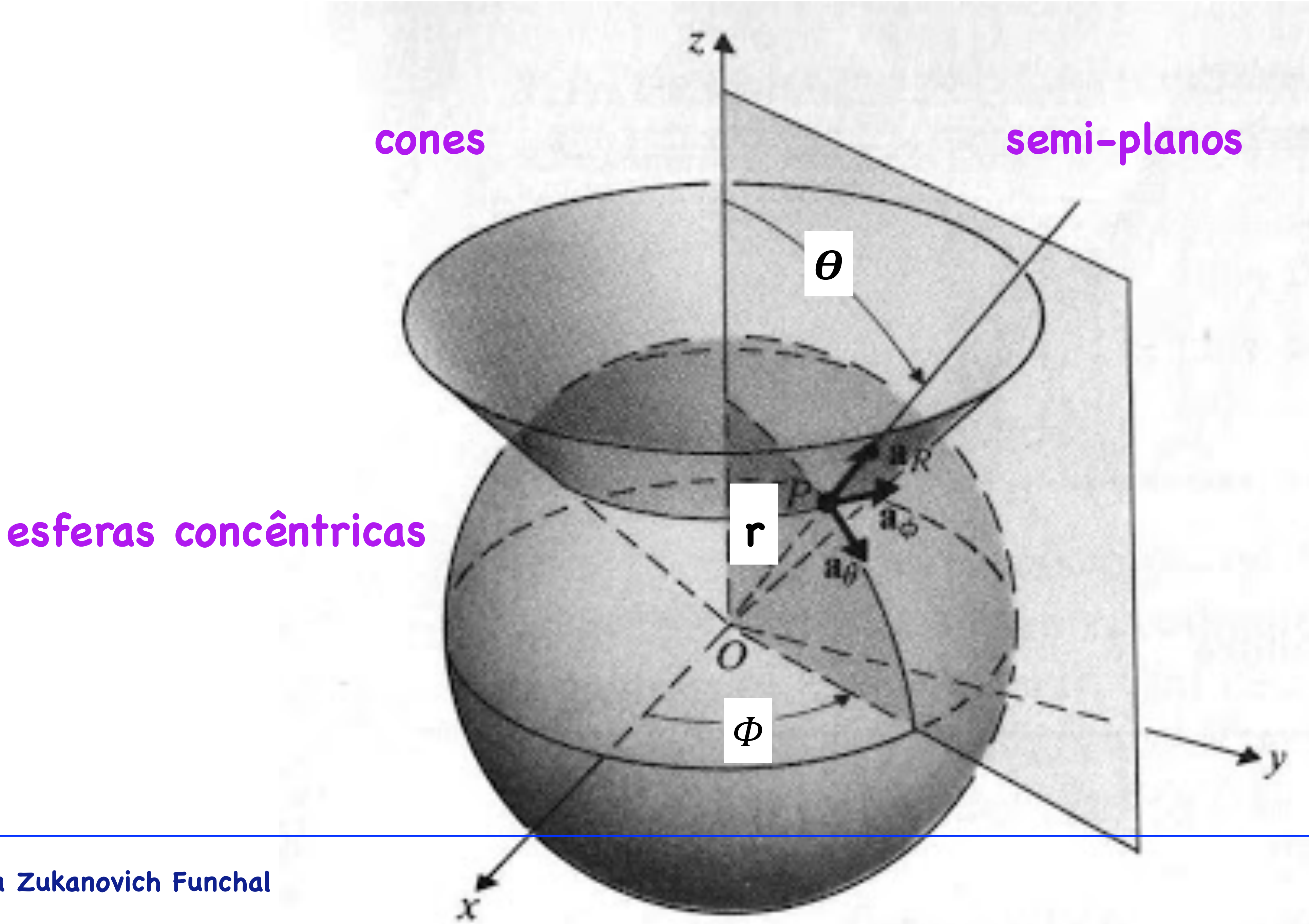
$$z = z(q_1 = r, q_2 = \theta) = z$$



Polares (2D)

Sistema de Coordenadas Esféricas

$q_1 = r =$ constante $\quad q_2 = \theta =$ constante $\quad q_3 = \Phi =$ constante



