Curso de Espaços de Hilbert e Equações Diferenciais Parciais

Ementa

Abaixo segue a ementa do novo curso de pós-graduação aprovado no dia 18 de junho.

Objetivo:
O curso tem como meta introduzir conceitos de análise funcional visando aplicações concretas ao estudo de EDPs. Não é um curso padrão de análise funcional, já que não temos a intenção de fazer uma apresentação de todos os tópicos geralmente apresentados nestes cursos. Nosso objetivo é fazer uma apresentação mais curta, porém completa, dos resultados da teoria de espaços de Hilbert separáveis necessários para lidar de forma rigorosa com as equações diferenciais parciais (EDPs) lineares consagradas: Laplace, calor e onda. Essas aplicações, em geral, não são vistas nos cursos introdutórios de análise funcional.

Justificativa:
Nosso intuito é oferecer um curso para que alunos de diversas áreas adquiram um conhecimento mínimo de análise funcional e, ao mesmo tempo, saibam como esses conceitos podem ser aplicados. O material estudado deve auxiliar os alunos que forem trabalhar com EDPs (e EDPs numéricas) a darem os primeiros passos em seus projetos de pesquisa.

Conteúdo:
1) Espaços de Hilbert separáveis: Base ortonormal, Projeção ortogonal, funcionais lineares e funções bilineares contínuas (Teorema de Riesz e de Lax-Milgram), Convergência forte e fraca, Operadores limitados e compactos, Teorema espectral para operadores auto-adjuntos e compactos.
2) Espaços L^2. *Aplicação: série e transformada de Fourier.*
3) Espaços de Sobolev H^k, $k \in \mathbb{N}_0$, em intervalos de $\mathbb{R}$. *Aplicação: problema de Sturm-Liouville.*
4) Espaços de Sobolev H^k, $k \in \mathbb{N}_0$, em abertos de $\mathbb{R}^n$. *Aplicação: problema de Poisson com condições de Dirichlet (usaremos a formulação variacional).*
5) Operadores auto-adjuntos com resolvente compacto. *Aplicação: equação do calor e da onda.*

Forma de avaliação:
Provas (eventualmente listas)

Bibliografia:
1) H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.
2) L. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS.

Sumário

CAPíTULO 1

Três EDPs fundamentais

Dentre as inúmeras equações diferenciais parciais (EDPs) que modelam fenômenos físicos, focaremos nosso curso principalmente em três delas: A equação de Laplace/Poisson, a equação da onda e a equação do calor. Acreditamos que o estudo de alguns de resolução para essas equações são fundamentais para a compreensão de diversas outras equações diferenciais parciais aplicadas.

Vamos dedicar esse primeiro capítulo a dedução dessas equações. Não estaremos tão interessados em deixar as contas totalmente rigorosas, mas somente dar uma ideia de como tais equações surgem. Uma intuição sobre aspectos físicos de EDPs ajudam a entender melhor a teoria e evitam de torná-la uma sucessão de resultados desconectados. Afinal, uma boa parte da teoria de EDPs surgiu para entender qualitativamente soluções de equações diferenciais e usar essa compreensão para o estudo de problemas físicos, geométricos entre tantos outros.

1.1. Equação do calor

A equação do calor em sua forma mais simples é dada pela expressão abaixo:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\Delta u(t,x),$$

em que $k > 0$ é o coeficiente de difusão térmica. Para facilitar, às vezes consideramos $k = 1$.

A variável $t \geq 0$ corresponde ao tempo e $x = (x_1, ..., x_n)$ ao espaço e pertence a um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. A função $u : [0, \infty[\times U \to \mathbb{R}$ é chamada de solução da equação do calor. Na expressão acima, o operador de Laplace Δ, também chamado de Laplaciano, age apenas nas variáveis x, ou seja,

$$\Delta u(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t,x).$$

Vamos agora deduzir a equação do calor. Seguiremos de maneira próxima o livro do Larsson e Thomee.

1.1.1. Dedução da equação do calor. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Vamos supor que U represente um corpo. Gostaríamos de deduzir uma equação que descrevesse a temperatura do corpo ao longo do tempo.

Nosso argumento se baseará na conservação de energia. Desta forma, em cada aberto $U_0 \subset U$ de classe C^1, temos a seguinte lei:

"A taxa de variação da energia total em U_0 é igual ao fluxo de energia que entra em U_0 mais a taxa de calor produzido por fontes de energia em U_0."

Para escrever a lei acima de maneira matematicamente precisa, iremos denotar por:

1) e para a densidade de energia (lembramos que em unidades do sistema internacional, e tem unidade J/m^3).

2) j para o vetor do fluxo de energia ($J/(m^2 s)$).

3) $f(x,t)$ para a densidade de energia gerada pelas fontes de calor por segundo ($J/(m^3 s)$).

Assim temos que

$\int_{U_0} e(x,t)dx$	é a energia total em U_0.
$-\int_{\partial U_0} j(x,t).\nu(x)dx$	é o fluxo de energia que entra em U_0.
$\int_{U_0} f(x,t)dx$	é a energia por segundo poduzida em U_0 devido às fontes internas.

Note o sinal $-$ em $-\int_{\partial U_0} j(x,t).\nu(x)dx$ é necessário, pois, como a normal ν aponta para fora, se quisermos o fluxo para dentro, precisamos colocar o sinal menos.

