ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 Mecânica 1
Estática
Estruturas Isostáticas
Notas de Aula

Prof. Leandro V. da S. Macedo

Conteúdo

Simbologia
Formulário

Graus de Liberdade de um corpo no espaço
Vínculos (Apoio simples, Articulação, Anel, Engaste)
Diagrama de Corpo Livre (DCL) – Forças ativas e Forças de reação
Equações de Equilíbrio Estático das Estruturas
Problema Plano
Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos
Resolução de Estruturas Isostáticas
Treliças – Barra de Treliça
Treliças – Método do Nós
Treliças – Método das Seções
Forças em fios e polias

Simbologia

$\vec{F}$ *Força*

F_{AB} *Força na barra AB*

$\vec{R}$ *Resultante de um sistema de forças*

I *Invariante escalar de um sistema de forças*

$\vec{M}_O$ *Momento de uma força (ou de um sistema de forças) em relação a um pólo O*

M_u *Momento de uma força (ou de um sistema de forças) em relação a um eixo* $O\vec{u}$

G *Baricentro*

m_i *massa do ponto i*

M *massa total do sistema*

$\vec{g}$ *aceleração da gravidade (também g tomado como módulo)*

$\mathbb{V}$ *volume*

$\mathbb{A}$ *área*

ℓ *linha*

ρ *massa específica*

Unidades no SI (Sistema Internacional de Unidades)

$\vec{F}$	força	[N]	Newton
$\vec{M}_O$	momento de força	[Nm]	Newton.metro
M_u	momento de força em relação a eixo	[Nm]	Newton.metro
$(P-O)$	vetor posição	[m]	metro
x	coordenada de posição, distância ou deslocamento	[m]	metro
m	massa	[kg]	kilograma

Formulário

$$(\vec{F}, P)$$

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I$$

$$(H - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\left|\vec{R}\right|^2} + \lambda \vec{R} \qquad com \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{M}_H = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{\left|\vec{R}\right|} \frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|}$$

$$\left|\vec{M}_H\right| = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{\left|\vec{R}\right|}$$

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} M_x \vec{\imath} + \sum_{i=1}^{N} M_y \vec{\jmath} + \sum_{i=1}^{N} M_z \vec{k}$$

$$(C - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} h_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} h_i}$$

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)}{M}$$

$$\vec{R}^{ext} = \vec{0}$$

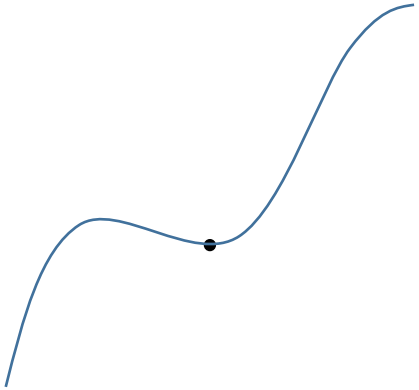
$$\vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$

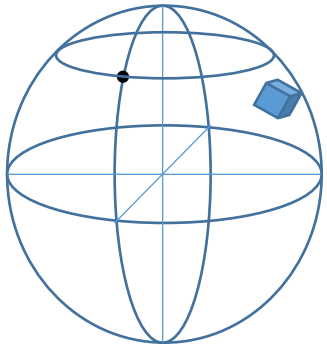
Graus de Liberdade de um Corpo no Espaço

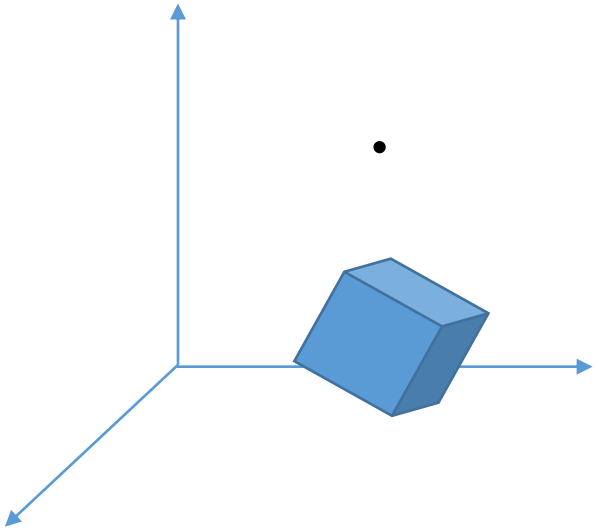
Graus de liberdade de um sistema físico é a quantidade de parâmetros independentes necessários e suficientes para definir o seu estado.

Na Mecânica, entende-se por definir o estado do sistema em dizer a posição espacial que os corpos ocupam em um determinado instante.

- **um ponto sobre uma curva tem apenas 1 grau de liberdade;**
- **um ponto sobre uma superfície bi-dimensional tem 2 graus de liberdade;**
- **um corpo que tenha uma face sempre apoiada sobre uma superfície tem 3 graus de liberdade;**
- **um ponto no espaço tem 3 graus de liberdade;**
- **um corpo no espaço tem 6 graus de liberdade.**







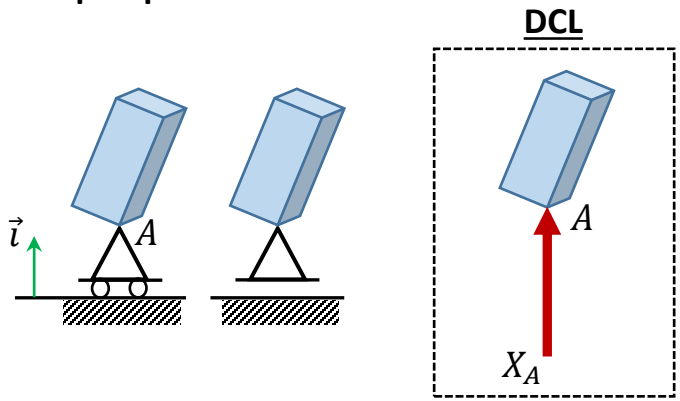
Vínculos

Vínculos são elementos que retiram graus de liberdade do sistema.
Na Mecânica os vínculos irão restringir de alguma forma o movimento do ponto vinculado e irão exercer uma força aplicada neste ponto.

Tipos de Vínculos:

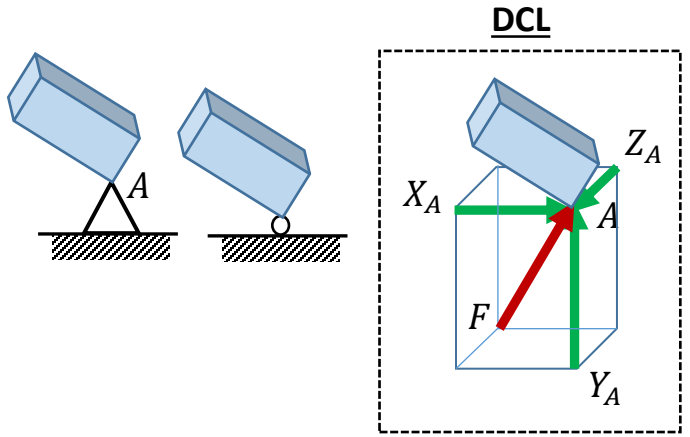
1) Apoio simples:

Vincula o ponto do corpo a uma superfície de apoio.
Retira 1 grau de liberdade.
Fornece uma força de reação:
- **normal à superfície de apoio;**
- **qualquer sentido (bi-lateral) ou único sentido único pré-determinado (unilateral);**
- **qualquer intensidade.**



2) Articulação:

Vincula o ponto do corpo a uma posição fixa no espaço.
Retira 3 graus de liberdade.
Fornece uma força de reação:
- **qualquer direção;**
- **qualquer sentido;**
- **qualquer intensidade.**

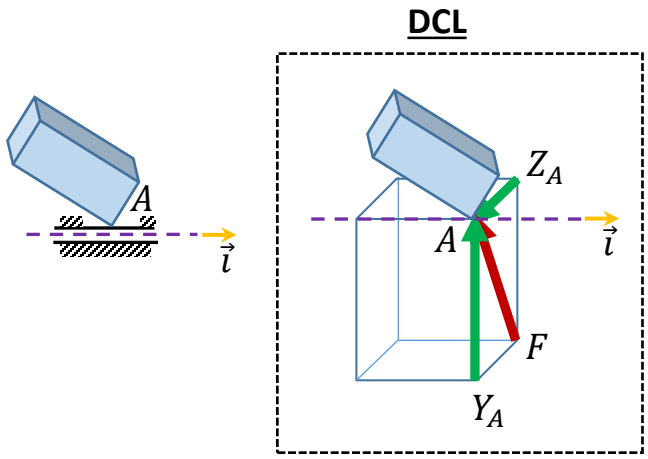


Vínculos

Tipos de Vínculos (continuação):

3) Anel:

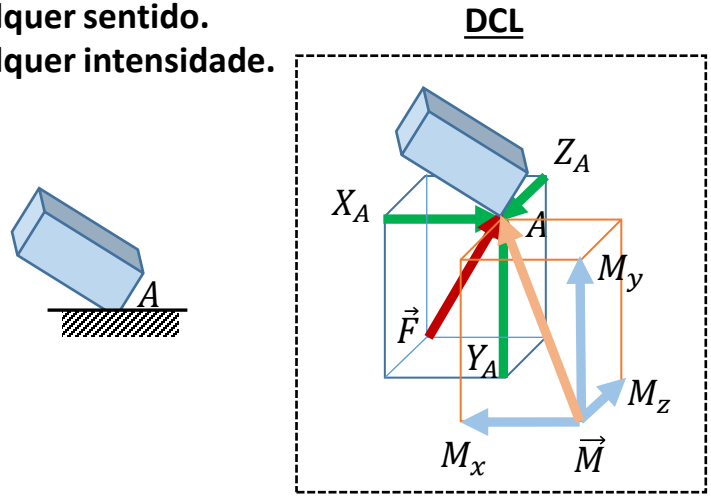
Vincula o ponto do corpo a um eixo.
Retira 2 graus de liberdade.
Fornece uma força de reação:
- **normal ao eixo;**
- **qualquer sentido;**
- **qualquer intensidade.**



4) Engaste:

Vincula o corpo em uma posição fixa no espaço.
Retira os 6 graus de liberdade.
Fornece uma força de reação:
- **qualquer direção.**
- **qualquer sentido.**
- **qualquer intensidade.**

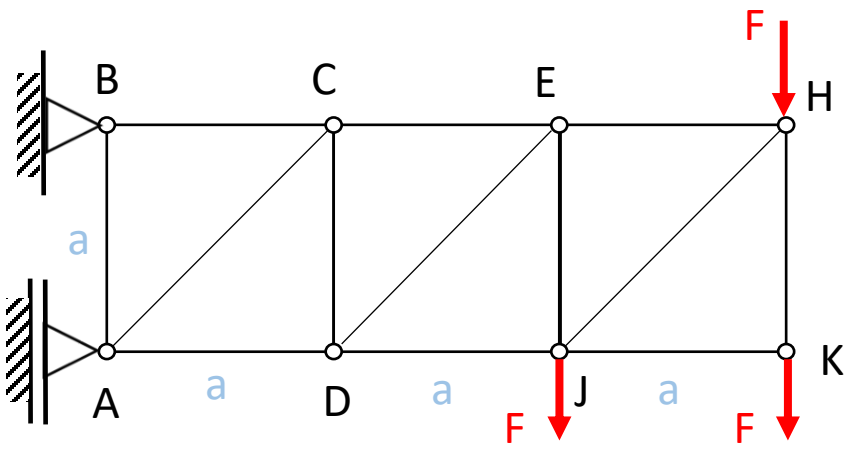
Fornece um binário de reação:
- **qualquer direção.**
- **qualquer sentido.**
- **qualquer intensidade.**



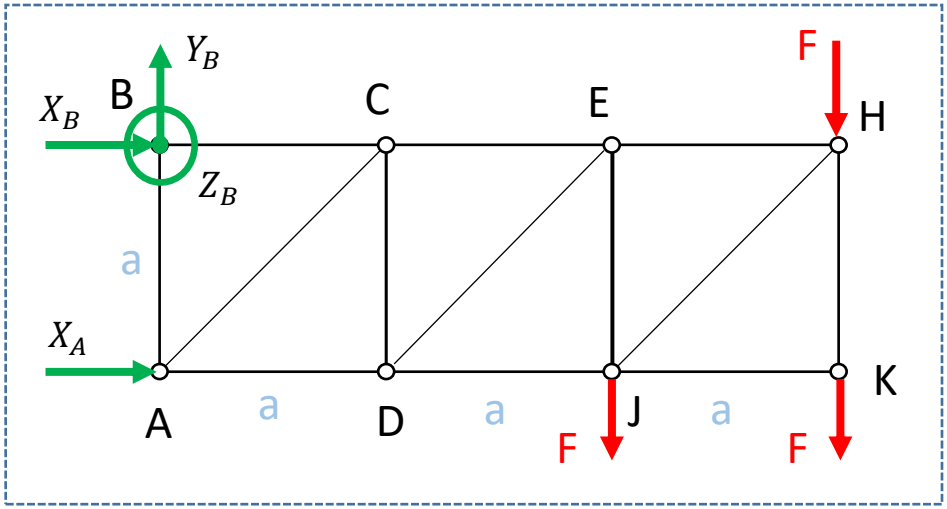
Equações de Equilíbrio Estático de Estruturas

Em um problema de equilíbrio estático de estruturas típico temos uma dada estrutura, submetida a um determinado carregamento e vinculada de alguma maneira onde deveremos determinar, conforme o caso, esforços nos vínculos e/ou posições de equilíbrio e/ou esforços nos componentes.

Define-se:
Diagrama de Corpo Livre ➔ desenho da estrutura substituindo-se os vínculos pelas correspondentes forças de reação.
Forças externas: forças aplicadas por agentes externos sobre à estrutura.
Forças internas: forças entre os diversos componentes da estrutura (formando pares ação reação).
Forças ativas: forças externas aplicadas por agentes que não sejam os vínculos.
Forças de reação: forças externas aplicadas pelos vínculos externos.



DCL



Equações de Equilíbrio Estático de Estruturas

No exemplo:

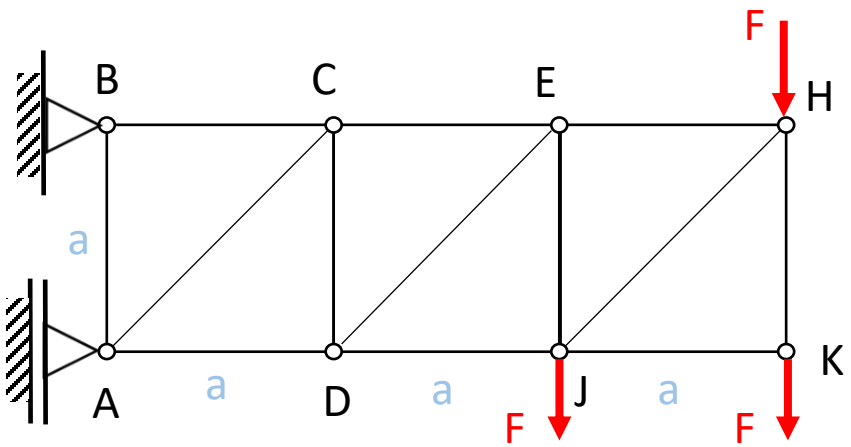
Em A e B temos vínculos externos, A é um apoio simples, B é uma articulação.

Em J, K e H temos forças externas ativas.

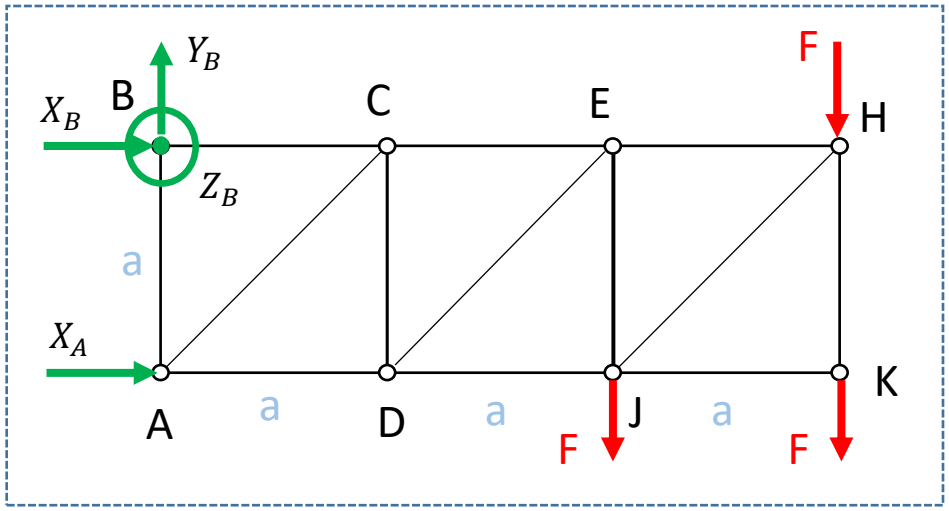
Em A e B temos forças externas de reação. O Sentido admitido inicialmente para as forças externas de reação desconhecidas é arbitrário.

Temos 13 barras. Temos articulações internas entre as barras.

As forças internas NÃO aparecem no DCL do conjunto porque formam pares ação/reação (3ª Lei de Newton) e assim anulam-se duas a duas.



DCL



Equações de Equilíbrio Estático de Estruturas

As equações de equilíbrio estático a serem resolvidas são as seguintes:

$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \qquad \vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$

Estas equações vêm dos Teoremas da Dinâmica:

Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) ➔ $\vec{R} = m\vec{a}_G$

Teorema da Taxa de Variação da Quantidade de Movimento Angular (TMA) ➔ $\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O$

Para garantirmos que o equilíbrio estático seja possível basta então que a resultante do sistema de forças externas aplicadas à estrutura e o momento deste sistema de forças externas em relação a um polo sejam nulos, assim não há variação de quantidade de movimento linear nem variação de quantidade de movimento angular.