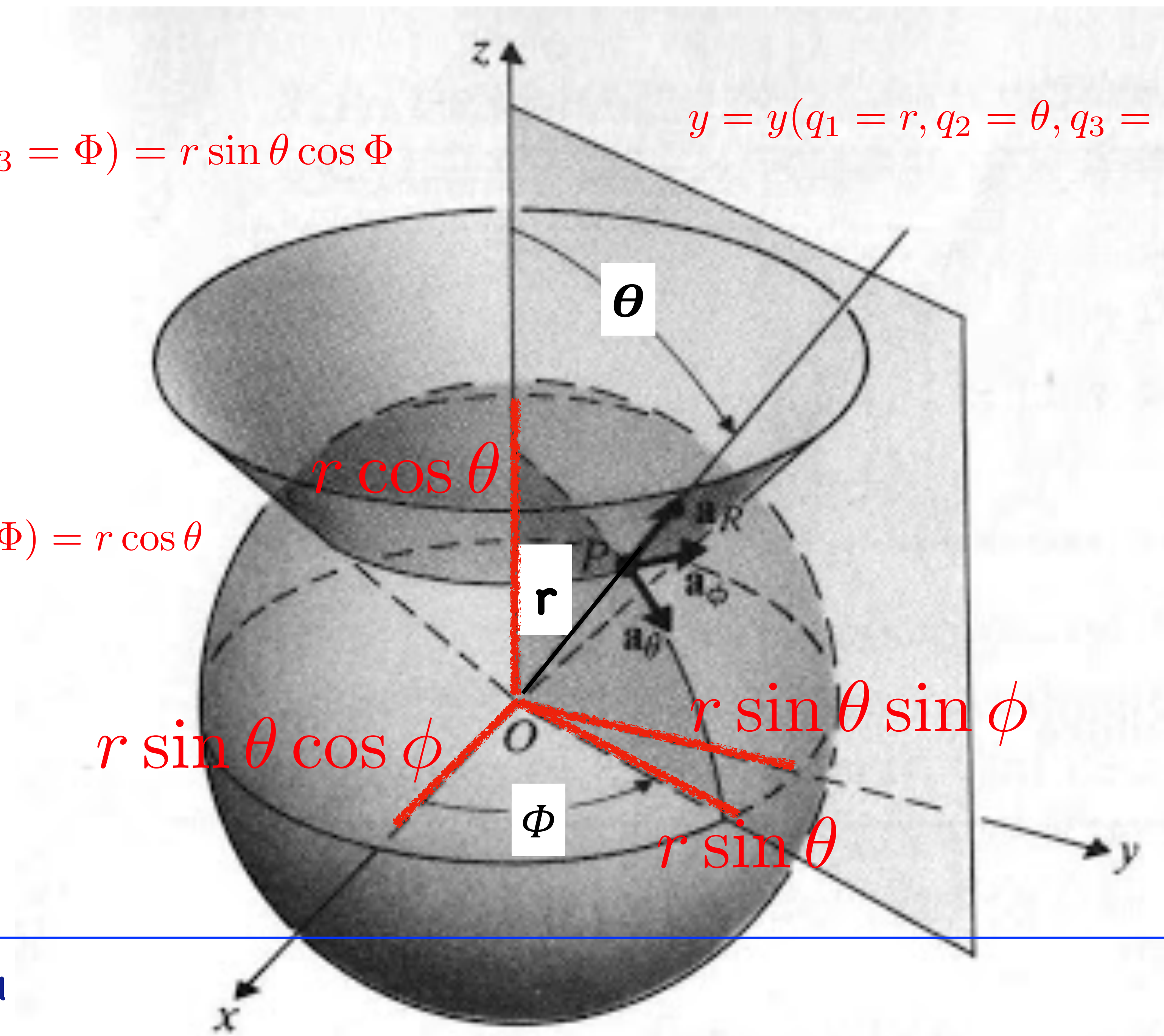
Sistema de Coordenadas Esféricas

q_1 = r = constante **q_2 = θ = constante** **q_3 = Φ = constante**

$$x = x(q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \Phi) = r \sin\theta \cos\Phi$$

$$y = y(q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \Phi) = r \sin\theta \sin\Phi$$

$$z = z(q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \Phi) = r \cos\theta$$