Assim, o balanço de energia se torna:

$$\frac{d}{dt}\int_{U_0} e(x,t)dx = -\int_{\partial U_0} j(x,t).\nu(x)dx + \int_{U_0} f(x,t)dx.$$

Gostaríamos, no entanto, de achar uma equação para a temperatura, que será denotada por u (tem unidade K no sistema internacional). Para tanto, vamos supor que a temperatura e a densidade de energia sejam proporcionais em cada ponto. Seja $\rho(x)$ a densidade do material (em unidades Kg/m^3). Assim, assumiremos que $e(t,x) = \sigma(x)\rho(x)u(t,x)$, em que a função σ é chamada de densidade de calor específico e depende do material do qual o corpo consiste.

Lembrando que o gradiente aponta para a direção de maior crescimento, é razoável supor válida a lei de Fourier: o fluxo de calor aponta na direção em que a temperatura está decrescendo mais. Assim, existe uma função positiva K, chamada de condutividade térmica, tal que $j(x,t) = -K(x)\nabla u(x,t)$. A função K também dependerá do material. Juntando tudo, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{U_0} \rho(x)\sigma(x)u(t,x)dx = \int_{\partial U_0} K(x)\nabla u(x,t).\nu(x)dx + \int_{U_0} f(x,t)dx.$$

Usando o teorema da divergência e supondo suficiente regularidade para passar a derivada para dentro da integral, concluímos que

$$\int_{U_0}\left(\rho(x)\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nabla\cdot(K(x)\nabla u(x,t)) - f(x,t)\right)dx = 0$$

para todo $U_0 \subset U$ de classe C^1. Assim, chegamos à seguinte equação para $x \in U$ e $t \geq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{\rho(x)\sigma(x)}\nabla\cdot(K(x)\nabla u(x,t)) + \frac{f(x,t)}{\rho(x)\sigma(x)}.$$

A equação do calor como a conhecemos é obtida supondo que a densidade de calor específico, a densidade do material e a condutividade são constantes. Assim, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = k\Delta u(x,t) + \frac{1}{\sigma\rho}f(x,t).$$

A constante $k = \frac{K}{\rho\sigma}$ é chamada de coeficiente de difusibilidade.

Observação 1. Modelos ainda mais realistas poderiam considerar que o calor especifico e a condutividade dependem também da temperatura, isto é, $\sigma = \sigma(x, u(x))$ e $K = K(x, u(x))$. Neste caso, somos levados naturalmente a problemas parabólicos quasilineares.

1.1.2. Condições de contorno e iniciais. Para resolver esta equação, ainda precisamos de condições de contorno e condições iniciais. Vamos considerar o caso em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e suficientemente regular (de classe C^2, por exemplo). Discutiremos a regularidade com cuidado mais à frente do curso.

Vamos denotar por ∂U a fronteira do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.[1] As condições de contorno mais comuns são

1)	$u(t,x) = 0$ em ∂U	a temperatura é zero na fronteira.
2)	$j(t,x)\cdot\nu(x) = 0$ em ∂U	não há fluxo de calor na fronteira: O sistema é isolado.
3)	$j(t,x)\cdot\nu(x) = \lambda u(t,x)$ em ∂U	o fluxo de calor é proporcional a temperatura.

[1] Vamos denotar uma bola de centro x e raio $r > 0$, o conjunto $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}$. Lembramos que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto se para todo $x \in U$, sempre existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$. A fronteira ∂U é o conjunto dos pontos para os quais para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $B_\varepsilon(x)$ tem sempre elementos de U e de U^c, em que $U^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin U\}$ é o conjunto complementar de U.

A primeira condição é chamada de Dirichlet. A segunda de Neumann e equivale a $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, em que ν é a normal que aponta para fora de ∂U. A terceira condição é a condição de Robin e equivale a $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\lambda u$. Se u for suficientemente regular, a derivada direcional $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ pode ser definida como $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) := \nabla u(x) \cdot \nu(x)$.

É importante ressaltar que mesmo com as condições de contorno, a equação ainda não está bem colocada. De fato, se lembrarmos do curso de EDO, então sabemos que uma equação diferencial ordinária do tipo $u'(t) = f(t, u(t))$ precisa de uma condição inicial. Com a equação do calor, o análogo ocorre: precisamos conhecer $u(0, x)$ para todo $x \in U$ para determinar a solução de maneira única.

Com todas essas condições, a equação do calor (colocando as constantes físicas como sendo iguais a um) se torna:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) & = & \Delta u(t,x) + f(t,x), & x \in U, t > 0 \\ \mathcal{B}u(t,x) & = & 0, & x \in \partial U, t > 0 \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in U \end{array},$$

em que $\mathcal{B}$ corresponde a uma das três condições de contorno. As funções f e u_0 são funções dadas no problema.

1.2. Equação da onda

A equação da onda em sua forma mais simples é dada pela expressão abaixo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = v^2 \Delta u(t,x),$$

em que $v > 0$ é a velocidade da onda. Muitas vezes tomamos $v = 1$ para facilitar a análise. Novamente o Laplaciano age apenas nas variáveis $x \in U$.