O polo em relação ao qual calculamos o momento de forças pode ser qualquer, isto é, escolhido arbitrariamente, pois já que temos a resultante nula, o momento será invariante para mudança de polo.

Só interessam as forças externas pois as forças internas anulam-se aos pares conforme a 3ª Lei de Newton – Lei de Ação e Reação.

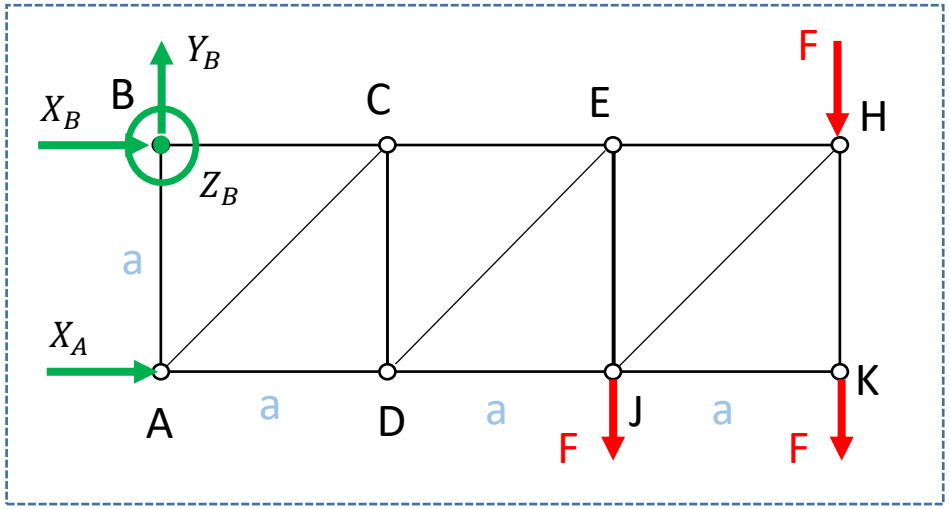
***Observação**: As Leis de Newton e os Teoremas da Dinâmica serão discutidos em maiores detalhes na terceira parte do conteúdo da disciplina ao abordarmos a Dinâmicas dos Sistemas.*

Equações de Equilíbrio Estático de Estruturas – Problema Plano

Para a estruturas ilustrada, aplicando-se as equações de equilíbrio, tem-se:

$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \qquad \vec{M}_A^{ext} = \vec{0}$$

DCL



$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + X_B = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_B - 3F = 0 \quad \textbf{(2)}$$

$$\sum F_z = 0 \therefore Z_B = 0 \quad \textbf{(3)}$$

$$\sum M_{xA} = 0 \therefore Z_B.a = 0 \quad \textbf{(4)}$$

$$\sum M_{yA} = 0 \therefore 0 = 0 \quad \textbf{(5)}$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore -X_B.a - F.2a - 2F.3a = 0 \quad \textbf{(6)}$$

Observamos que apenas as equações (1), (2) e (6) são úteis.
Isto porque estamos numa situação definida como um "problema plano":

- **estrutura é plana, ou está sendo analisada em seu plano de simetria;**
- **as forças externas ativas estão todas contidas neste plano;**
- **eventuais binários externos ativos estariam perpendiculares ao plano.**

Nesta situação de "problema plano" as equações úteis que restam são:

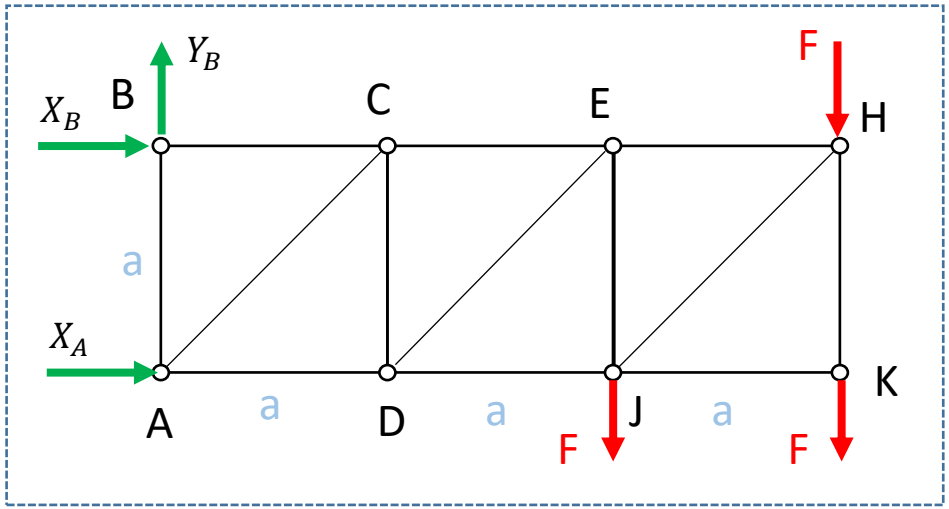
- **equilíbrios de forças segundo duas direções do plano ortogonais entre si;**
- **equilíbrio de momentos segundo direção ortogonal ao "plano da estrutura".**

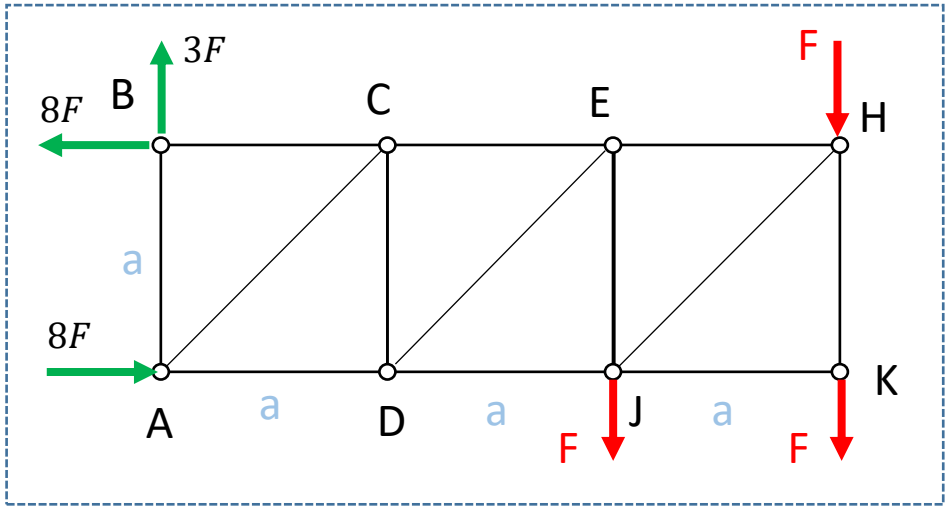
No problema plano, aquele onde não existem forças ativas perpendiculares ao plano, então é lógico que não existirão forças reativas, e assim considerar Z_B é supérfluo.

Exercício 1: Problema Plano

Resolvendo-se o problema plano do exemplo que viemos analisando:

DCL





$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \qquad \vec{M}_A^{ext} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + X_B = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_B - 3F = 0 \quad \textbf{(2)}$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore -X_B.a - F.2a - 2F.3a = 0 \quad \textbf{(3)}$$

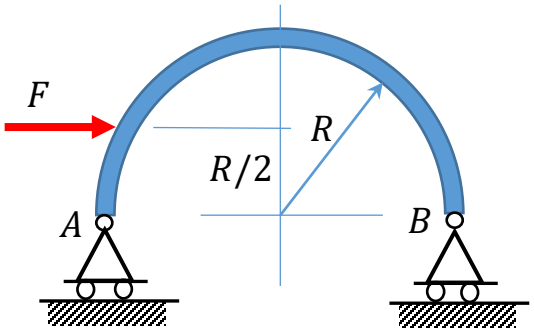
de(2): $Y_B = 3F$

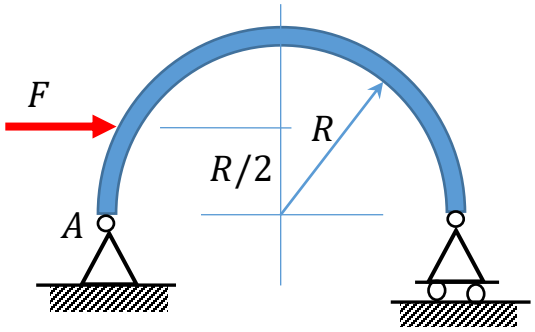
de(3): $X_B = -8F$

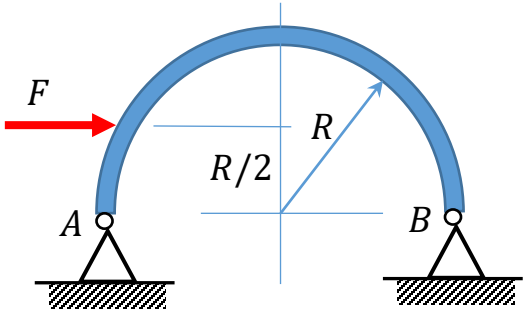
de(1): $X_A = 8F$

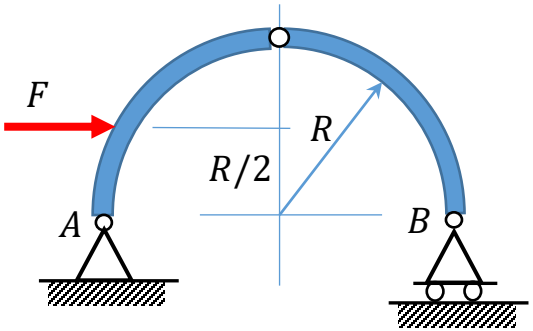
Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

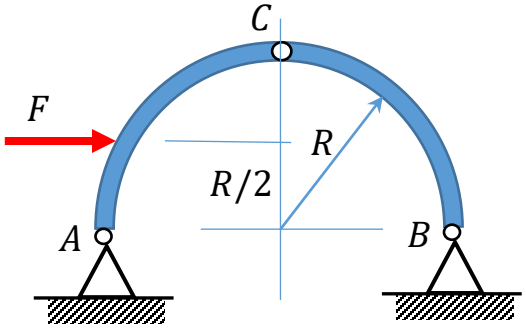
Considere as estruturas em problema plano que seguem:





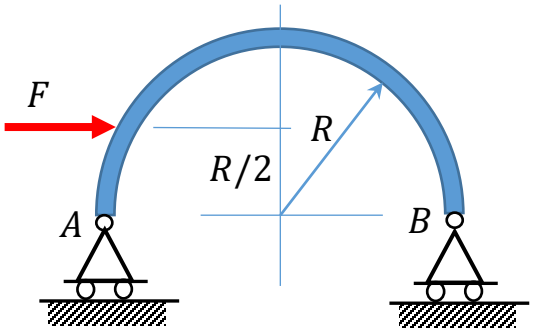






Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

Considere as estruturas que seguem:



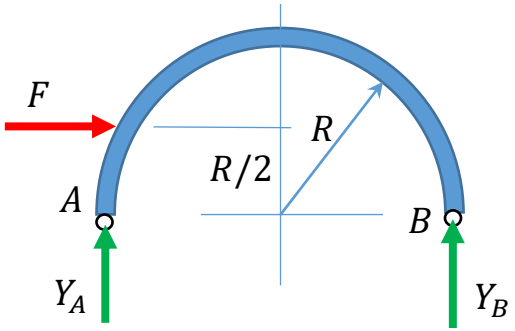
$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \qquad \vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \therefore F = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B = 0 \quad \textbf{(2)}$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_B . 2R - F\frac{R}{2} = 0 \quad \textbf{(3)}$$

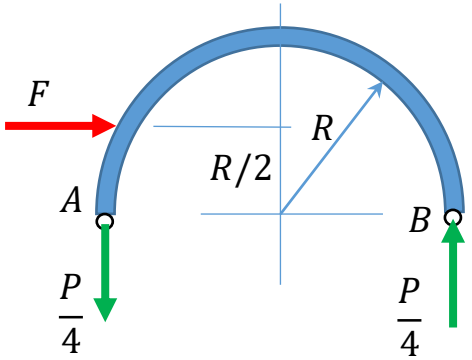
DCL



de(3): $Y_B = F/4$

Em (2): $Y_A = -F/4$

mas de (1), só há equilíbrio se F for nulo!

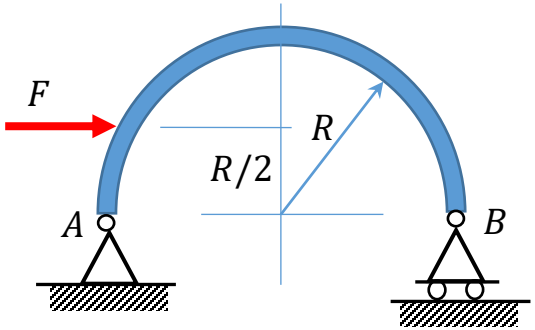


Nesta situação diz-se que a estrutura é <u>hipostática</u>.

Hipostática

É quando há menos vínculos (quantidade, tipo e/ou localização, vide melhor explicação mais adiante) do que o necessário para garantir o equilíbrio estático em qualquer caso de carregamento.

Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos



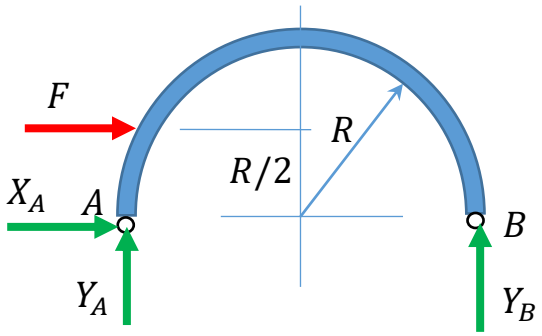
$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \qquad \vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + F = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B = 0 \quad \textbf{(2)}$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_B . 2R - F\frac{R}{2} = 0 \quad \textbf{(3)}$$

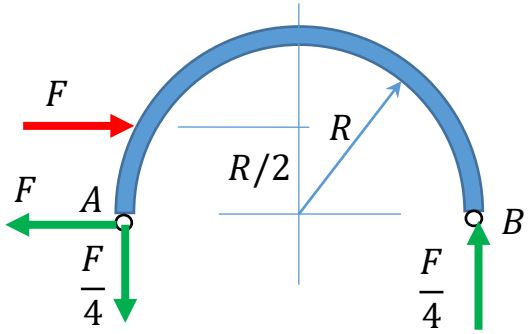
DCL



de(3): $Y_B = F/4$

Em (2): $Y_A = -F/4$

de(1): $X_A = -F$

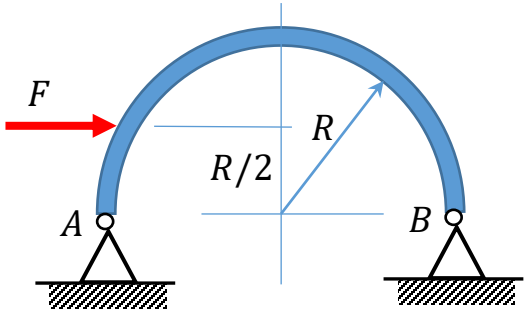


Isostática

Nesta situação diz-se que a estrutura é <u>isostática</u>.

É quando há exatamente a quantidade, tipo e distribuição espacial de vínculos necessária e suficiente para garantir o equilíbrio estático em qualquer caso de carregamento.

Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos



$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \qquad \vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + X_B + F = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

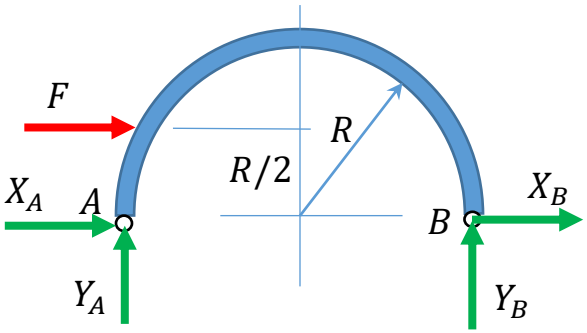
$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_B . 2R - F\frac{R}{2} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

de(3): $Y_B = F/4$

Em (2): $Y_A = -F/4$

mas não conseguimos resolver (1) e assim X_A e X_B ficam indeterminadas.

DCL



Nesta situação diz-se que a estrutura é <u>hiperestática</u>.

É quando há mais vínculos do que o necessário para garantir o equilíbrio estático. Há mais incógnitas do que equações.
Para resolver precisamos de mais equações. Equações adicionais vêm da Resistência de Materiais. Elas envolvem conceitos de deformação da estrutura. Descreveria o fato de ter-se deslocamento nulo nos pontos vinculados. Foge ao escopo da Mecânica Geral e será abordado nas disciplinas de Resistência dos Materiais.

Hiperestática

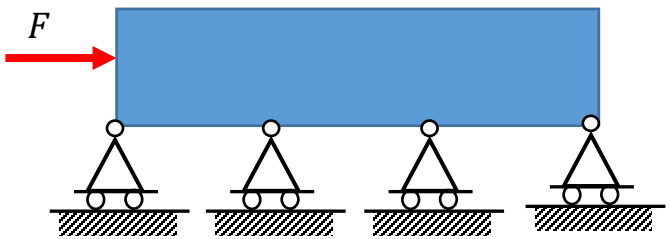
Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

Podemos classificar as estruturas então quanto ao tipo, quantidade e distribuição espacial dos vínculos da seguinte forma:

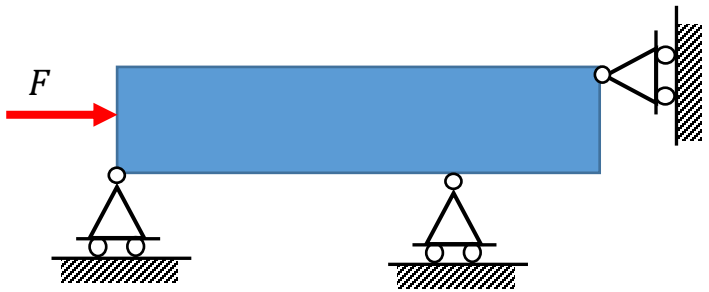
- **Estruturas hipostáticas**
- **Estruturas isostáticas**
- **Estruturas hiperestáticas**

Nosso objeto de estudo principal será o das estruturas isostáticas.
Também poderemos abordar alguns casos de estruturas hipostáticas em condição especial de carregamento em que o equilíbrio estático seja possível.
Estudos de estruturas hiperestáticas está fora do escopo da Mecânica Geral.