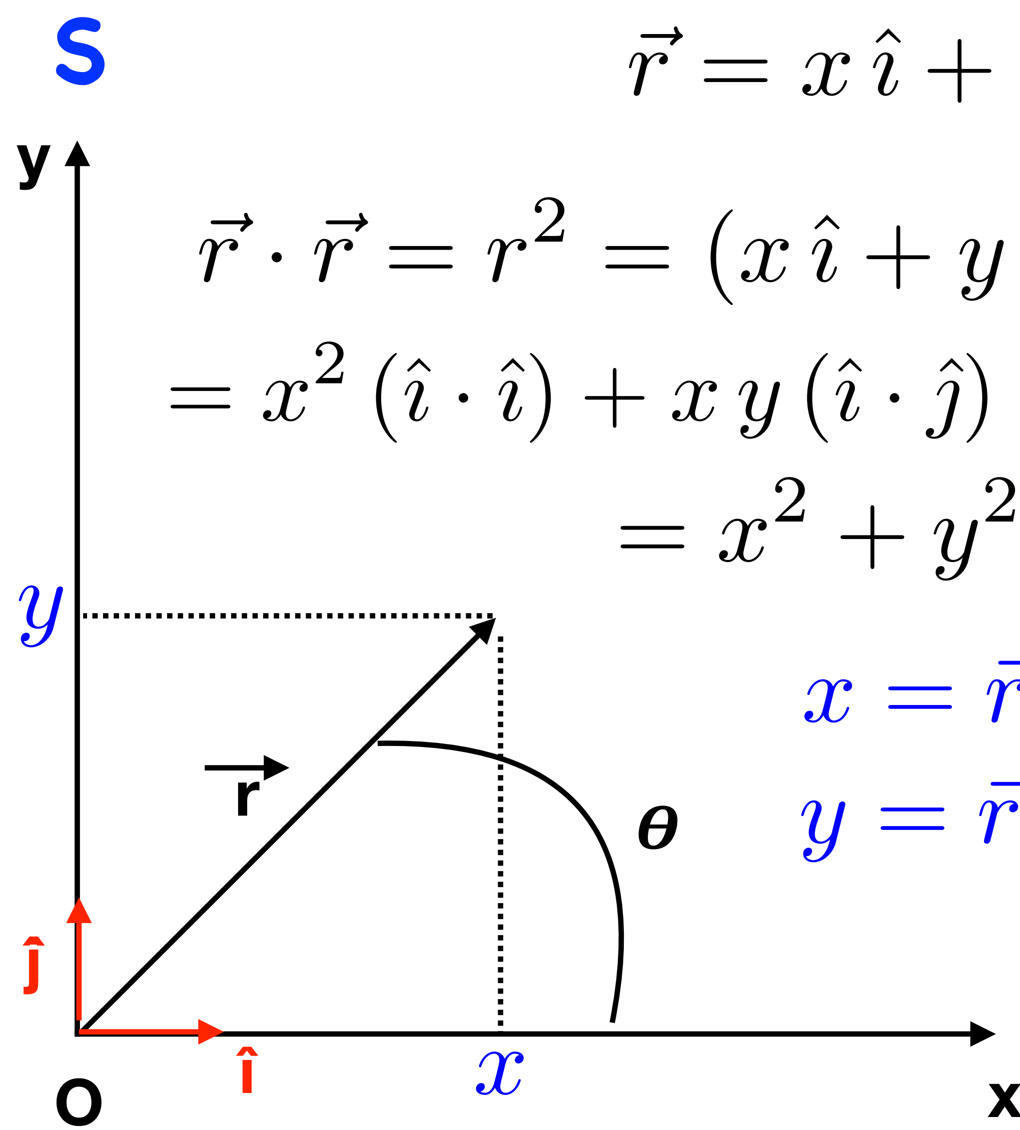
Considere o Sistemas S

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2 = (x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath})\cdot(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath})$$
$$= x^2\,(\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}) + x\,y\,(\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}) + y\,x\,(\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}) + y^2\,(\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath})$$
$$= x^2 + y^2$$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = 1$$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} = 0$$



$$x = \vec{r}\cdot\hat{\imath} = r\cos\theta$$

$$y = \vec{r}\cdot\hat{\jmath} = r\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = r\sin\theta$$