A variável $t \in \mathbb{R}$ corresponde ao tempo e $x = (x_1, ..., x_n)$ ao espaço e pertence a um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. A função $u : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ é chamada de solução da equação da onda. Comparada a equação do calor, vemos que a única diferença é que a derivada no tempo é de ordem um na equação do calor e de ordem dois na equação da onda. Essa pequena diferença faz com que as soluções das duas equações tenham propriedades muito distintas. Em particular, uma solução da equação do calor é em geral apenas definida para $t \geq 0$ ao passo que na equação da onda ela é geralmente definida para todo t em $\mathbb{R}$.

Abaixo vamos dar duas situações físicas em que a equação da onda aparece naturalmente: no estudo de ondas numa corda e na teoria do eletromagnetismo.

1.2.1. Equação da onda numa corda. Vamos fazer uma rápida dedução da equação de onda. Consideremos uma onda numa corda. O deslocamento transversal da corda (perpendicular a corda em repouso) será denotado por $u(t, x)$. O ponto $x \in I \subset \mathbb{R}$, I um intervalo, corresponde a um ponto da corda. A variável t corresponde ao tempo. Faremos as seguintes suposições:

i) A corda é perfeitamente flexível (assim, um ponto da corda sobe e desce, mas sempre se mantém na coordenada x).

ii) A massa da corda por unidade de comprimento é constante. Sua densidade será denotada por ρ.

iii) Os deslocamentos u e a inclinação da corda são pequenos em todos os pontos.

iv) A tensão atua tangencialmente à corda e seu módulo T é o mesmo em todos os pontos.

v) A gravidade e outras forças externas são desprezadas.

Veja a figura abaixo:

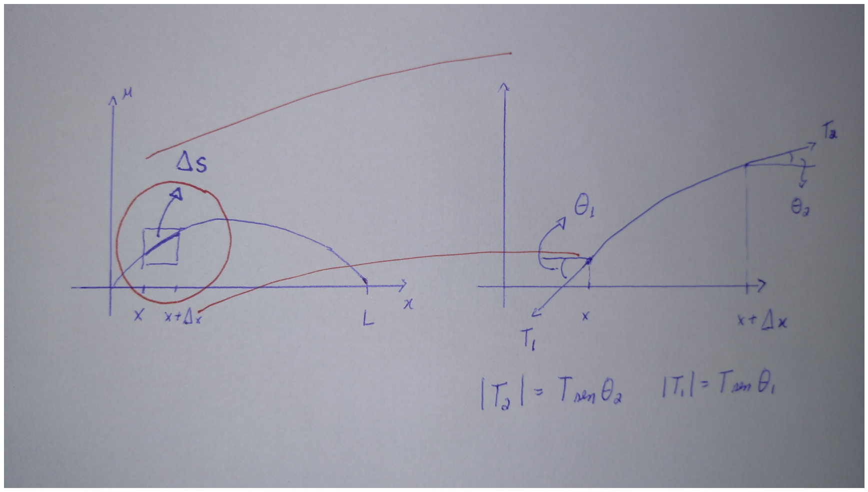

FIGURA 1.2.1.

Note que no segmento Δs, que ocupa o intervalo $[x, x+\Delta x]$, temos:

A massa do pedaço Δs é igual a $\rho \Delta x$. Como a corda é perfeitamente flexível, a massa da corda em Δx se mantém a mesma, pois pedaços da corda não mudam de posição na coordenada x.

A aceleração vertical do pedaço Δs é aproximadamente igual a $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)$.

Força sobre o pedaço Δs é igual a $T\mathrm{sen}(\theta_2) - T\mathrm{sen}(\theta_1)$.

Agora observamos que, pela série de Taylor, temos

$$\mathrm{sen}(\theta) = \theta - \theta^3/3! + ...$$
$$\mathrm{tg}(\theta) = \theta + \theta^3/3 + ...$$

Note que o primeiro termo da série de Taylor de ambos é 0. O segundo é θ e o terceiro (correspondente a θ^2) é zero. Logo os três primeiros termos da série são iguais. Assim é razoável supor que $\mathrm{sen}(\theta) \approx \mathrm{tg}(\theta)$ para θ pequeno.

A vantagem de usar tangente ao invés de seno é que $\mathrm{tg}(\theta_1) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$ e $\mathrm{tg}(\theta_2) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x+\Delta x)$. Usando a segunda lei de Newton (Força é igual a massa vezes aceleração), concluímos que

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right).$$

Assim

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = T\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(t,x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)}{\Delta x}.$$

Supondo Δx suficientemente pequeno, concluímos que uma boa aproximação da segunda lei para a corda é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).$$

A velocidade da onda aqui é dada por $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

1.2.2. Equação da onda no eletromagnetismo. Lembramos que as equações de Maxwell podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \mu_0 \left(J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \end{aligned} ,$$

Aqui $E, B : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto. Na equações acima, ϵ_0 e μ_0 são constantes físicas, E é o campo elétrico e B é o campo magnético. A função $\rho : U \to \mathbb{R}$ representa a densidade de carga elétrica e a função $J : U \to \mathbb{R}^3$ representa a corrente elétrica.