Observe que não se trata apenas da quantidade de vínculos mas sim do seu tipo e distribuição espacial!



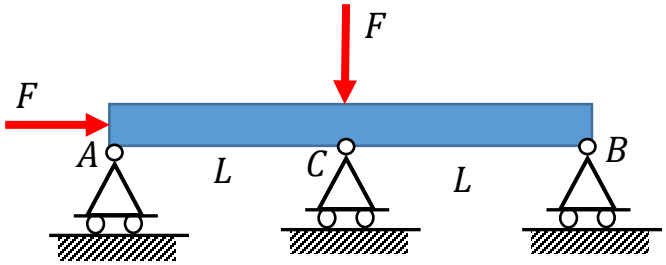
Hipostática



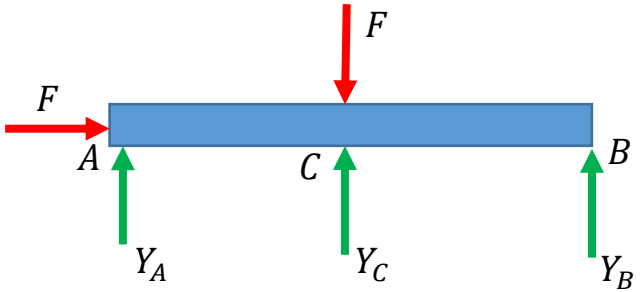
Isostática

Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

Observe ainda outros exemplos de que não se trata apenas da quantidade de vínculos mas sim do seu tipo e distribuição espacial!

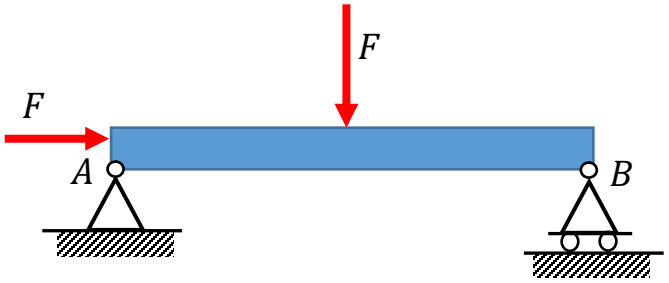


DCL

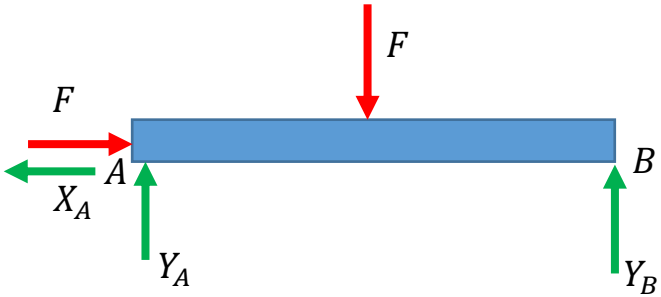


3 incógnitas , 3 equações

Hipostática para os carregamentos Horizontais e Hiperestática para os carregamentos verticais



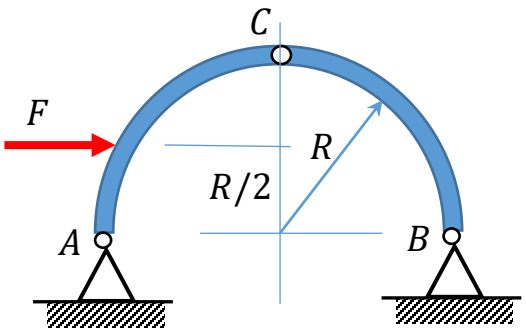
DCL

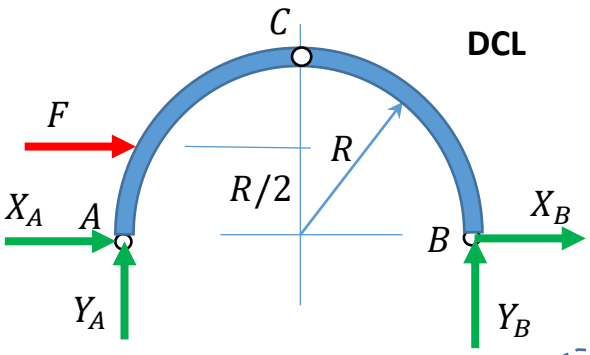


3 incógnitas , 3 equações

Isostática

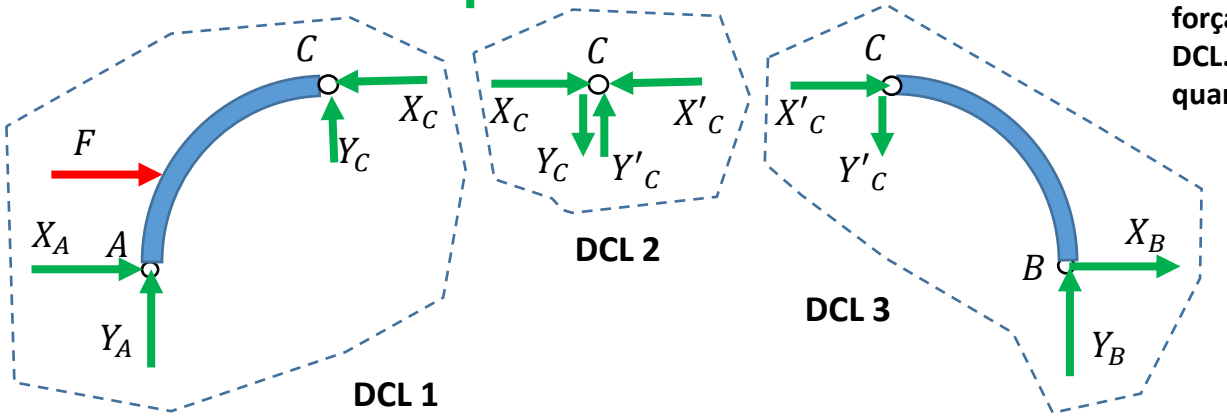
Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos





3 equações / 4 incógnitas

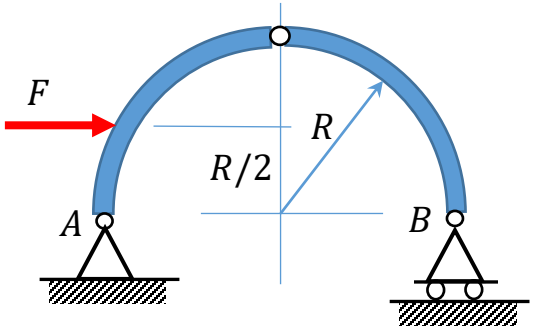
Esta estrutura é aparentemente hiperestática.
Mas observe que agora houve o acréscimo de uma articulação.
Não temos mais uma única barra curva, mas sim duas barras curvas articuladas entre si.
Agora as barras podem girar uma em relação a outra devido à articulação.
Se o vínculo em B fosse um apoio simples a estrutura tombaria quando submetida à força externa ativa horizontal.
Conclui-se que a articulação em B é necessária para o equilíbrio estático.
Esta situação pode então ser resolvida apenas com as equações de equilíbrio estático.
A forma de fazer isso é "explodindo" a estrutura
Teremos neste exemplo agora 3 diagramas de corpo livre.
Acrescentamos incógnitas. O que antes eram forças internas agora são forças externas em cada DCL. Mas por outro lado aumentamos a quantidade de equações de equilíbrio disponíveis.

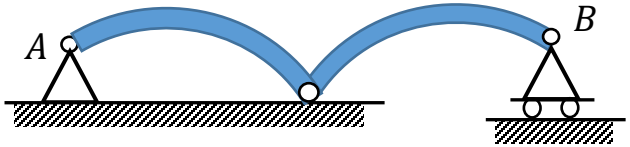


8 equações / 8 incógnitas

Classificação das Estruturas quanto à quantidade e tipo de vínculos

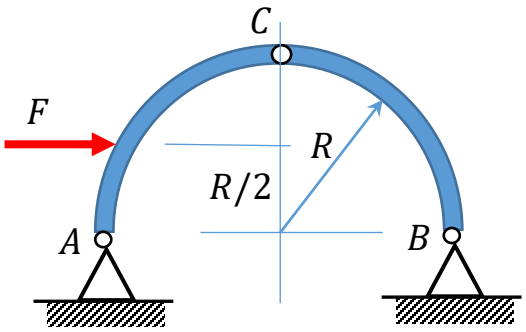
Veja como se em B tivéssemos um apoio simples o equilíbrio estático não seria possível!

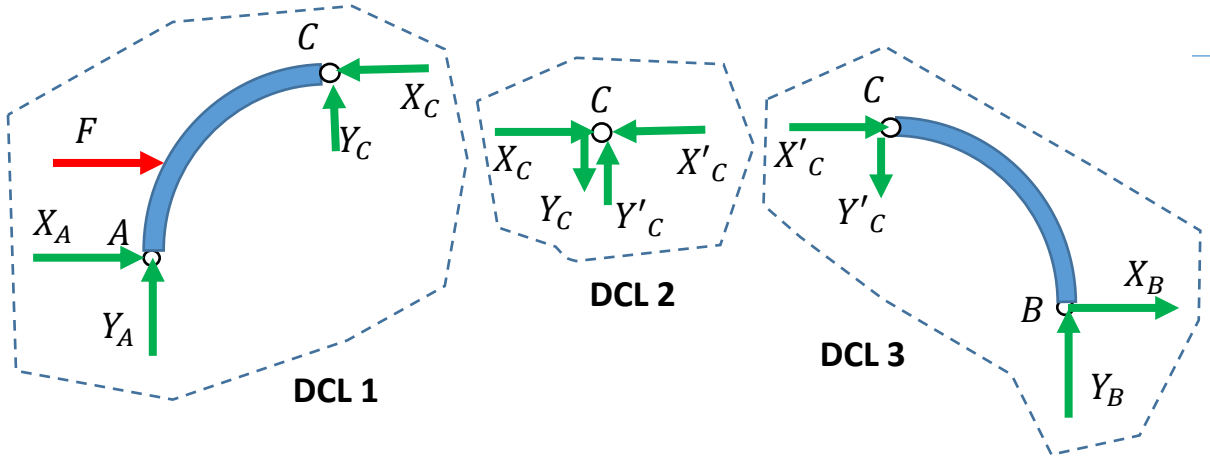




Exercício 2

Determinar as reações externas e as forças entre as barras.





$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_C + F = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_C = 0$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_C.R + X_C.R - F\frac{R}{2} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_C - X'_C = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -Y_C + Y'_C = 0$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X'_C + X_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -Y'_C + Y_B = 0$$

$$\sum M_{zB} = 0 \therefore Y'_C.R - X'_C.R = 0$$

Observe que o <u>equilíbrio do nó fornece apenas 2 equações num problema plano</u> (seriam 3 num problema no espaço 3D).

Exercício 2 (continuação)

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_C + F = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_C = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_C.R + X_C.R - F\frac{R}{2} = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_C - X'_C = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -Y_C + Y'_C = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_x = 0 \therefore X'_C + X_B = 0 \quad (6)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -Y'_C + Y_B = 0 \quad (7)$$

$$\sum M_{zC} = 0 \therefore Y'_C.R - X'_C.R = 0 \quad (8)$$

de (4) $X_C = X'_C$ (9)

de (5) $Y_C = Y'_C$ (10)

de (8) $Y'_C = X'_C$ (11)

Observe que havendo apenas 2 corpos chegando numa mesma articulação interna fazer o equilíbrio do nó é supérfluo.

(11) em (9) e (10) $X_C = Y_C$ (12)

(12) em (3) $Y_C = \frac{F}{4}$ (13)

(13) em (12) $X_C = \frac{F}{4}$ (14)

(13) em (2) $Y_A = -\frac{F}{4}$

(14) em (1) $X_A = -\frac{3F}{4}$

(14) em (9) $X'_C = \frac{F}{4}$ (15)

(13) em (10) $Y'_C = \frac{F}{4}$ (16)

(15) em (6) $X_B = -\frac{F}{4}$

(16) em (7) $Y_B = \frac{F}{4}$

Exercício 2 (continuação)

Assim:

$$Y_C = \frac{F}{4}$$

$$X_C = \frac{F}{4}$$

$$Y_A = -\frac{F}{4}$$

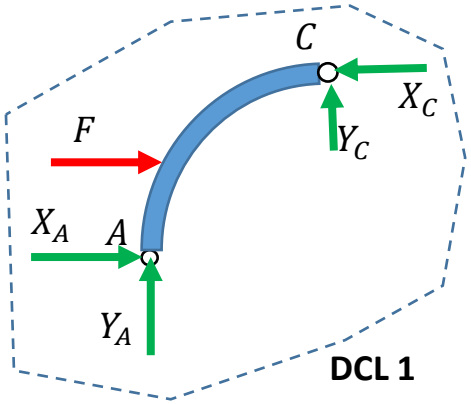
$$X_A = -\frac{3F}{4}$$

$$X'_C = \frac{F}{4}$$

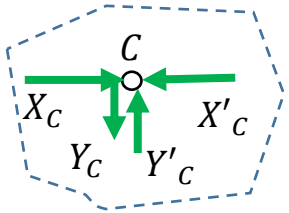
$$Y'_C = \frac{F}{4}$$

$$X_B = -\frac{F}{4}$$

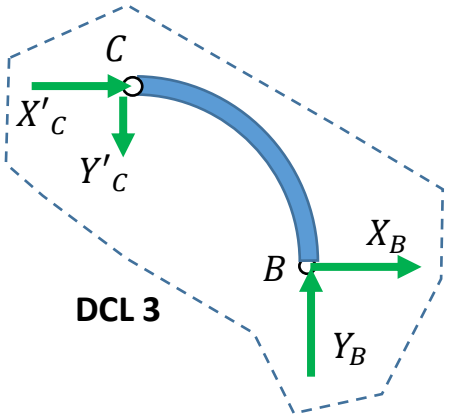
$$Y_B = \frac{F}{4}$$



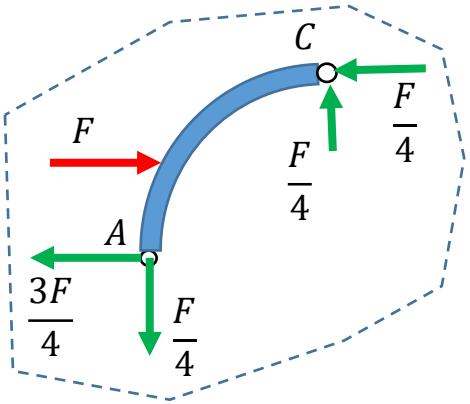
DCL 1

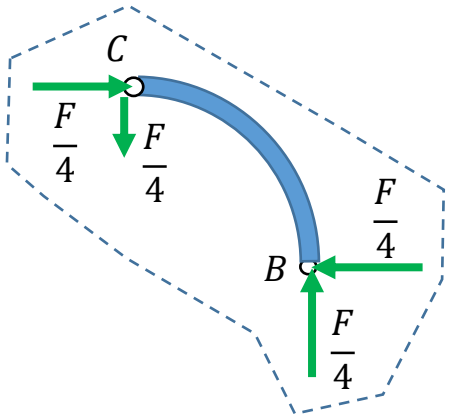


DCL 2



DCL 3





Treliças – Barra de Treliça

Define-se uma barra de treliça como uma barra com extremidades articuladas sem carga intermediária, isto é, todo carregamento aplicado sobre ela entra pelas extremidades.

Uma estrutura é denominada uma treliça se ela for composta por barras de treliça.

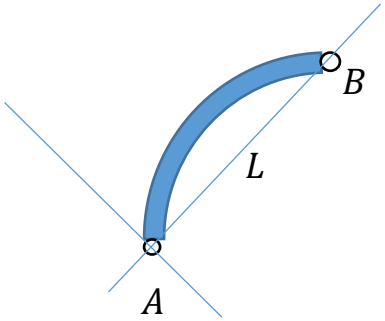
Treliças têm grande interesse na engenharia porque elas tem grande eficiência em suportar carga. Isto porque cada barra está submetida apenas a tração ou compressão. Não há carregamento de flexão. Em geral as tensões oriundas de um carregamento de tração ou compressão são muito menores do que aquelas oriundas de um carregamento em flexão. Isto será melhor explorado no conteúdo das disciplinas de Resistência de Materiais.

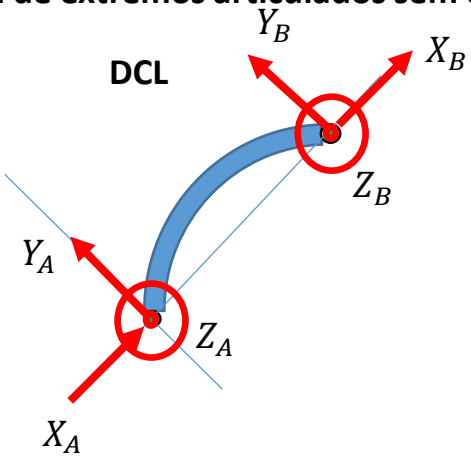
Experimente com sua régua plástica. Ela certamente é capaz de suportar uma carga muito maior em tração do que em flexão. (PS.: cuidado para não quebrá-la!)