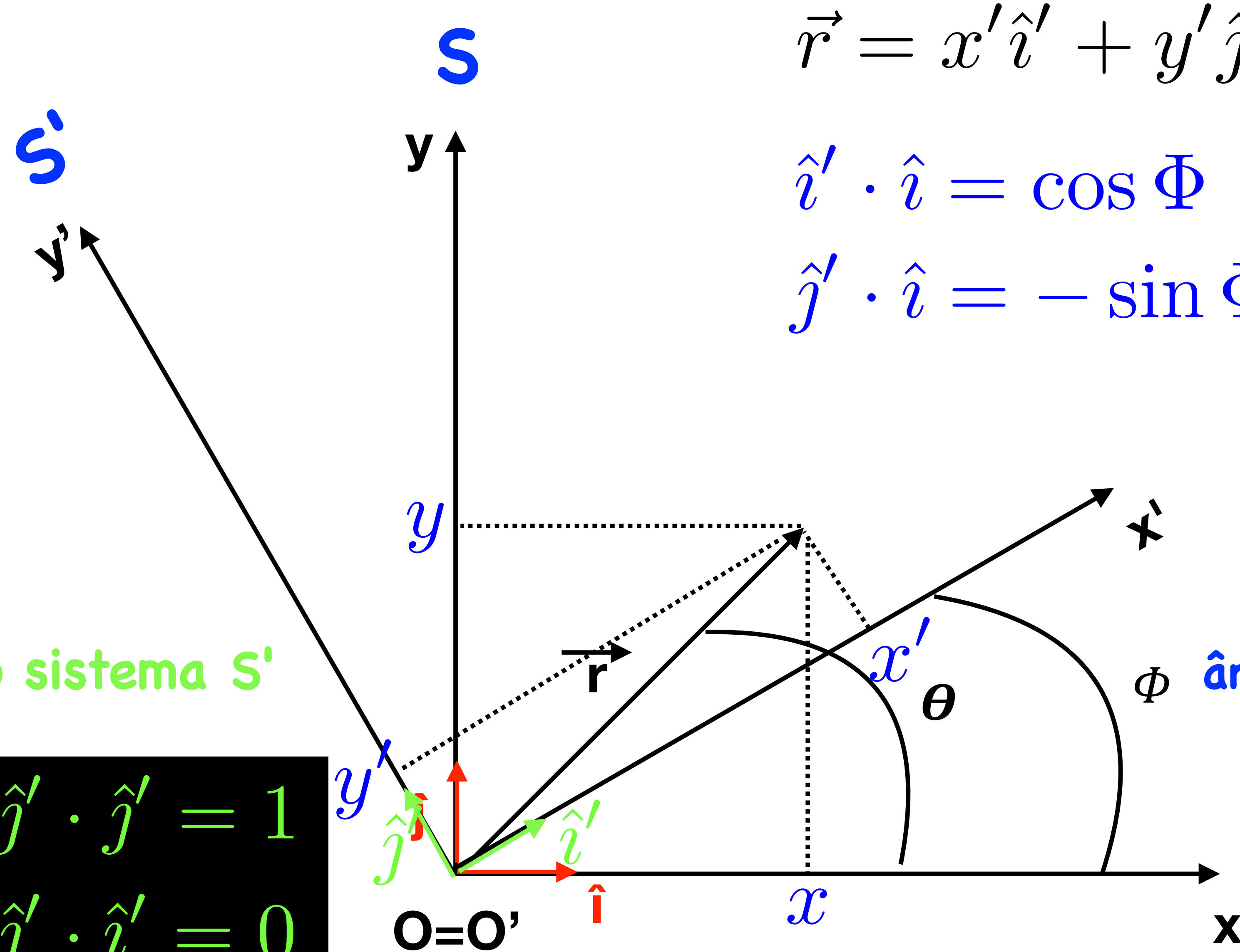
versores do sistema S

Considere o Sistema S'

$$\vec{r} = x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}'$$

$$\hat{\imath}' \cdot \hat{\imath} = \cos\Phi \qquad \hat{\imath}' \cdot \hat{\jmath} = \sin\Phi$$

$$\hat{\jmath}' \cdot \hat{\imath} = -\sin\Phi \qquad \hat{\jmath}' \cdot \hat{\jmath} = \cos\Phi$$



versores do sistema S'

$$\hat{\imath}' \cdot \hat{\imath}' = \hat{\jmath}' \cdot \hat{\jmath}' = 1$$

$$\hat{\imath}' \cdot \hat{\jmath}' = \hat{\jmath}' \cdot \hat{\imath}' = 0$$

ângulo de rotação entre S e S'

$$x' = \vec{r} \cdot \hat{\imath}'$$

$$y' = \vec{r} \cdot \hat{\jmath}'$$

versores do sistema S