No vácuo, ou seja, na ausência de cargas e correntes, as equações acima nos leva às equações

$$\begin{array}{lll} \text{EM 1)} & \nabla \cdot E & = 0 \\ \text{EM 2)} & \nabla \cdot B & = 0 \\ \text{EM 3)} & \nabla \times E & = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \text{EM 4)} & \nabla \times B & = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{array} .$$

Para deduzir a equação da onda, vamos supor que E e B são de classe C^2 e vamos usar a seguinte relação, válida para qualquer função $F : U \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2:

$$\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F. \tag{1.2.1}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) \overset{(1)}{=} -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times E) = -\nabla \times \frac{\partial E}{\partial t} \\ &\overset{(2)}{=} -\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times B\right) = -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times (\nabla \times B) \\ &\overset{(3)}{=} -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\nabla(\nabla \cdot B) - \Delta B\right) \overset{(4)}{=} \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta B. \end{aligned}$$

Acima usamos em (1) a equação EM 3), em (2) usamos a equação EM 4), em (3) usamos a expressão (1.2.1), em (4), usamos a equação EM 2). Concluímos que

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta B,$$

em que $\Delta B = \Delta(B_1, B_2, B_3) = (\Delta B_1, \Delta B_2, \Delta B_3)$.

O mesmo argumento pode ser feito para o campo elétrico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times B\right) = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times \frac{\partial B}{\partial t} \\ &\overset{(2)}{=} -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times (\nabla \times E) \\ &\overset{(3)}{=} -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\nabla(\nabla \cdot E) - \Delta E\right) \overset{(4)}{=} \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta E. \end{aligned}$$

Acima usamos em (1) a equação EM 4), em (2) usamos a equação EM 3), em (3) usamos a expressão (1.2.1), em (4), usamos a equação EM 1). Concluímos que

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta E.$$

Nossa conclusão é que tanto o campo elétrico como o campo magnético satisfazem a equação de onda. A velocidade dada por $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ é a velocidade da luz.

1.2.3. Condições de contorno e iniciais. Para resolver esta equação, ainda precisamos de condições de contorno e condições iniciais. Vamos considerar novamente $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e suficientemente regular. As condições de contorno usualmente consideradas são as mesmas vistas na equação do calor: Dirichlet, Neumann e Robin. Para uma corda, a condição de Dirichlet nos diz que as pontas estão presas e a condição de Neumann diz que elas estão soltas.

Como condição inicial, não basta conhecer a função no tempo $t = 0$. Usando a analogia com a teoria das equações diferenciais ordinárias, sabemos que uma equação diferencial ordinária do tipo $u''(t) = f(t, u(t))$ requer duas condição inicial. De fato, precisamos conhecer $u(0)$ e $u'(0)$ para determinar a solução de maneira única. Com a equação da onda o mesmo ocorre. Precisamos conhecer $u(0, x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$ para todo $x \in U$ para determinar uma solução de maneira única.

Com todas essas condições, a equação da onda (colocando as constantes físicas como sendo iguais a um) se torna:

$$\begin{array}{lcll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) & = & \Delta u(t,x) + f(t,x), & x \in U, t > 0 \\ \mathcal{B}u(t,x) & = & 0, & x \in \partial U, t > 0 \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in U \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) & = & v_0(x), & x \in U \end{array},$$

em que $\mathcal{B}$ corresponde a uma das três condições de contorno. As funções f, u_0 e v_0 são funções dadas no problema.

1.3. Equação de Laplace/Poisson

Vamos finalizar discutindo as equações de Laplace e de Poisson. Mais especificamente, estaremos interessados na seguinte equação:

$$\Delta u(x) = f(x),\ x \in U,$$

em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Lembramos que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Quando $f = 0$, chamamos a equação de equação de Laplace. Quando $f \neq 0$, a equação é chamada de equação de Poisson.

1.3.1. Aplicações da equação de Laplace/Poisson. Essas equações aparecem em diversos contextos. Em situações físicas, geralmente descrevem modelos físicos estáticos, que não variam com o tempo. Entre os exemplos, temos (vejam mais no livro do Strauss):

(1) A equação aparece naturalmente quando consideramos a equação do calor ou da onda em equilíbrio. De fato, suponha que um corpo esteja em equilíbrio térmico. A equação do calor descreve a temperatura deste corpo e é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\Delta u(t,x).$$

Como o corpo está em equilíbrio térmico, concluímos que a temperatura não varia. Logo $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0$ e a temperatura satisfaz a equação de Laplace. Com a equação da onda em equilíbrio temos o mesmo argumento, já que neste caso $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = 0$.

(2) Na teoria de variáveis complexas, uma função $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ um aberto, é analítica se, e somente se, $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ é uma função C^∞ e as funções com valores reais u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Neste caso u e v satisfazem a equação de Laplace. De fato, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \implies \Delta u(u,y) = 0.$$

O argumento para v é análogo.

(3) Na teoria do Eletromagnetismo, se os campos não variam com o tempo, então o campo elétrico satisfaz:

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times E = 0 \end{array}.$$

Se $E : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ for de classe C^1 e estiver definido num aberto convexo, então existe uma função $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $E = -\nabla\varphi$ (veja o livro do Apostol ou o Elon). A função φ é chamada de potencial elétrico. Assim, temos

$$-\Delta\varphi = -\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

(4) Um fluido incompressível e irrotacional estacionário pode ser descrito por um campo de velocidades $v : U \to \mathbb{R}^3$, em que $U \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto. Nas condições dadas, temos que $\nabla \times v = 0$ e $\nabla \cdot v = 0$. Se v é de classe C^1 e U é um aberto convexo, então $v = -\nabla\varphi$, em que $\varphi : U \to \mathbb{R}$ é o potencial de velocidade. Assim

$$\Delta\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = -\nabla \cdot v = 0.$$

(5) Na teoria da gravitação de Newton, podemos, em certas situações, descrever o campo gravitacional usando o potencial gravitacional $\varphi : U \to \mathbb{R}$, em que $U \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto. Esse potencial satisfaz a equação

$$\Delta\varphi(x) = 4\pi G\rho(x),$$

em que ρ é a densidade de massa e G é a constante gravitacional.