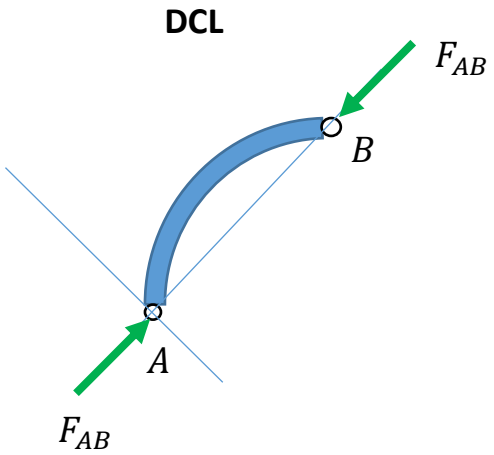
Estruturas treliçadas são utilizadas em pontes, torres, telhados, chassis de máquinas e veículos, lanças de guindastes, etc...

Treliças – Barra de Treliça

Estudando o equilíbrio de uma barra de extremos articulados sem carga intermediária:







$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + X_B = 0 \Longrightarrow \boxed{X_A = -X_B = F_{AB}}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B = 0$$

$$\sum F_z = 0 \therefore Z_A + Z_B = 0$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_B . L = 0 \Longrightarrow \boxed{Y_B = 0} \Longrightarrow \boxed{Y_A = 0}$$

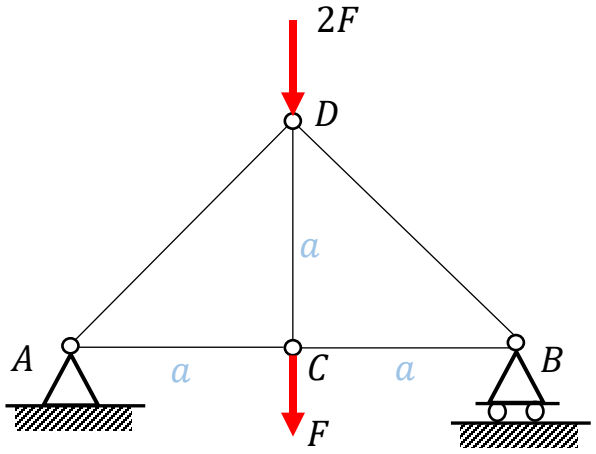
$$\sum M_{yA} = 0 \therefore -Z_B . L = 0 \Longrightarrow \boxed{Z_B = 0} \Longrightarrow \boxed{Z_A = 0}$$

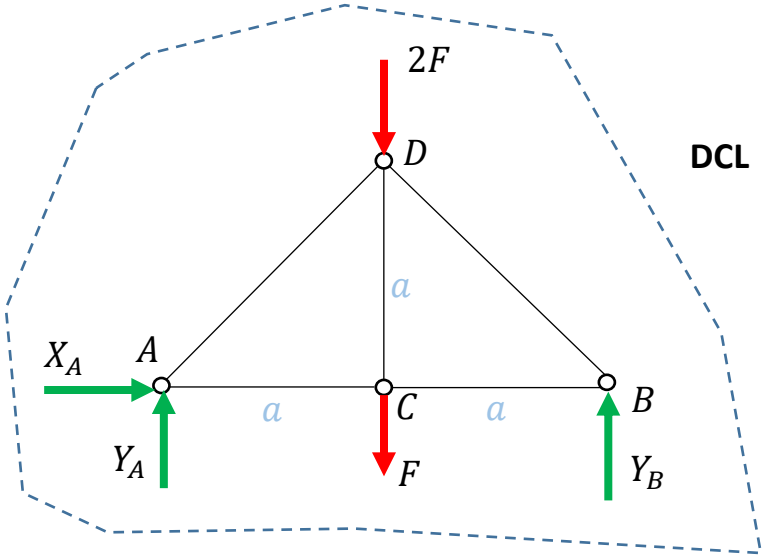
Assim demonstrou-se que a força numa barra de extremos articulados sem carga intermediária tem a direção da reta que une as extremidades da barra.
Sendo a barra reta, esta força será sempre ou de tração (T) ou de compressão (C) e então a barra é chamada de uma barra de treliça.

No exemplo considerou-se uma barra curva.
Observa-se que a demonstração do resultado obtido é independente da geometria da barra.
Entretanto, para que se tenha a barra apenas em tração ou compressão, isto é, sem flexão, é obrigatório que a barra seja reta.
Por isso as estruturas treliçadas são construídas por barras retas.

Exercício 3 - Treliças – Método dos Nós

Determinar as reações externas e as forças em cada barra indicando se são de tração (T) ou compressão (C).





DCL

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A = 0 \Longrightarrow \boxed{X_A = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B - 3F = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore Y_B . 2a - 3F . a = 0 \Longrightarrow \boxed{Y_B = \frac{3F}{2}} \qquad \textbf{(2)}$$

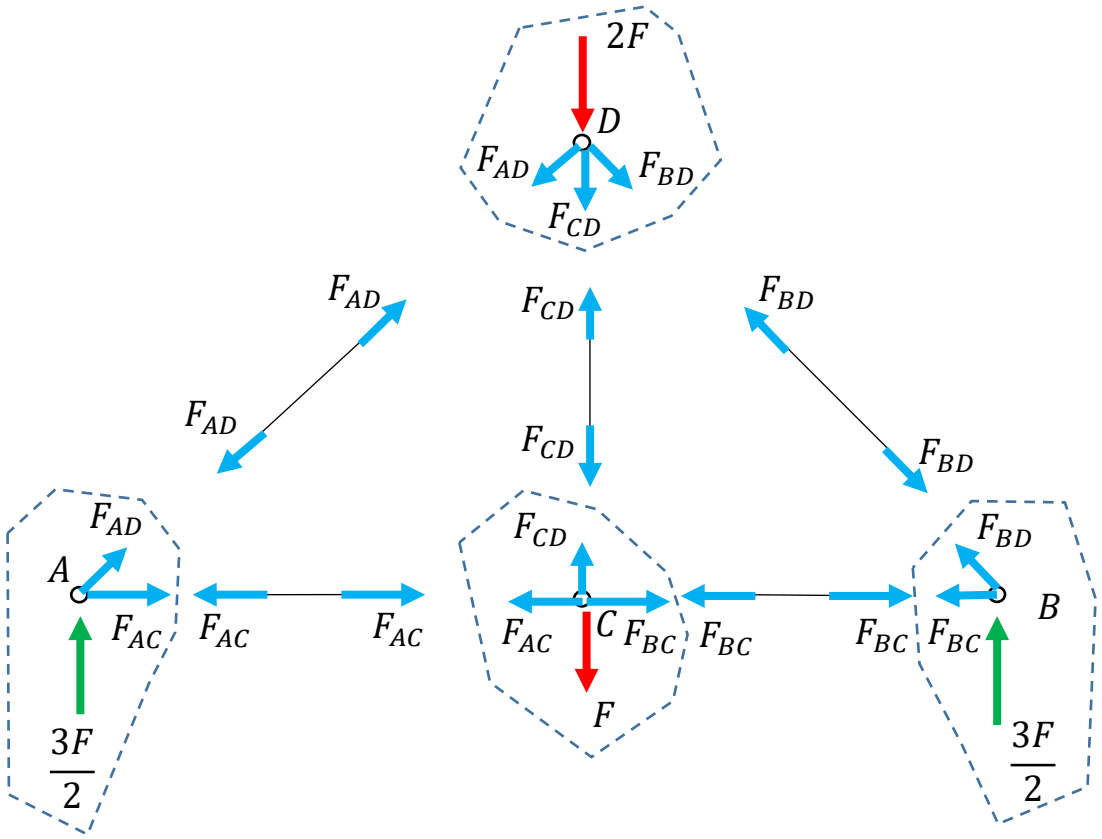
(2) em (1) $\boxed{Y_A = \frac{3F}{2}}$

Resultado deste exemplo é trivial pela simetria da estrutura e do carregamento.

Exercício 3 - Treliças – Método dos Nós (continuação)

Para determinar as forças em cada barra vamos explodir a estrutura:

São vários DCLs:



No método dos nós fazemos os equilíbrios dos nós:

$$\sum F_x = 0 \therefore F_{AC} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} + \frac{3F}{2} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \therefore F_{AC} - F_{BC} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore F_{CD} - F = 0$$

$$\sum F_x = 0 \therefore -F_{BC} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} + \frac{3F}{2} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} - 2F = 0$$

Exercício 3 - Treliças – Método dos Nós (continuação)

Resolvendo o sistema de equações (8 equações, 5 incógnitas, que são as forças nas barras, pois as 3 reações já calculamos):

$$\sum F_x = 0 \therefore F_{AC} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_{AC} = \frac{3}{2} F \quad (T)\ Tração$$

$$\sum F_y = 0 \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} + \frac{3F}{2} = 0 \Longrightarrow \quad F_{AD} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} F \quad (C)\ Compressão$$

$$\sum F_x = 0 \therefore F_{AC} - F_{BC} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_{BC} = \frac{3}{2} F \quad (T)\ Tração$$

$$\sum F_y = 0 \therefore F_{CD} - F = 0 \Longrightarrow \quad F_{CD} = F \quad (T)\ Tração$$

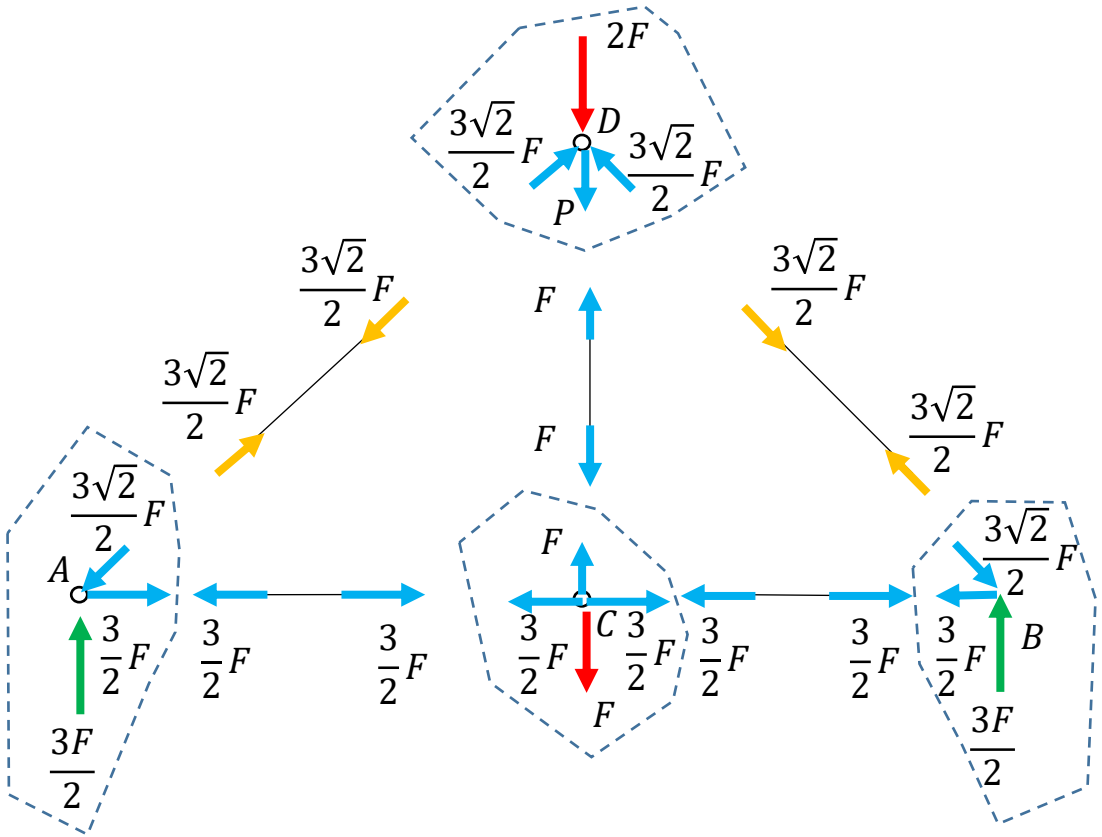
$$\sum F_x = 0 \therefore -F_{BC} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} + \frac{3F}{2} = 0 \Longrightarrow \quad F_{BD} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} F \quad (C)\ Compressão$$

$$\sum F_x = 0 \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} F_{AD} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} - 2F = 0$$

Exercício 3 - Treliças – Método dos Nós (continuação)



$F_{AC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}F$ (T) *Tração*

$F_{AD} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}F$ (C) *Compressão*

$F_{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}F$ (T) *Tração*

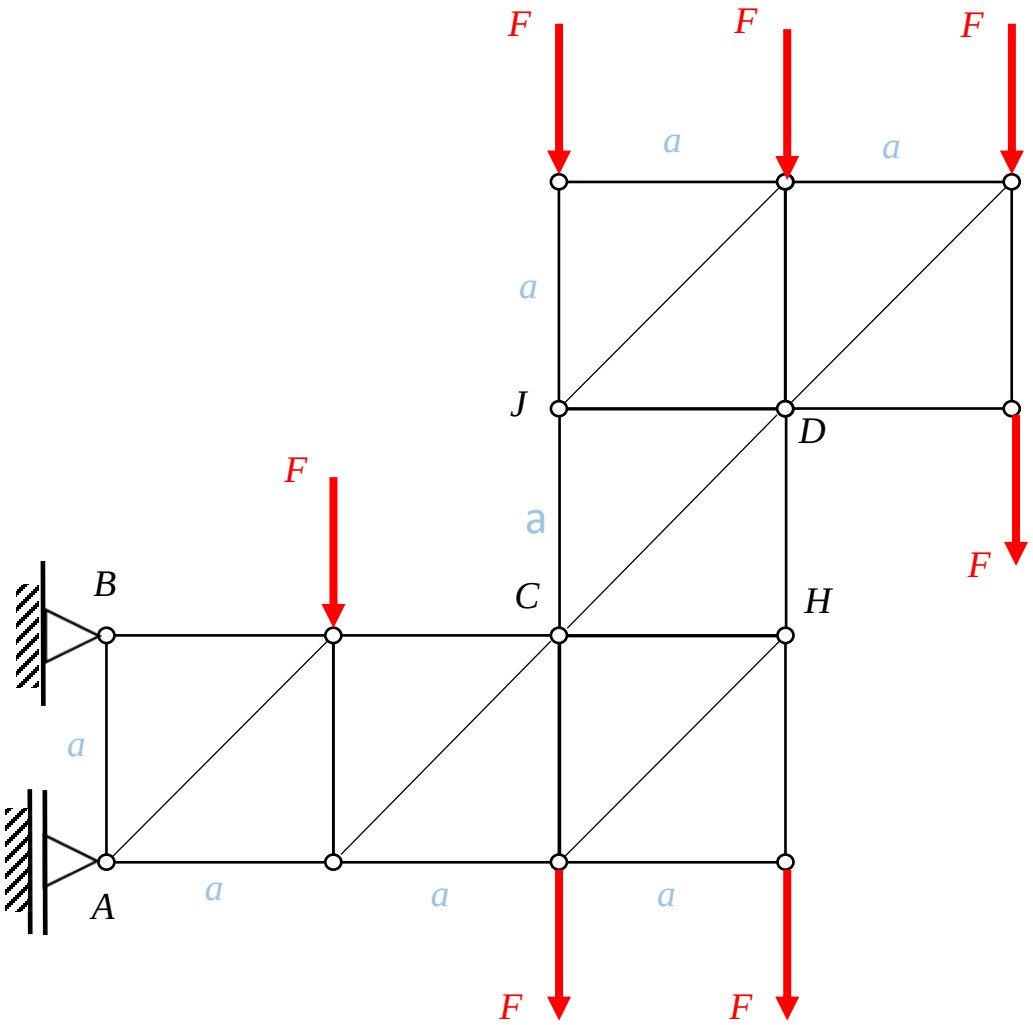
$F_{CD} = F$ (T) *Tração*

$F_{BD} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}F$ (C) *Compressão*

Exercício 4 - Método das Seções

Para a estrutura de treliça mostrada na figura, pede-se:

a) o DCL da estrutura;
b) as reações externas em A e B;
c) os esforços nas barras CJ, CD e DH indicando se de tração ou compressão;
d) a resultante de forças ativas aplicadas sobre a estrutura;
e) o momento das forças ativas em relação ao pólo A;
f) verificar se o carregamento correspondente às forças ativas é redutível a uma única força;
g) em caso afirmativo no item anterior, determinar o eixo central do sistema de forças ativas.