1.3.2. Condições de contorno. Para a solução da equação de Laplace ou Poisson, precisamos ainda de condições de contorno. Como a equação não envolve o tempo, é razoável pensar que não precisamos (nem faria muito sentido) de uma condição inicial. Isso de fato é o que ocorre.

Em um aberto limitado e suficientemente regular U de $\mathbb{R}^n$, as condições mais consideradas são as de Dirichlet, de Neumann e de Robin. Não só são condições que estão relacionadas a condições físicas, mas também são fundamentais para determinar as soluções das equações.

Um típico problema é dado por:

$$\begin{array}{rcll} \Delta u(x) & = & f(x), & x \in U \\ \mathcal{B}u(x) & = & 0, & x \in \partial U \end{array},$$

em que $\mathcal{B}$ corresponde a uma das três condições de contorno. A função f é dada no problema. Quando $f = 0$, então uma solução de classe C^2 da equação de Laplace $\Delta u(x) = 0$ também é chamada de função harmônica.

CAPíTULO 2

Espaço de Hilbert: Definição, ortogonalidade e base

2.1. Produto interno e norma

Seja E um espaço vetorial real ou complexo, ou seja, sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Denotaremos por $\mathbb{K}$ o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, se E for um espaço real, e o conjunto dos complexos $\mathbb{C}$, se E for um espaço complexo. Seja $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$, em que $x, y \in \mathbb{R}$. O complexo conjugado de λ será denotado por $\overline{\lambda} = x - iy$. Em particular, se λ for real, então $\overline{\lambda} = \lambda$.

DEFINIÇÃO 2. Um *produto interno* em um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é uma função $B : E \times E \to \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes condições:
a) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$, para todo $u, v, w \in E$.
b) $B(\lambda u, w) = \lambda B(u, w)$, para todo $u, w \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.
c) $B(u, v) = \overline{B(v, u)}$, para todo $u, v \in E$.
d) $B(u, u) \in \mathbb{R}$ e $B(u, u) \geq 0$, para todo $u \in E$.
e) $B(u, u) \neq 0$, para todo $u \in E$ tal que $u \neq 0$.

Uma função $B : E \times E \to \mathbb{K}$ que satisfaz as propriedades a) e b) é chamada de função *linear na primeira coordenada*. Se satisfaz c), então dizemos que é *simétrica*, d) então é *positiva* e, por fim, se satisfizer e) é chamada de *definida*. Assim, um produto interno é uma função $B : E \times E \to \mathbb{K}$ linear na primeira coordenada, simétrica, positiva e definida.

A notação que iremos adotar para o produto interno é a seguinte:

$$(u, v) := B(u, v).$$

Quando estivermos trabalhando com mais de um espaço com produto interno, então usaremos a notação $(u, v)_E$ para deixar claro que nos referimos ao produto interno do espaço E. Um espaço vetorial E com produto interno $(.,.)$ também é denotado por $(E, (.,.))$. O produto interno não é único se o espaço E tiver dimensão maior ou igual a 1. Assim, quando dizemos "Seja $(E, (.,.))$ um espaço com produto interno" sempre queremos dizer que um produto interno foi fixado. Observamos, por fim, que na física costuma-se usar a convenção de linearidade na segunda coordenada e antilinearidade na primeira (ver abaixo a definição de antilinearidade). A nossa convenção é a mais adotada na matemática.

A proposição abaixo mostra uma consequência simples das propriedades acima.

PROPOSIÇÃO 3. *Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno. Logo o produto interno é* antilinear na segunda coordenada*, ou seja,*
a') $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$, para todo $u, v, w \in E$.
b') $(u, \lambda w) = \overline{\lambda}(u, w)$, para todo $u, w \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.
Em particular, para $\lambda_1, ...\lambda_n, \mu_1, ..., \mu_m \in \mathbb{K}$ e $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m \in E$, temos

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \overline{\mu_j} (u_i, v_j). \tag{2.1.1}$$

DEMONSTRAÇÃO. O item a') pode ser provado da seguinte forma

$$(u, v + w) \overset{(1)}{=} \overline{(v + w, u)} \overset{(2)}{=} \overline{(v, u)} + \overline{(w, u)} \overset{(3)}{=} (u, v) + (u, w),$$

em que usamos $c)$ da Definição 2 em (1), $a)$ em (2) e $c)$ novamente em (3). De maneira similar, para provar $b')$ usamos

$$(u, \lambda w) \stackrel{(1)}{=} \overline{(\lambda w, u)} \stackrel{(2)}{=} \overline{\lambda (w, u)} \stackrel{(3)}{=} \overline{\lambda}(u, w),$$

em que usamos $c)$ em (1), $b)$ em (2) e $c)$ novamente em (3).

Por fim, a igualdade 2.1.1 segue usando indução com as propriedades $a)$, $b)$ da Definição 2 e $a')$ e $b')$. $\square$

Em um espaço vetorial real, a propriedade antilinear é o mesmo que a linearidade. Uma função $B : E \times E \to \mathbb{K}$ que é linear na primeira e na segunda coordenada é chamada *bilinear*. Quando for linear na primeira coordenada e antilinear na segunda será chamada de *sesquilinear*. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, funções bilineares e sesquilineares são a mesma coisa. Um produto interno é sempre sesquilinear. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então ele também é bilinear.