Exercício 4 - Método das Seções (continuação)

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_B = 7F$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore X_B.a = (Fa + 2F2a + 2F3a + 2F4a) = 19Fa$$

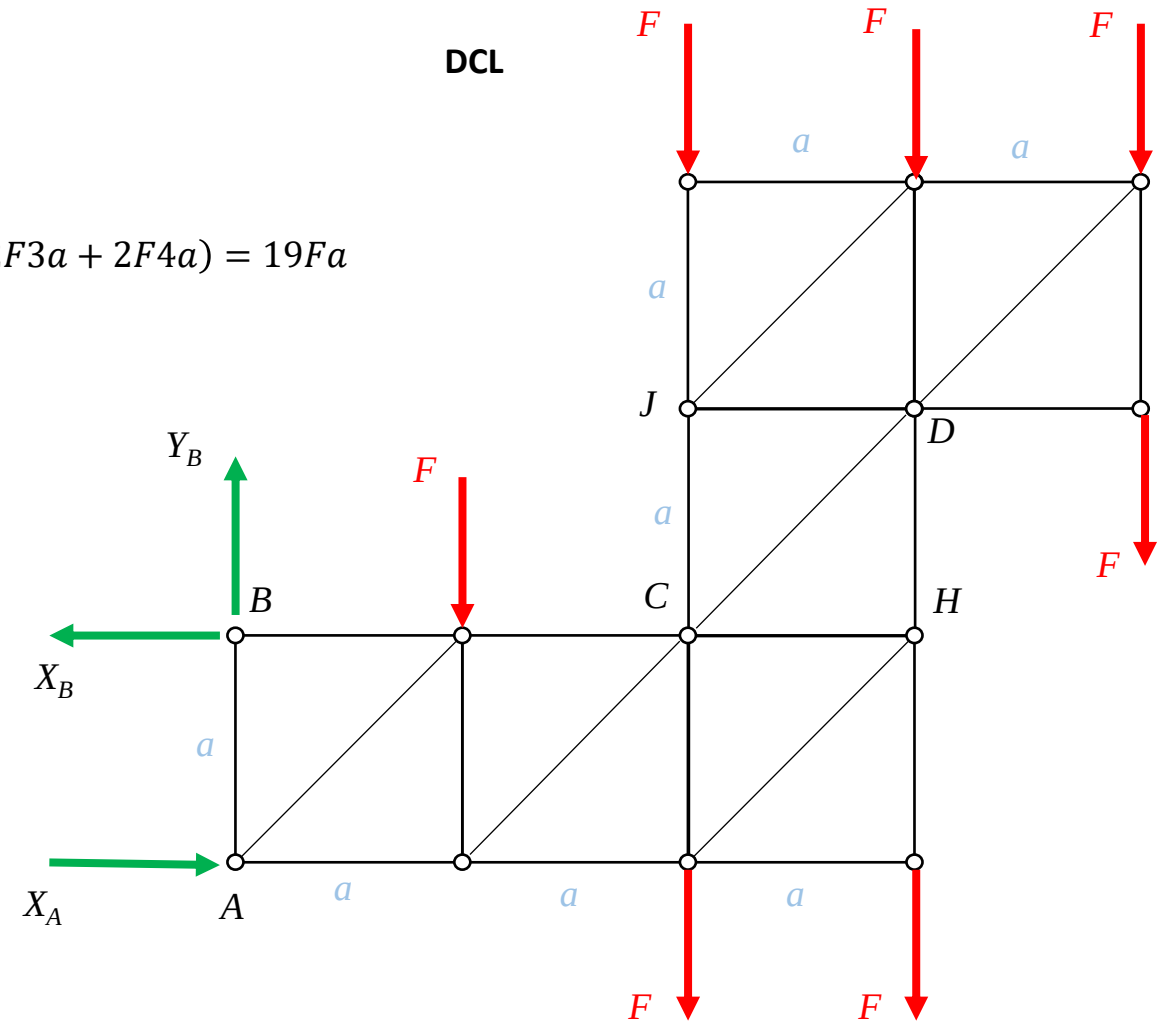
Resolvendo:

$X_B = 19F$

$X_A = 19F$

$Y_B = 7F$

DCL

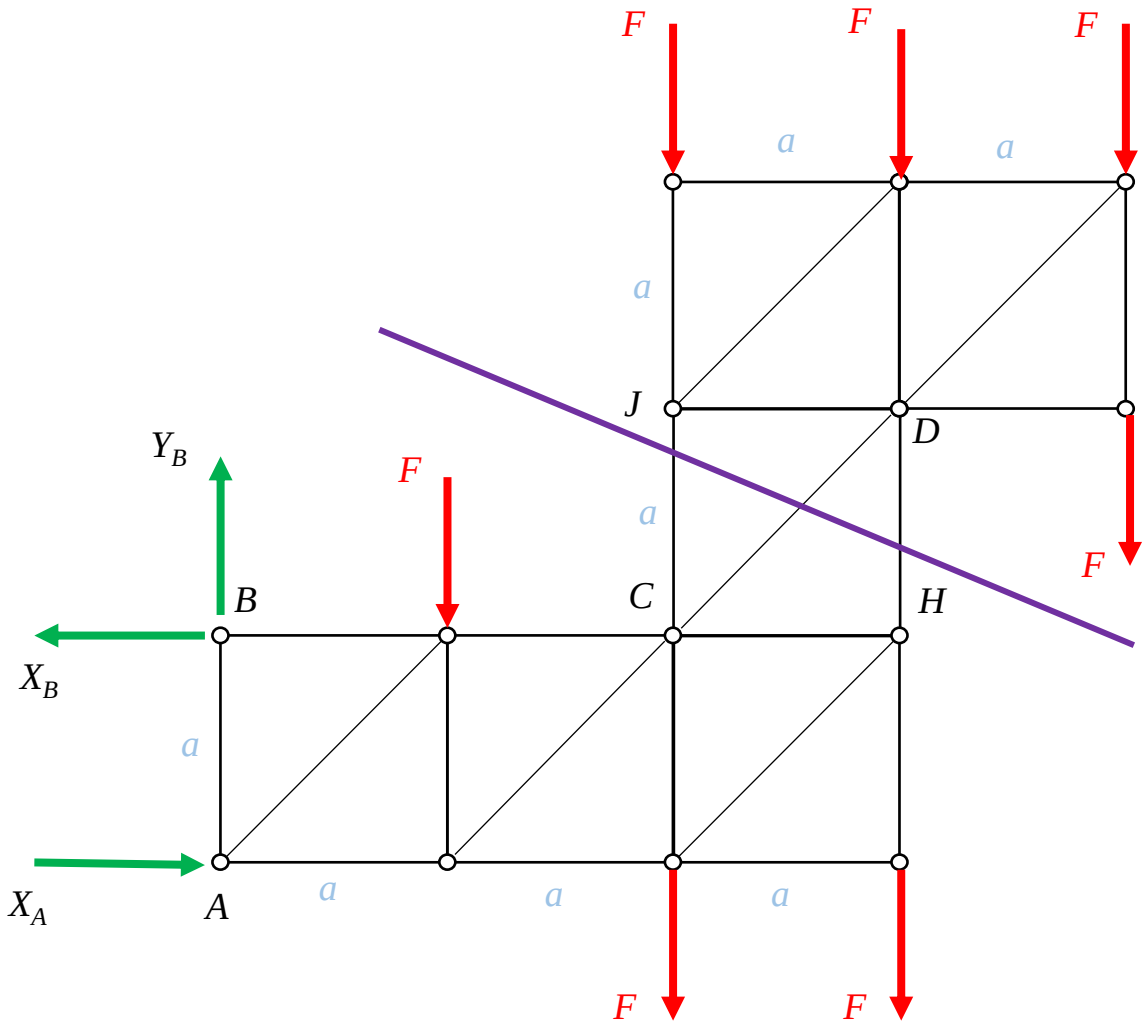


Exercício 4 - Método das Seções (continuação)

Método das Seções

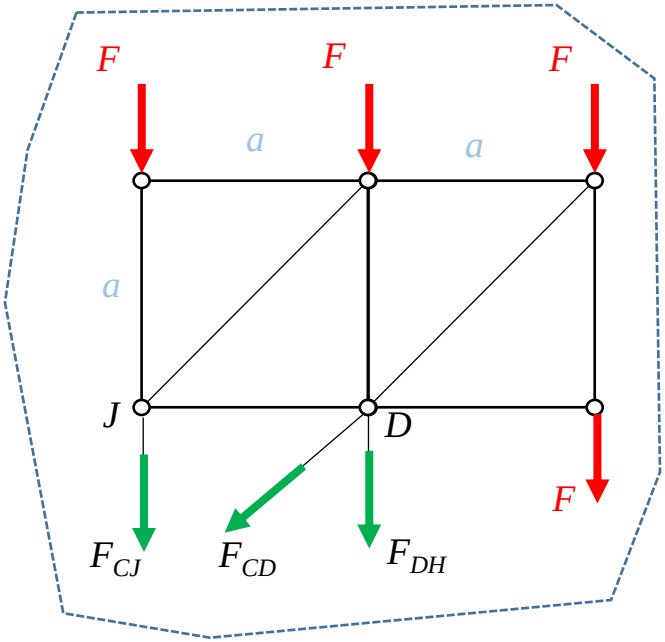
Para calcular as forças nas barras iremos aplicar o método das seções:

- **Separar a estrutura em duas metades "cortando" no máximo 3 barras.**
- **Pelo menos uma das barras "cortadas" deve ser uma das barras de interesse para as quais deseja-se calcular a força atuante na mesma.**
- **Aplicar as equações de equilíbrio para uma das duas "metades" da estrutura.**
- **Repetir o processo caso ainda restem esforços em outras barras a serem determinados.**

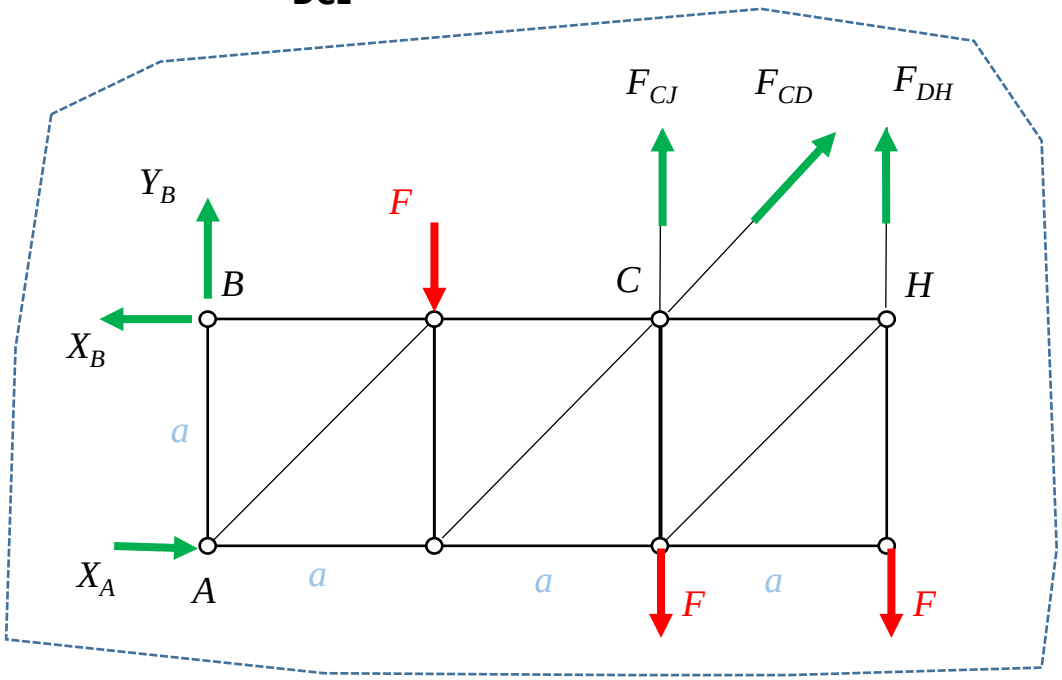


Exercício 4 - Método das Seções (continuação)

DCL



DCL



Exercício 4 - Método das Seções (continuação)

$$\sum F_x = 0 \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} F_{CD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore -F_{CJ} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{CD} - F_{DH} - 4F = 0$$

$$\sum M_{zD} = 0 \therefore F_{CJ}.a + Fa - 2Fa = 0$$

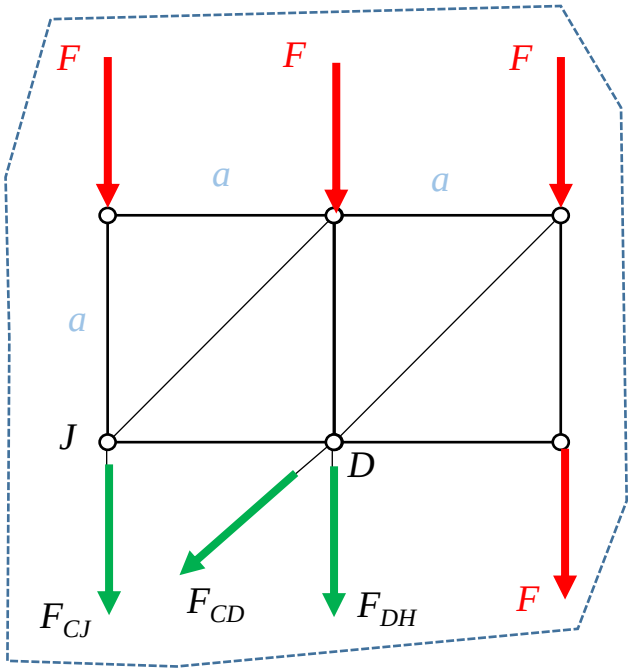
Resolvendo:

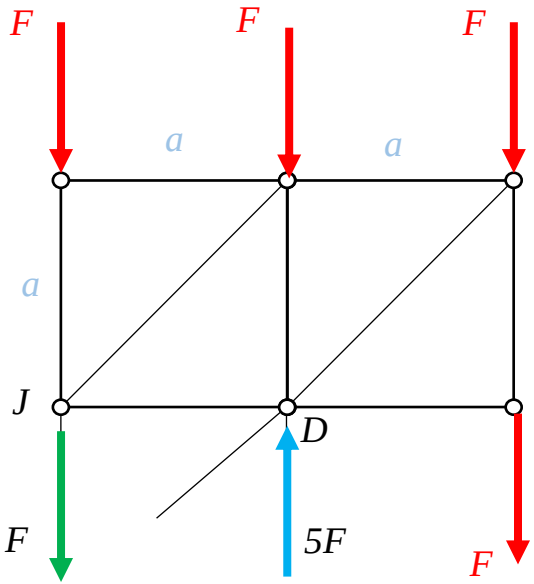
$F_{CD} = 0$

$F_{CJ} = F$ Tração

$F_{DH} = -5F$ Compressão

DCL





Exercício 4 - Método das Seções (continuação)

Resultante das forças ativas:

$$\vec{R}_{ativas} = -7F\vec{j}$$

Momento das forças ativas em relação ao pólo A:

$$\vec{M}_{A_{ativas}} = -19Fa\vec{k}$$

$$I = \vec{M}_{A_{ativas}} \cdot \vec{R}_{ativas} = 0$$

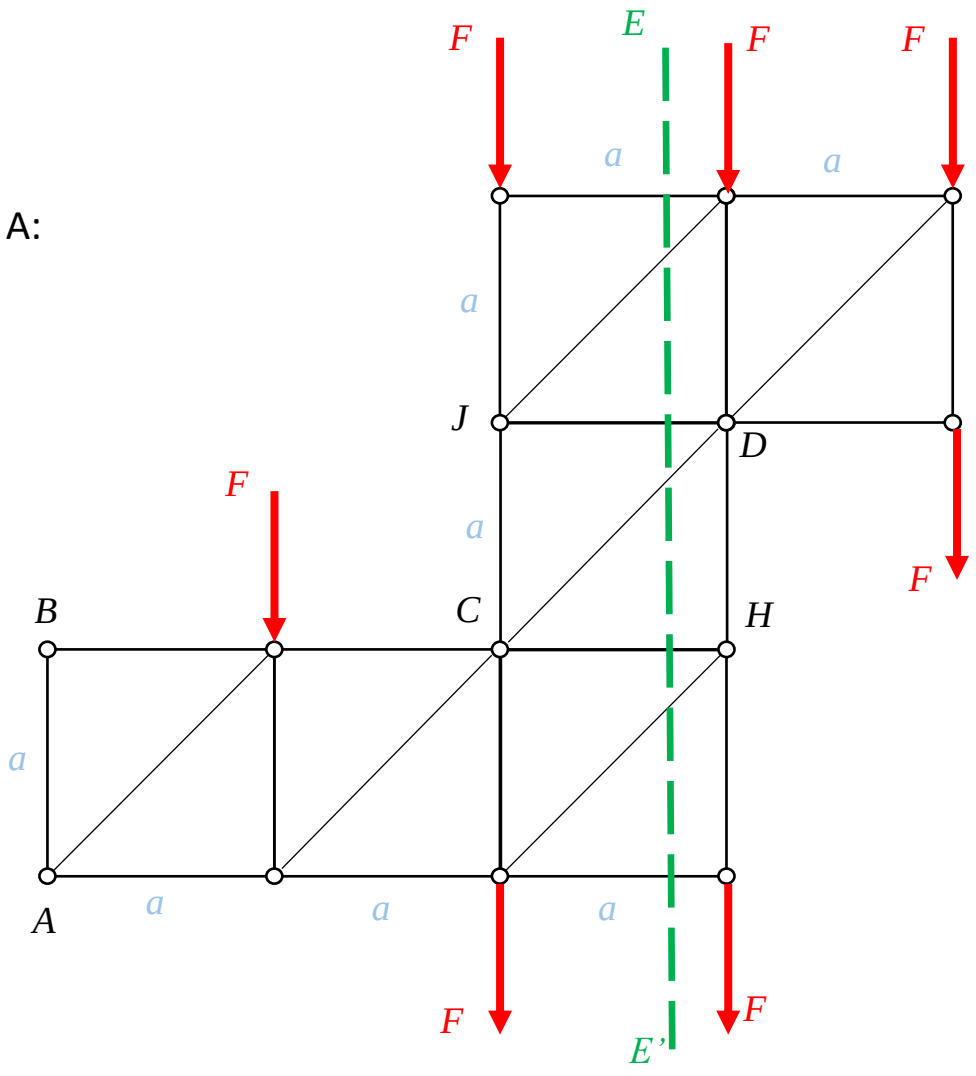
É redutível a apenas uma única força!

$$(E - A) = \frac{\vec{R}_{ativas} \wedge \vec{M}_{A_{ativas}}}{\left|\vec{R}_{ativas}\right|^2} + \lambda\vec{R}_{ativas}$$

$$(E - A) = \frac{-19a\vec{k} \wedge (-7\vec{j})}{49} + \lambda\vec{j}$$

$$(E - A) = \frac{133a}{49}\vec{i} + \lambda\vec{j}$$

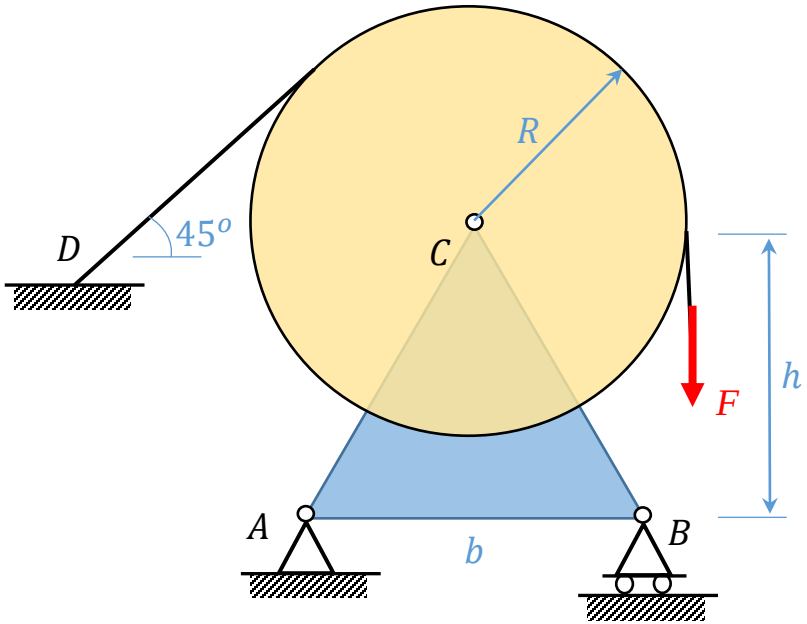
$$\left(\frac{133a}{49} \cong 2{,}71a\vec{i}\right)$$

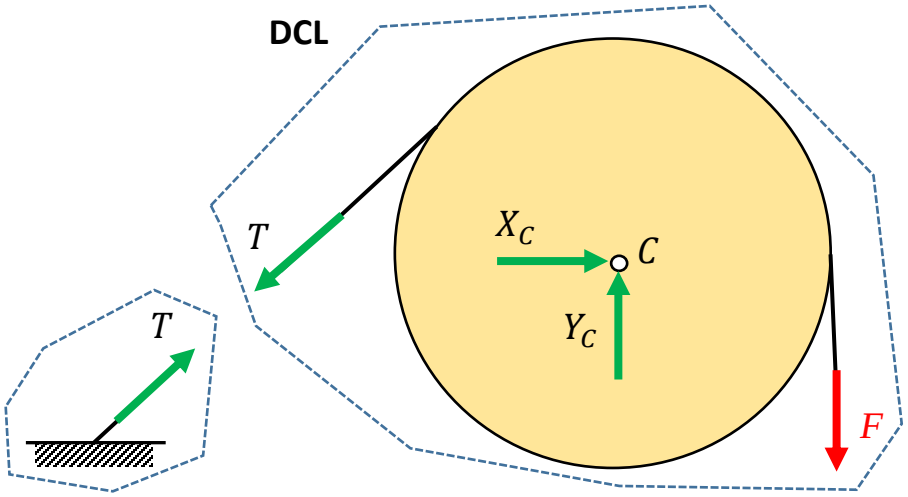


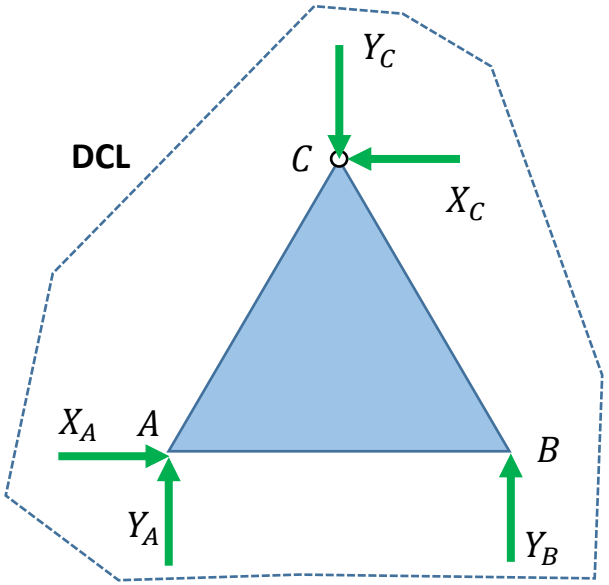
Forças em fios (cabos) e polias

Por hipótese, as <u>forças em fios são sempre de Tração</u>, isto é, têm a direção do cabo e tendem a esticá-lo. Assim, não conseguem ser submetidos a esforços de compressão ou transversais à direção do cabo.

O cabo ou fio ao passar pela polia altera a sua direção. <u>O cabo sempre tangencia a polia</u>. Obtemos assim a direção da força diretamente da geometria do problema. Normalmente teremos o centro da polia articulado (normalmente uma articulação plana).







Exercício 5 – Forças em fios e polias

Resolvendo, equações de equilíbrio para a polia:

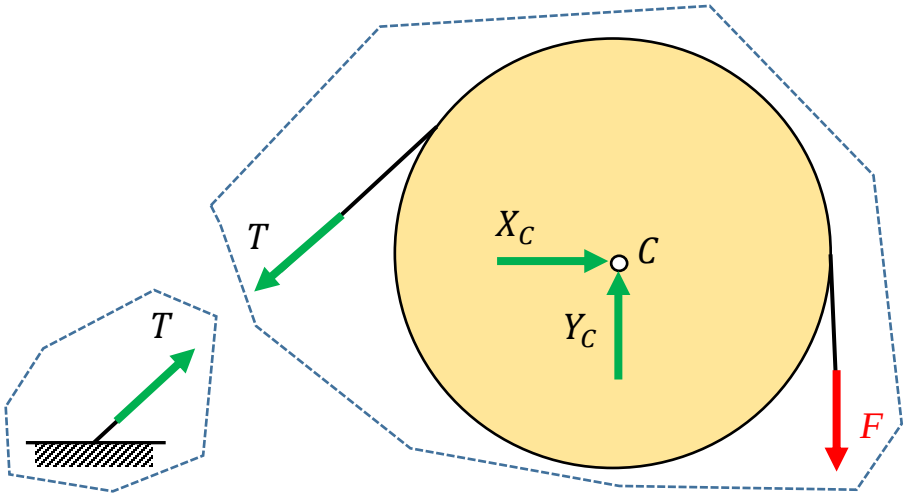
$$\sum F_x = 0 \therefore X_C - \frac{\sqrt{2}}{2}T = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_C - \frac{\sqrt{2}}{2}T - F = 0$$

$$\sum M_{zC} = 0 \therefore T.R - F.R = 0 \Rightarrow \boxed{T = F}$$

!

$$\Rightarrow \boxed{X_C = \frac{\sqrt{2}}{2}F} \Rightarrow \boxed{Y_C = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)F}$$



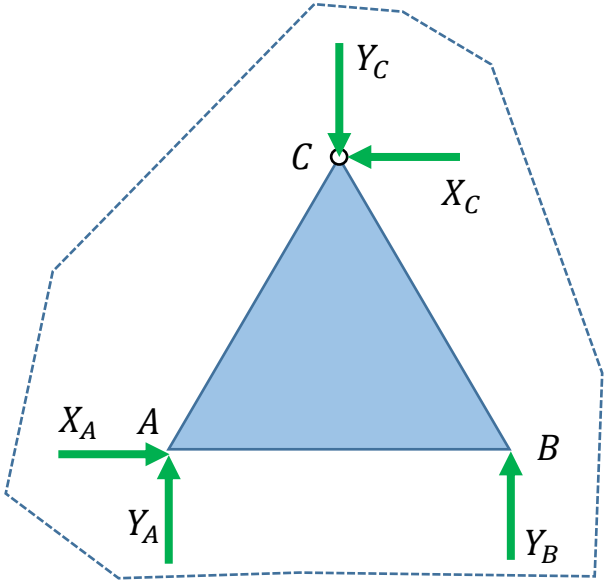
Equações de equilíbrio para a chapa triangular:

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_C = 0 \quad \Rightarrow \boxed{X_A = \frac{\sqrt{2}}{2}F}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A + Y_B - Y_C = 0$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore -Y_C.\frac{b}{2} + X_C.h + Y_B.b = 0 \Rightarrow \boxed{Y_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{h}{b}\right)F}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_A = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{h}{b}\right)F}$$



Exercício 5 – Forças em fios e polias (continuação)

$$T = F$$

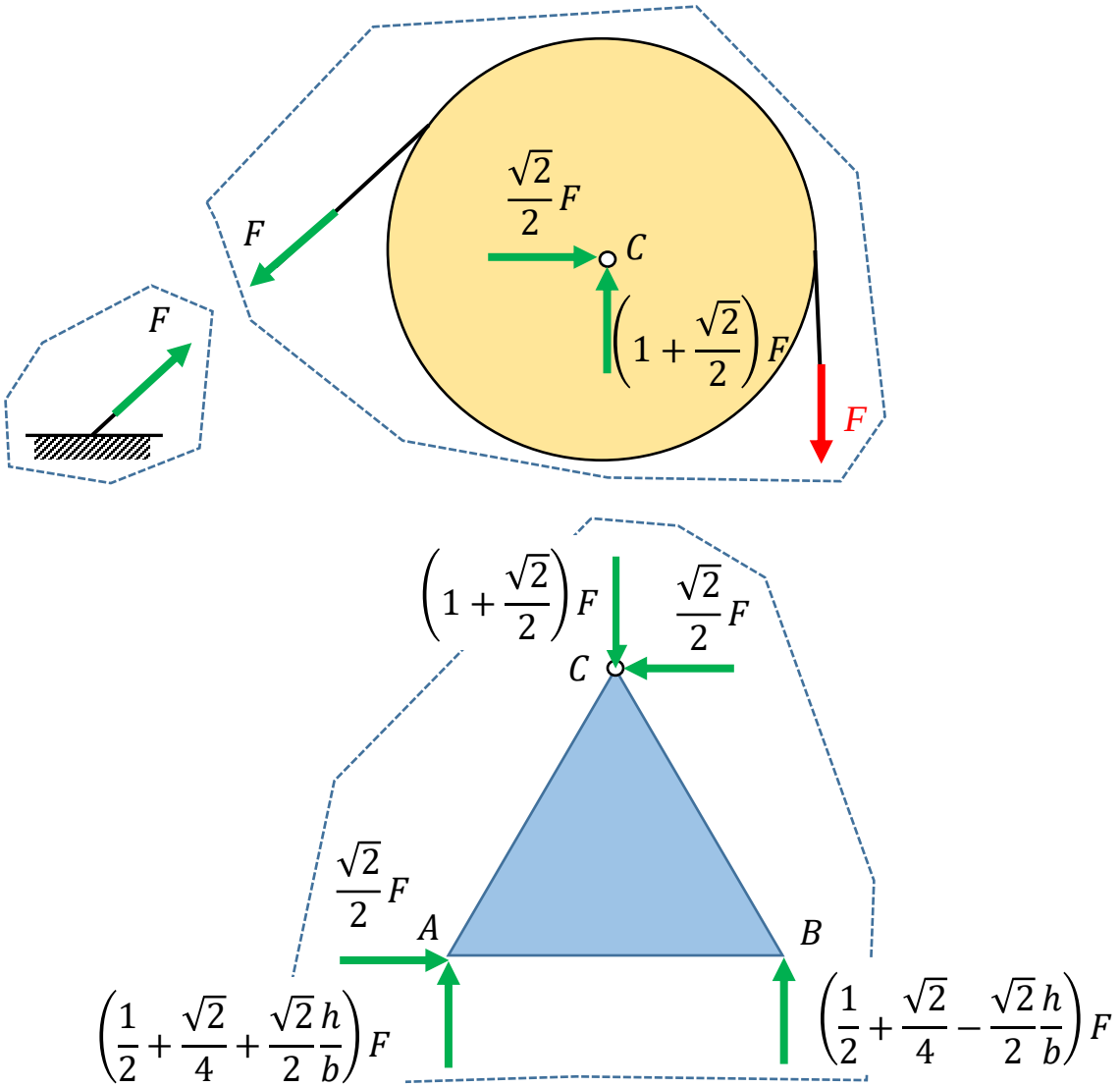
$$X_C = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

$$Y_C = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)F$$

$$X_A = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

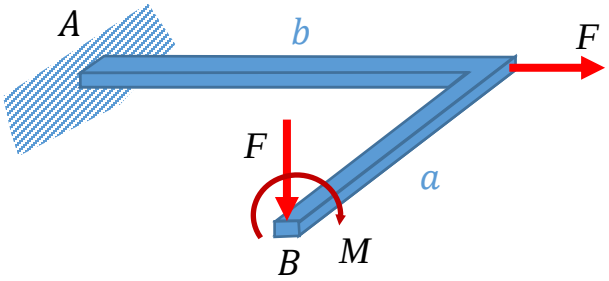
$$Y_A = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{h}{b}\right)F$$

$$Y_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{h}{b}\right)F$$



Exercício 6

Determine as reações no engaste.



Resolva numericamente para:

$a = 2\ [m]$

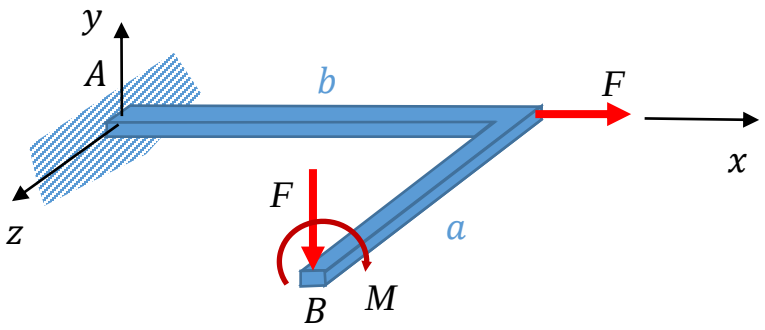
$b = 3{,}5\ [m]$

$F = 1000\ [N]$

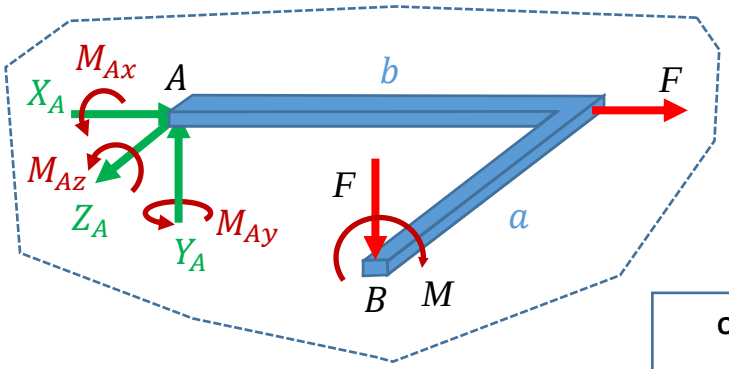
$M = 350\ [Nm]$

Exercício 6 (continuação)

Determine as reações no engaste.



DCL



$$\sum F_x = 0 \therefore X_A + F = 0 \Rightarrow \quad \boxed{X_A = -F}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_A - F = 0 \Rightarrow \quad \boxed{Y_A = F}$$

$$\sum F_z = 0 \therefore Z_A = 0 \Rightarrow \quad \boxed{Z_A = 0}$$

$$\sum M_{xA} = 0 \therefore F.a + M_{Ax} = 0 \Rightarrow \boxed{M_{Ax} = -F.a}$$

$$\sum M_{yA} = 0 \therefore M_{Ay} = 0 \Rightarrow \quad \boxed{M_{Ay} = 0}$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore -F.b - M + M_{Az} = 0 \Rightarrow \quad \boxed{M_{Az} = M + F.b}$$

Obs.: Alternativamente, para quem preferir, obtendo as equações dos momentos de forma vetorial:

$$\vec{M}_A = (B - A) \wedge (-F\vec{j}) + (C - A) \wedge (F\vec{i}) - M\vec{k} + M_{Ax}\vec{i} + M_{Ay}\vec{j} + M_{Az}\vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A = (F.a + M_{Ax})\vec{i} + M_{Ay}\vec{j} + (-F.b - M + M_{Az})\vec{k} = \vec{0}$$

Exercício 6 (continuação)

$X_A = -F$

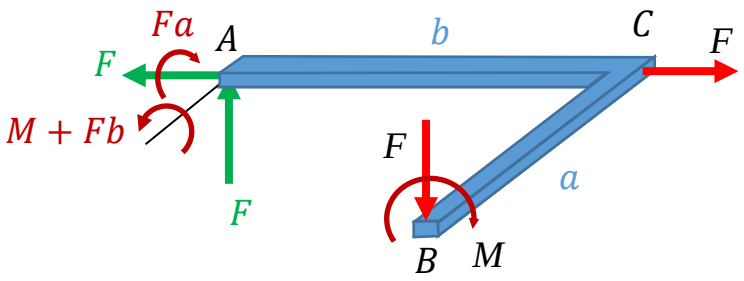
$Y_A = F$

$Z_A = 0$

$M_{Ax} = -F.a$

$M_{Ay} = 0$

$M_{Az} = M + F.b$



Resolvendo numericamente para:

$a = 2\ [m]$

$b = 3{,}5\ [m]$

$F = 1000\ [N]$

$M = 350\ [Nm]$

$X_A = -1000\ [N]$

$Y_A = 1000\ [N]$

$Z_A = 0$

$M_{Ax} = -2000\ [Nm]$

$M_{Ay} = 0$

$M_{Az} = 3850\ [Nm]$

Exercício 6 (continuação)

Observações:

Reflita sobre a diferença entre:

$$\sum M_{xA} \quad \textbf{e} \quad M_{Ax}$$

$$\sum M_{yA} \quad \textbf{e} \quad M_{Ay}$$

$$\sum M_{zA} \quad \textbf{e} \quad M_{Az}$$

Sugestão:

Resolva novamente este problema mas agora fazendo equilíbrio de momentos em relação a eixos que passem pelo ponto B, isto é:

$$\sum M_{xB} = 0$$

$$\sum M_{yB} = 0$$

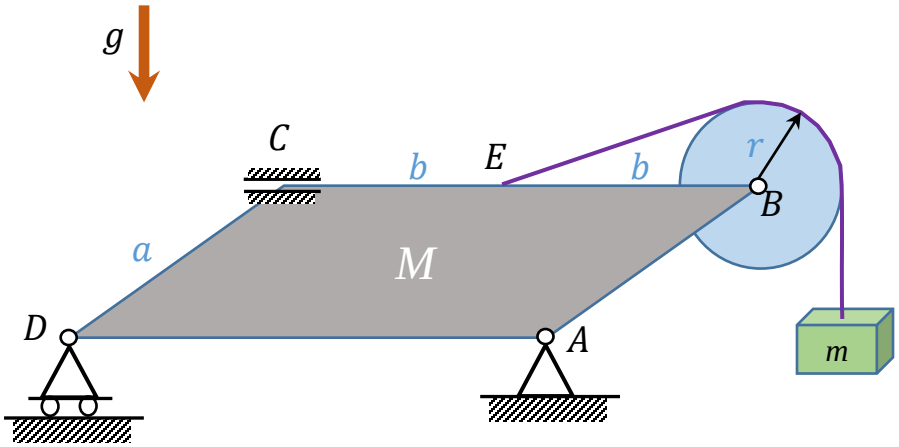
$$\sum M_{zB} = 0$$

Certamente você deve chegar nos mesmos resultados!