Alguns exemplos importantes de produtos internos são dados abaixo.

Exemplo 4. i) Seja $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \{1, ..., n\}\}$ o espaço vetorial com as operações usuais. Um produto interno para este espaço é dado por

$$(x, y) = \sum_{j=1} x_j y_j.$$

ii) Seja $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, ..., z_n) : z_j \in \mathbb{C}, \forall j \in \{1, ..., n\}\}$ o espaço vetorial com as operações usuais. Um produto interno para este espaço é definido por

$$(z, w) = \sum_{j=1} z_j \overline{w_j}.$$

iii) Seja $C([a, b]; \mathbb{K})$ o espaço das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{K}$, em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ como sempre. Podemos definir um produto escalar para este espaço por

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Usamos a expressão "um produto interno" nos exemplos acima, pois, como já comentamos, os mesmos não são únicos. Por exemplo, é fácil verificar que

$$(x, y) = \sum_{j=1} j x_j y_j$$

também define um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Os exemplos dados em i), ii) e iii) são apenas os mais comumente usados.

Em $\mathbb{R}^2$ costuma-se definir o produto escalar de dois vetores como

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

É evidente que a função $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $B(u, v) = u \cdot v$ é um produto interno. De fato, é um caso particular do Exemplo 4 i). O produto escalar satisfaz a propriedade

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos(\theta),$$

em que $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ e $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ e $\cos(\theta)$ é o ângulo entre os vetores u e v. Resultados similares podem ser provados para $\mathbb{R}^3$. A função $\|u\|$ é um exemplo de norma como veremos a seguir.

Definição 5. Uma *norma* em um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é uma função $N : E \to [0, \infty)$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $N(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

b) $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$, para todo $u \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

c) $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$, para todo $u, v \in E$.

A propriedade $c)$ é também chamada de desigualdade triangular. A notação para norma que iremos usar é a seguinte

$$\|u\| := N(u).$$

Quando não está claro a qual espaço vetorial nos referimos, também usaremos $\|u\|_E$. Um espaço vetorial com norma também é chamado de *espaço normado*. Ele será denotado por $(E, \|.\|)$. Novamente, a norma não é única. Assim, sempre suporemos que a uma norma foi fixada ao tratarmos com espaços normados.

Note que por indução, as propriedades $b)$ e $c)$ implicam que

$$\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \, \|u_j\|, \quad \forall \lambda_j \in \mathbb{K}, u_j \in E, j \in \{1, ..., n\}.$$

Muito usado também é o fato de que para todo $u, v \in E$, temos

$$\|u - v\| \geq |\|u\| - \|v\||. \tag{2.1.2}$$

Isto ocorre, pois

$$\|u\| = \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\|.$$

Logo $\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$. Trocando u por v, obtemos que $\|v\| - \|u\| \leq \|v - u\|$. Note que

$$\|v - u\| = \| - (u - v)\| = | - 1|\|u - v\| = \|u - v\|.$$

Isto mostra a desigualdade (2.1.2), já que

$$\|u - v\| \geq \max\{\|u\| - \|v\|, \|v\| - \|u\|\} = |\|u\| - \|v\||.$$

Esta propriedade mostra que se quiséssemos definir norma como uma função $N : E \to \mathbb{R}$ ao invés de $N : E \to [0, \infty[$ obteríamos exatamente as mesmas funções. De fato, tomando $v = 0$, concluiríamos de (2.1.2) que $\|u\| \geq |\|u\|| \geq 0$, ou seja, a norma continuaria a ser não-negativa.

Exemplo 6. i) Em $\mathbb{K}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \{1, ..., n\}\}$, as funções abaixo definem normas.

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{j \in \{1,..,n\}} |x_j|.$$

ii) Em $C([a, b]; \mathbb{K})$, podemos definir normas pelas expressões abaixo.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx,$$

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

A norma permite definir a distância entre dois vetores de um espaço vetorial normado. De fato, se u e $v \in E$, a distância entre u e v é definida por

$$d(u, v) = \|u - v\|. \tag{2.1.3}$$

Proposição 7. *Seja $(E, \|.\|)$ um espaço normado. Logo a distância $d : E \times E \to [0, \infty)$ definida 2.1.3 satisfaz as propriedades abaixo.*

1) $d(u, v) = 0$ se, e somente se, $u = v$.

2) $d(u, v) = d(v, u)$, para todo $u, v \in E$.

3) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$, para todo $u, v, w \in E$.

Demonstração. 1) Vemos que

$$d(u, v) = 0 \iff \|u - v\| = 0 \iff u = v,$$

em que usamos o item $a)$ da Definição 5 na última implicação.

2) Basta observar que

$$d(u,v) = \|u-v\| = \|-(v-u)\| \overset{(1)}{=} |-1|\|v-u\| = \|v-u\| = d(v,u),$$

em que usamos $b)$ da Definição 5 em (1).