Exercício 7

Para a placa ABCD de massa M, articulada em A, apoiada em D, com um anel em C e a polia, de peso desprezível, articulada em B, sustentando um corpo de massa m por meio de um fio ideal, pede-se:

a) o DCL do sistema explodido;
b) as reações nos vínculos externos;
c) as forças que a polia descarrega na placa;
d) a tração no fio.



Resolva numericamente para:

$r = 0{,}7\ [m]$

$a = 2\ [m]$

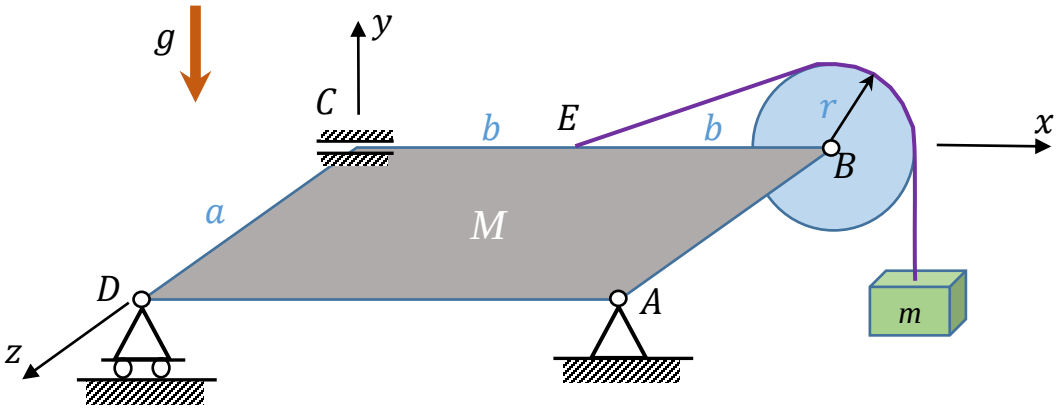
$b = 3\ [m]$

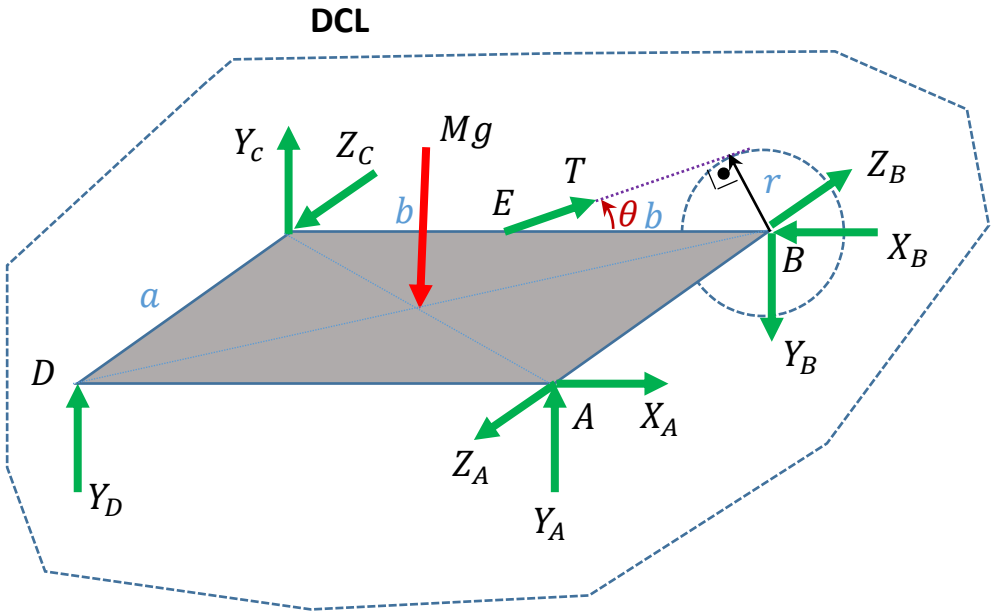
$M = 50\ [kg]$

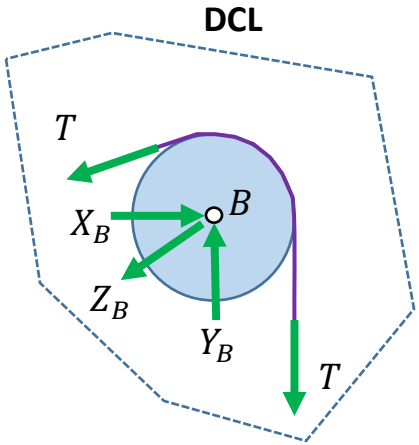
$m = 75\ [kg]$

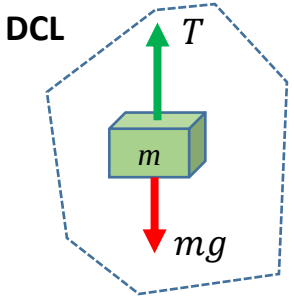
$g = 9{,}81\ [m/s^2]$

Exercício 7 (continuação)



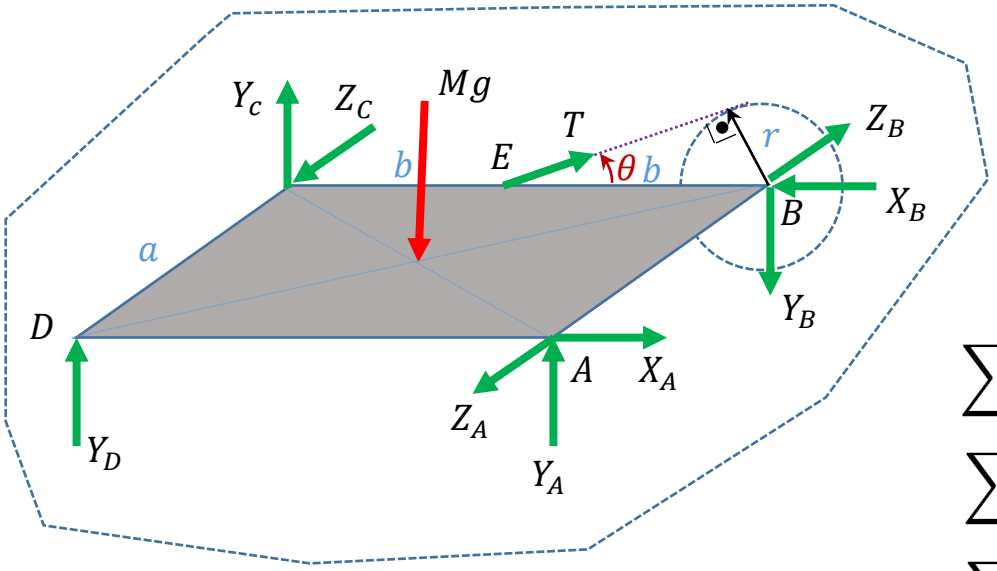




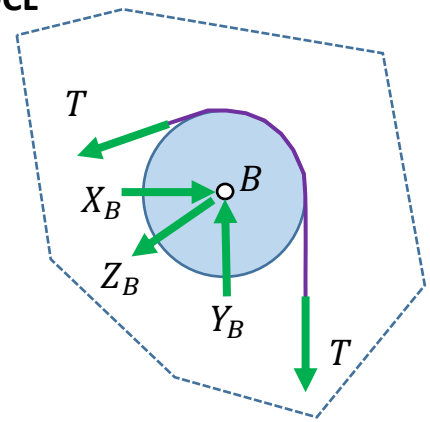


Exercício 7 (continuação)

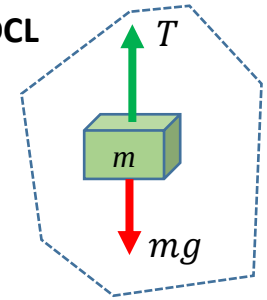
DCL



DCL



DCL



$$\theta = arcsen\frac{r}{b}$$

Na carga de massa *m*:

$$\sum F_y = 0 \therefore T - mg = 0 \Rightarrow \boxed{T = mg}$$

Na polia:

$$\sum F_x = 0 \therefore X_B - Tcos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{X_B = mgcos\theta}$$

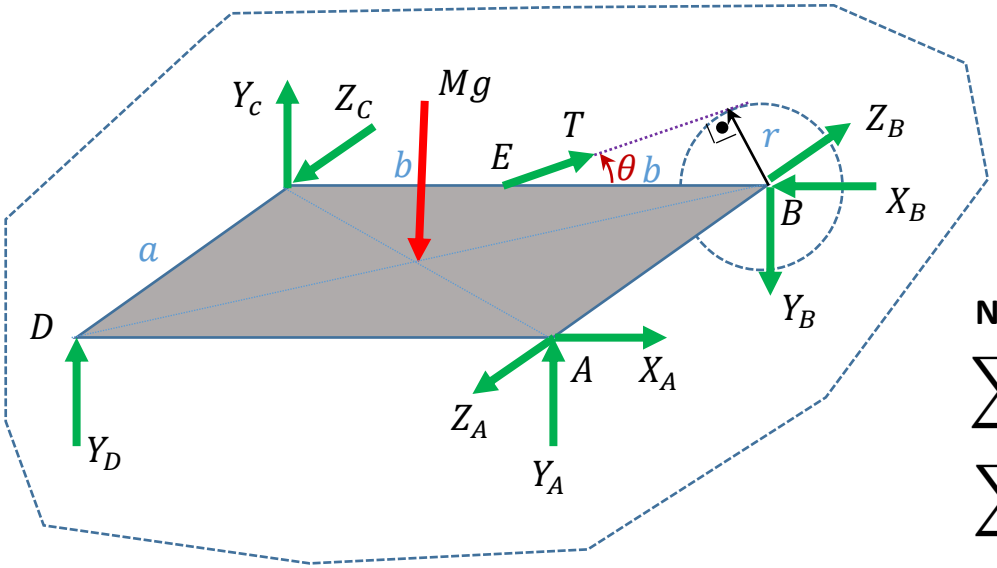
$$\sum F_y = 0 \therefore Y_B - T - Tsen\theta = 0 \Rightarrow \boxed{Y_B = mg(1 + sen\theta)}$$

$$\sum F_z = 0 \therefore Z_B = 0 \Rightarrow \boxed{Z_B = 0}$$

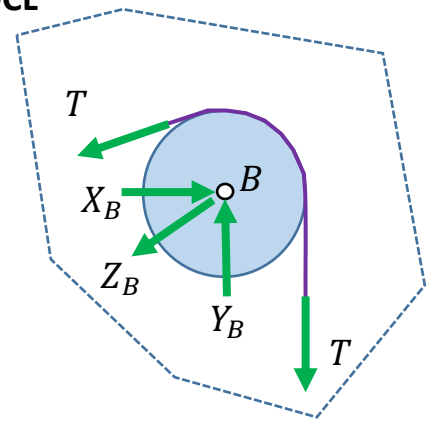
$$\sum M_{zB} = 0 \therefore T.r - T.r = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Exercício 7 (continuação)

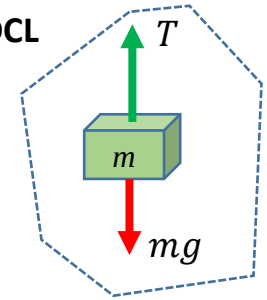
DCL



DCL



DCL



Na placa:

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_B + T\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_D + Y_A - Y_B + T\,sen\theta + Y_C - Mg = 0$$

$$\sum F_z = 0 \therefore Z_A - Z_B + Z_C = 0$$

$$\sum M_{xC} = 0 \therefore -Y_D.a - Y_A.a + Mg.\frac{a}{2} = 0$$

$$\sum M_{yC} = 0 \therefore X_A.a - Z_A.2b + Z_B.2b = 0$$

$$\sum M_{zC} = 0 \therefore Y_A.2b - Y_B.2b + T\,sen\theta.b - Mg.b = 0$$

Exercício 7 (continuação)

Resolvendo o sistema de equações, sendo que:

$\theta = arcsen\frac{r}{b}$ $T = mg$

$X_B = mgcos\theta$ $Y_B = mg(1 + sen\theta)$ $Z_B = 0$

$$\sum F_x = 0 \therefore X_A - X_B + Tcos\theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_D + Y_A - Y_B + Tsen\theta + Y_C - Mg = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \therefore Z_A - Z_B + Z_C = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_{xC} = 0 \therefore -Y_D.a - Y_A.a + Mg.\frac{a}{2} = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_{yC} = 0 \therefore X_A.a - Z_A.2b + Z_B.2b = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_{zC} = 0 \therefore Y_A.2b - Y_B.2b + Tsen\theta.b - Mg.b = 0 \quad (6)$$

de(1): $X_A = 0$

de(5): $Z_A = 0$

de(3): $Z_C = 0$

de(6): $Y_A = mg\left(1 + \frac{1}{2}sen\theta\right) + \frac{1}{2}Mg$

de(4): $Y_D = -mg\left(1 + \frac{1}{2}sen\theta\right)$

de(2): $Y_C = mg + \frac{1}{2}Mg$

Exercício 7 (continuação)

Resolvendo o sistema de equações, sendo que:

$\theta = arcsen\frac{r}{b}$ $T = mg$

$X_B = mgcos\theta$ $Y_B = mg(1 + sen\theta)$ $Z_B = 0$

$X_A = 0$

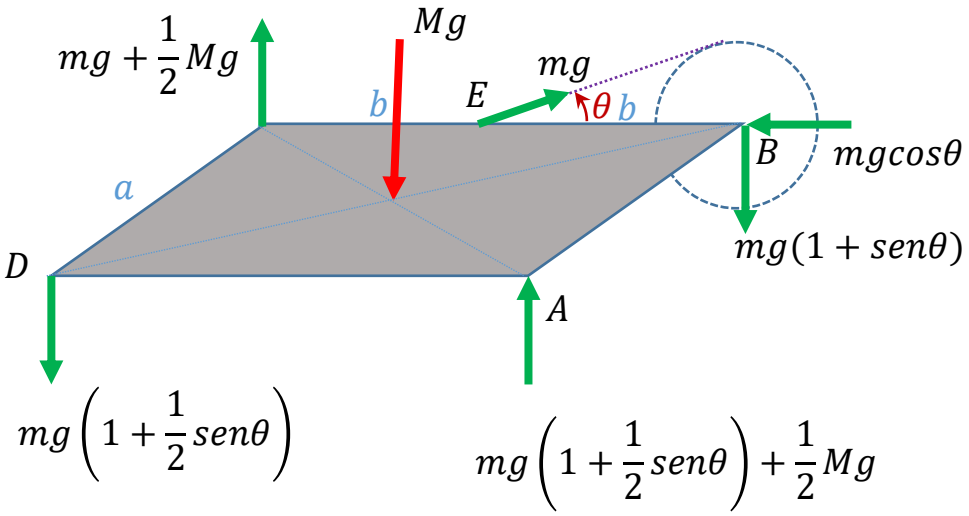
$Z_A = 0$

$Z_C = 0$

$Y_A = mg\left(1 + \frac{1}{2}sen\theta\right) + \frac{1}{2}Mg$

$Y_D = -mg\left(1 + \frac{1}{2}sen\theta\right)$

$Y_C = mg + \frac{1}{2}Mg$



Exercício 7 (continuação)

Resolvendo numericamente para:

$r = 0{,}7\ [m]$

$a = 2\ [m]$

$b = 3\ [m]$

$M = 50\ [kg]$

$m = 75\ [kg]$

$g = 9{,}81\ [m/s^2]$

$$\theta = arcsen\frac{r}{b}$$

$$\theta = 0{,}236\ rad = 13{,}5^o$$

$$T = mg$$

$$T = 736\ [N]$$

$$X_B = mgcos\theta$$

$$X_B = 715\ [N]$$

$$Y_B = mg(1 + sen\theta)$$

$$Y_B = 907\ [N]$$

$$Z_B = 0$$

$$X_A = 0$$

$$Z_A = 0$$

$$Z_C = 0$$

$$Y_A = mg\left(1 + \frac{1}{2}sen\theta\right) + \frac{1}{2}Mg$$

$$Y_A = 1067\ [N]$$

$$Y_D = -mg\left(1 + \frac{1}{2}sen\theta\right)$$

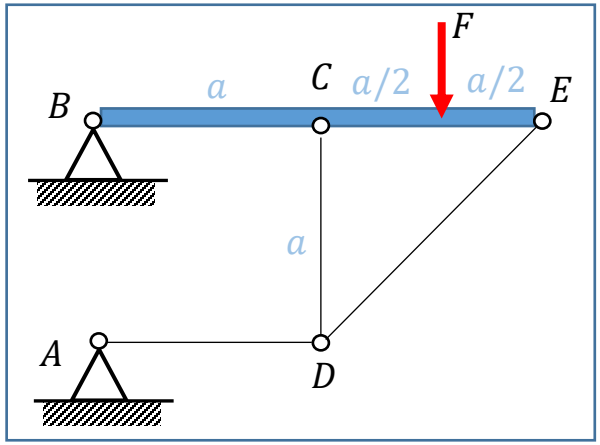
$$Y_D = -822\ [N]$$

$$Y_C = mg + \frac{1}{2}Mg$$

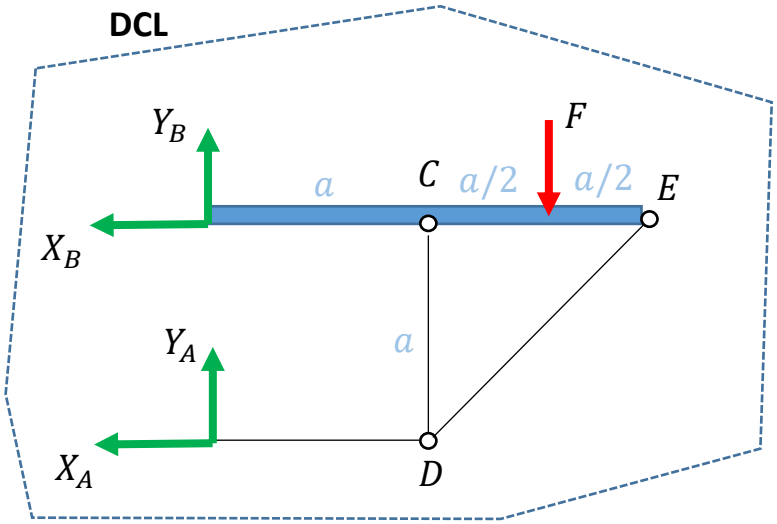
$$Y_C = 613\ [N]$$

Exercício 8

Faça o diagrama de corpo livre da estrutura:

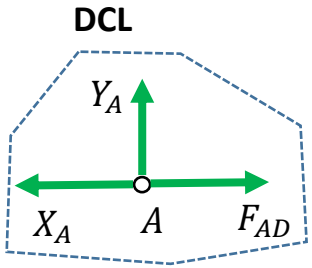


DCL

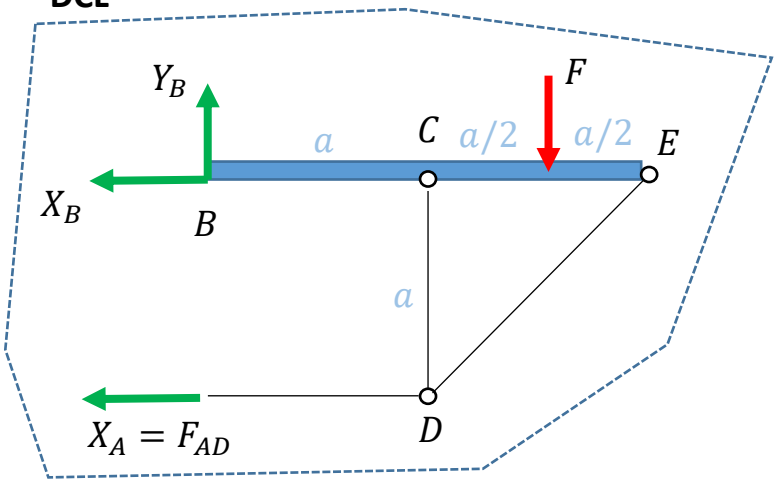


Aparentemente hiperestático, mas fazendo-se o equilíbrio do nó A e sabendo-se que a barra AD é uma barra de treliça, conclui-se que a reação em A é apenas horizontal e igual à força na barra AD:

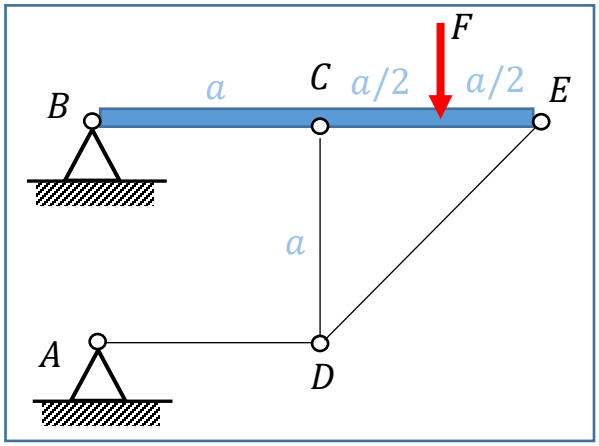
DCL



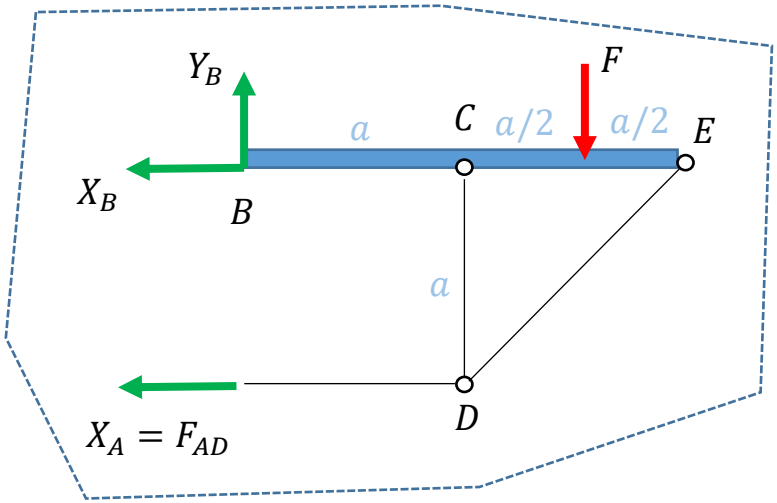
DCL



Exercício 8



DCL



Calculando as forças de reação em A e B:

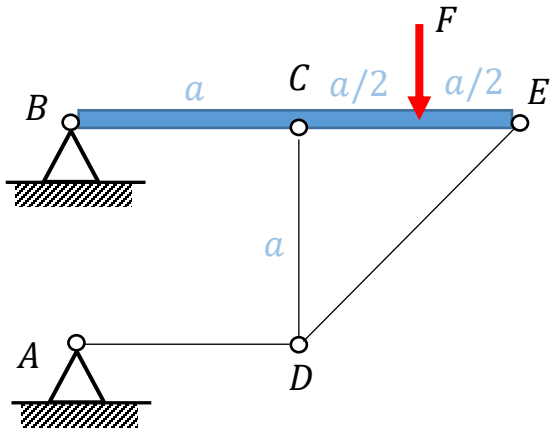
$$\sum F_x = 0 \therefore -X_B - X_A = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_y = 0 \therefore Y_B - F = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{Y_B = F}$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore X_B . a - F . \frac{3a}{2} = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{X_B = \frac{3F}{2}}$$

Substituindo em (1): $\boxed{X_A = -\frac{3F}{2}}$

Exercício 8



Barra BCE é uma barra de treliça? <S> ou <N>
Não, pois tem cargas intermediárias.

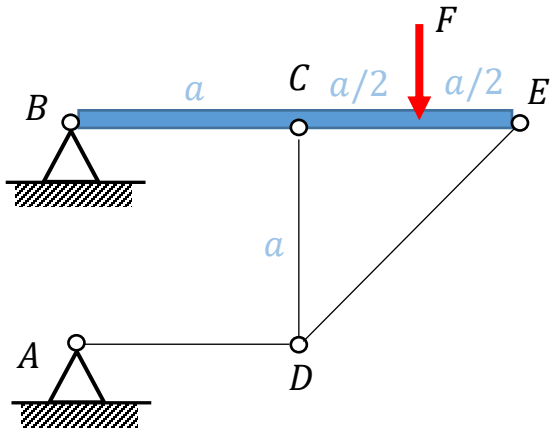
Barra AD é uma barra de treliça? <S> ou <N>
Sim, tem extremidades articuladas e sem carga intermediária.

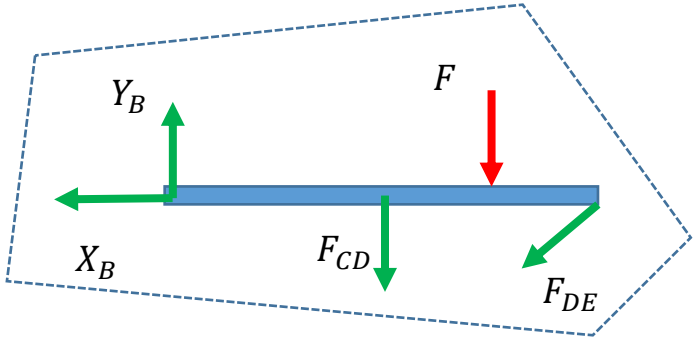
Barra CD é uma barra de treliça? <S> ou <N>
Sim, tem extremidades articuladas e sem carga intermediária.

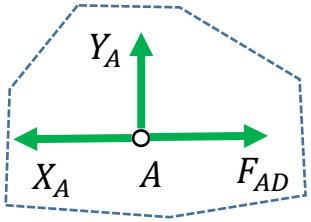
Barra DE é uma barra de treliça? <S> ou <N>
Sim, tem extremidades articuladas e sem carga intermediária.

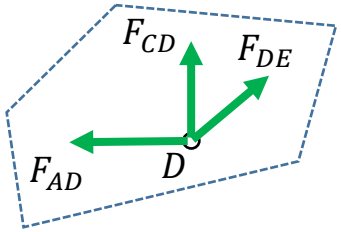
Exercício 8

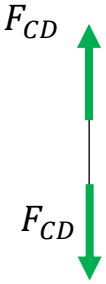
Fazendo os diagramas de corpo livre da estrutura explodida:

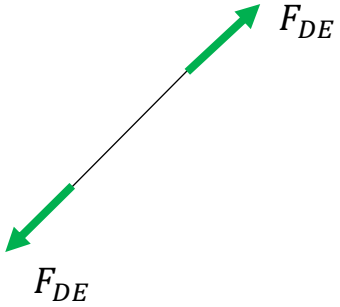




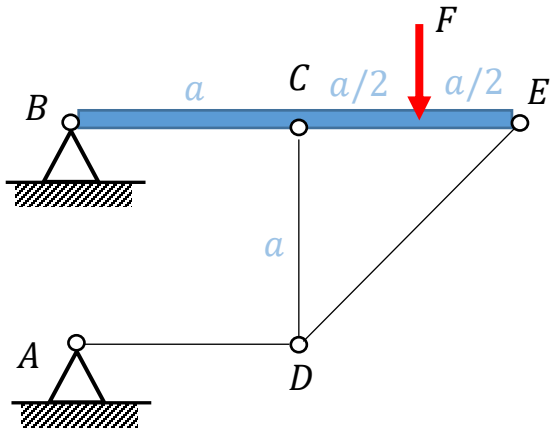








Exercício 8

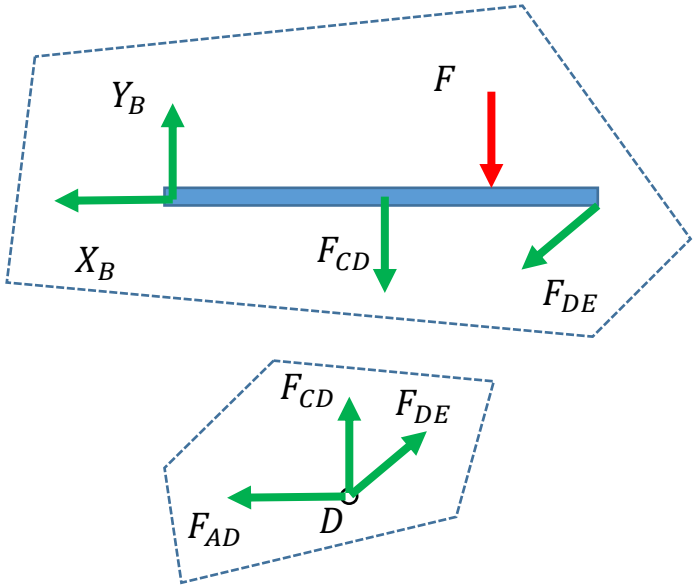


Calculando as forças atuantes nas barras AD, DC, DE e BCE, indicando se de tração ou compressão quando for pertinente:

Temos já calculados:

$$\boxed{Y_B = F} \qquad \boxed{X_B = \frac{3F}{2}} \qquad F_{AD} = X_A \Rightarrow \boxed{F_{AD} = -\frac{3F}{2}}$$

(C) compressão



Do equilíbrio do nó D:

$$\sum F_x = 0 \therefore -F_{AD} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{DE} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{DE} = -\frac{3\sqrt{2}F}{2}}$$

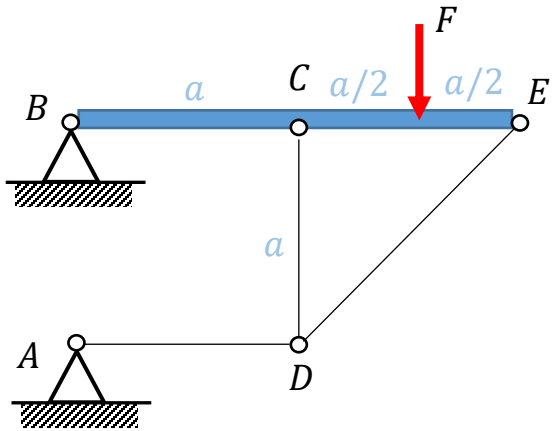
(C) compressão

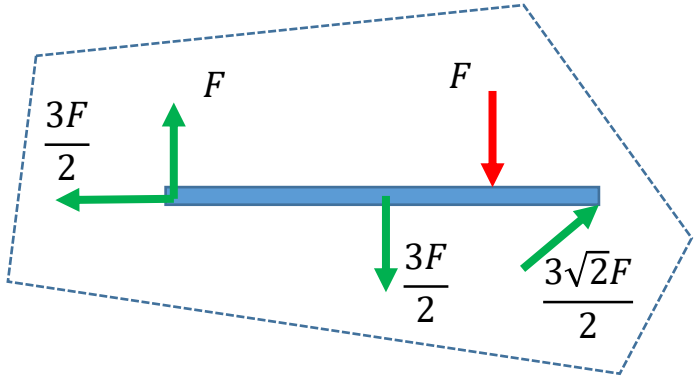
$$\sum F_y = 0 \therefore F_{CD} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{DE} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{CD} = \frac{3F}{2}}$$

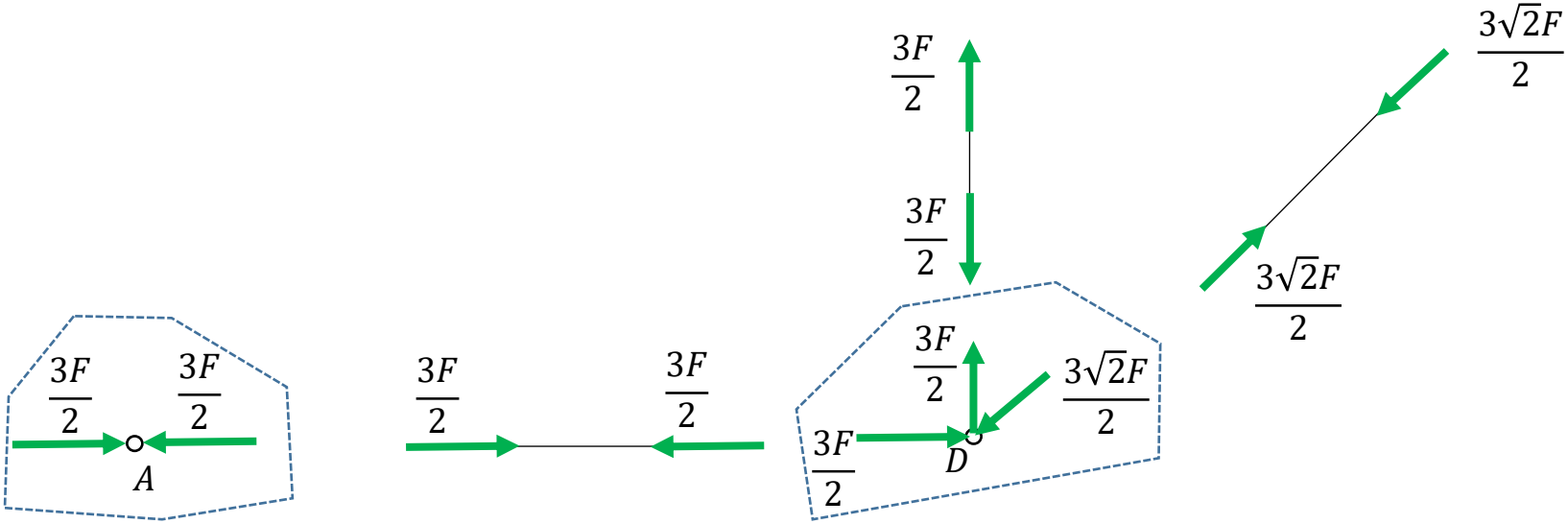
(T) tração

Exercício

Resultado:







Duvidem
Pensem
Comuniquem
Perguntem
Cometam erros
Aprendam dos seus erros
... e mais importante,
Tenham alegria em aprender.

Estupidez:
Você pensa que sabe tudo, sem questionar.

Inteligência:
Você questiona tudo que você pensa que sabe.

Aproveite cada minuto,
porque o tempo não volta...
O que volta é a vontade de voltar no tempo.