3) Para provar este item usaremos a desigualdade triangular.

$$d(u,v) = \|u-v\| = \|u-w+w-v\| \leq \|u-w\| + \|w-v\| = d(u,w) + d(w,v).$$

□

As propriedades da Proposição 7 mostram que um espaço normado é um *espaço métrico*. Portanto, a norma vai nos permitir definir convergência de sequências, continuidade e etc, como veremos mais adiante. Neste curso, não assumiremos conhecimentos sobre espaços métricos. Os conceitos serão definidos (ou recordados para aqueles que já conhecem os resultados) conforme formos avançando.

Um espaço com produto interno $(E,(.,.))$ tem uma norma naturalmente associada. Ela é definida por

$$\|u\| := \sqrt{(u,u)} \tag{2.1.4}$$

e é chamada de *norma associada ao produto interno*. Toda vez que estivermos trabalhando com um espaço com produto interno, iremos considerar a norma associada a ele, a não ser que digamos o contrário.

O fato de que (2.1.4) define realmente uma norma é provado abaixo. Antes, precisamos de uma importante desigualdade.

Proposição 8. *Seja $(E,(.,.))$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno. Logo o produto interno satisfaz a* desigualdade de Cauchy-Schwartz*:*

$$|(u,v)| \leq \sqrt{(u,u)}\sqrt{(v,v)}, \quad \forall u,v \in E.$$

Antes de provar a desigualdade, vamos discutir a ideia geométrica dela.

Vimos nos cursos de vetores e geometria (ou álgebra linear) que para dois vetores u e v em $\mathbb{R}^2$, com $v \neq 0$, sempre podemos projetar u na reta gerada por v. Assim, escrevemos $u = u_{//} + u_{\perp}$, em que $u_{//}$ é paralelo a v e $u_{\perp}$ é perpendicular a v. Lembramos que $u_{//} = \frac{(u,v)}{(v,v)}v$ e $u_{\perp} = u - u_{//} = u - \frac{(u,v)}{(v,v)}v$. A desigualdade de Cauchy-Schwartz sai imediatamente da observação de que $\|u_{\perp}\|^2 \geq 0$. Para sua demonstração, no entanto, não é necessário definir projeções. Essa discussão visa apenas deixar as contas mais naturais.

Demonstração. Se $v = 0$, então $0v = 0$ e, portanto, para todo $w \in E$ (em particular, para $w = u$ ou $w = v$), temos

$$(w,v) = (w,0v) = 0(w,v) = 0.$$

Assim, a desigualdade de Cauchy-Shwartz é válida, pois apenas diz que $0 \leq 0$.

Se $v \neq 0$, então pela propriedade $e)$, temos $(v,v) \neq 0$. Assim, como $(w,w) \geq 0$ para todo $w \in E$, podemos definir

$$w = u - \frac{(u,v)}{(v,v)}v$$

e concluir que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(u - \frac{(u,v)}{(v,v)}v, u - \frac{(u,v)}{(v,v)}v\right) \overset{(1)}{=} (u,u) - \frac{\overline{(u,v)}}{(v,v)}(u,v) - \frac{(u,v)}{(v,v)}(v,u) + \frac{|(v,u)|^2}{(v,v)^2}(v,v) \\ &= (u,u) - \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)} - \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)} + \frac{|(v,u)|^2}{(v,v)} = (u,u) - \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)}. \end{aligned}$$

Em (1) usamos 2.1.1. Logo $|(u,v)|^2 \leq (u,u)(v,v)$ e a desigualdade segue. □

Proposição 9. *Seja $(E,(.,.))$ um espaço com produto interno. Logo a função $u \in E \mapsto \|u\| \in [0,\infty)$ definida em (2.1.4) de fato define uma norma.*

Demonstração. Vamos mostrar cada um dos itens que definem uma norma.

a) Pela definição de norma associada ao produto interno, $\|u\| = 0$ ocorre se, e somente se, $(u, u) = 0$. Se $u = 0$, então por linearidade $(u, u) = (0u, u) = 0(u, u) = 0$. Por outro lado, se $(u, u) = 0$, então como o produto interno é uma função positiva definida, concluímos $u = 0$.

b) Basta usar a linearidade do produto interno para verificar que

$$\|\lambda u\| = \sqrt{(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(u, u)} = \sqrt{|\lambda|^2(u, u)} = |\lambda|\sqrt{(u, u)} = |\lambda|\|u\|.$$

c) Por fim, a desigualdade triangular pode ser provada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= (u+v, u+v) = (u, u) + (v, u) + (u, v) + (v, v)\\ &= (u, u) + \overline{(u, v)} + (u, v) + (v, v) = (u, u) + 2\mathrm{Re}(u, v) + (v, v)\\ &\leq (u, u) + 2|(u, v)| + (v, v) \overset{(1)}{\leq} (u, u) + 2\sqrt{(u, u)}\sqrt{(v, v)} + (v, v)\\ &= (\sqrt{(u, u)} + \sqrt{(v, v)})^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

Note que a desigualdade de Schwartz tem um papel crucial na demonstração. Ela foi usada na desigualdade em (1). □

Dois exemplos fundamentais de normas associadas a produtos internos são dadas abaixo.

Exemplo 10. i) Seja $\mathbb{K}^n$ com o produto interno $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}$, em que $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$. Lembramos que $\overline{y_j} = y_j$ se $y_j \in \mathbb{R}$. A norma associada a este produto interno é dada por

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}.$$

ii) Seja $C([a, b]; \mathbb{K})$ o espaço vetorial com produto interno $(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$. Logo a norma associada a este produto interno é dada por

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Observamos que em $\mathbb{R}^2$ a norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ é, de acordo com o Teorema de Pitágoras, igual ao tamanho do vetor $x \in \mathbb{R}^2$. O mesmo ocorre em $\mathbb{R}^3$.

Uma propriedade importante que normas associadas a produtos internos satisfazem é a lei do paralelogramo. Para explicá-la, consideremos u e v dois vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^2$ e θ o ângulo formado entre u e v. Logo, pela regra dos cossenos, temos

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\theta),\\ \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\pi - \theta).\end{aligned}$$

Note que $u - v$ e $u + v$ são as diagonais do paralelogramo formado pelos vetores u e v (os vértices são: 0, u, v e $u + v$).

Como $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$, podemos somar as expressões acima e obter

$$\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

A expressão acima é válida não só para $\mathbb{R}^2$ como também para todos os espaços vetoriais com produto interno.

Proposição 11. *Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno. Logo a seguinte propriedade, chamada de* lei do paralelogramo, *é válida: Para todo $u, v \in E$, temos*

$$\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Demonstração. Basta usar a definição de norma associada a um produto interno.

$$\begin{aligned}&\|u-v\|^2+\|u+v\|^2=(u-v,u-v)+(u+v,u+v)\\&=(u,u)-(u,v)-(v,u)+(v,v)+(u,u)+(u,v)+(v,u)+(v,v)\\&=2(u,u)+2(v,v)=2\|u\|^2+2\|v\|^2.\end{aligned}$$

□

A lei do paralelogramo pode ser usada para mostrar que uma determinada norma não está associada a nenhum produto interno, bastando achar vetores para os quais a lei não é satisfeita. Ela também será muito útil no estudo de projeções ortogonais.

Até agora nossos resultados tiveram um sabor mais algébrico. Vamos começar agora a discutir convergência de sequências. Algumas definições precisarão apenas de normas. Uma sequência num espaço vetorial E é definida como uma função $v:\mathbb{N}\to E$, em que $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ (lembre-se que em análise, uma sequência é uma função $v:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$). Ela será denotada por $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por (v_j). Aqui $v_j=v(j)\in E$, ou seja, corresponde a imagem da função v. Nossa convenção será $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ e $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,...\}$. Poderíamos definir sequências indexadas por $\mathbb{N}_0$ também.

Definição 12. Seja $(E,\|.\|)$ um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de vetores em E *converge* a $v\in E$ se $\lim_{j\to\infty}\|v_j-v\|=0$. Neste caso escrevemos $v=\lim_{j\to\infty}v_j$.

A definição acima nos diz que para todo $\varepsilon>0$, sempre existe $N\in\mathbb{N}$ tal que se $j\geq N$, então $\|v_j-v\|<\varepsilon$. Note que o limite é sempre único. De fato, se $v=\lim_{j\to\infty}v_j$ e $w=\lim_{j\to\infty}v_j$, então

$$\|v-w\|=\|v-v_j+v_j-w\|\leq\|v-v_j\|+\|v_j-w\|. \tag{2.1.5}$$

Tomando o limite $j\to\infty$ no lado direito, concluímos que $v=w$. Muitas outras propriedades de sequências convergentes em espaços normados se assemelham ao que vemos em análise real. Vamos ver algumas delas abaixo.

Proposição 13. *Seja $(E,\|.\|)$ um espaço normado e $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge a $v\in E$. Logo então ela é* limitada*, ou seja, existe $M>0$ tal que $\|u_j\|\leq M$ para todo $j\in\mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $v=\lim_{j\to\infty}v_j$. Assim, dado $\varepsilon=1$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que se $j\geq N$, então $\|v_j-v\|<1$. Seja $\overline{M}=\max_{j\in\{1,..,N\}}\|v_j\|$, então $\|v_j\|\leq\overline{M}$ para todo $j\in\{1,...,N\}$ e

$$\|v_j\|=\|v_j-v_N+v_N\|\leq\|v_j-v_N\|+\|v_N\|\leq 1+\overline{M},$$

se $j\geq N$. Assim, escolhendo $M:=1+\overline{M}$, vemos que $\|v_j\|\leq M$ para todo $j\in\mathbb{N}$. □

A convergência implica convergência do produto interno, como veremos abaixo.

Proposição 14. *Sejam $(E,(.,.))$ um espaço com produto interno, $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ duas sequências em E. Se $\lim_{j\to\infty}u_j=u$ e $\lim_{j\to\infty}v_j=v$, então $\lim_{j\to\infty}(u_j,v_j)=(u,v)$.*

Em particular, se $w\in E$ e $\lim_{j\to\infty}u_j=u$, então $\lim_{j\to\infty}(u_j,w)=(u,w)$, $\lim_{j\to\infty}(w,u_j)=(w,u)$ e $\lim_{j\to\infty}\|u_j\|=\|u\|$.

Demonstração. Para a demonstração, basta observar que

$$\begin{aligned}(u,v)&=(u-u_j+u_j,v-v_j+v_j)\\&=(u-u_j,v-v_j)+(u_j,v-v_j)+(u-u_j,v_j)+(u_j,v_j).\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Note que

$$\begin{aligned}(u-u_j,v-v_j)&\leq\|u-u_j\|\|v-v_j\|,\\(u_j,u-u_j)&\leq\|u_j\|\|u-u_j\|\\(u-u_j,v_j)&\leq\|u-u_j\|\|v_j\|\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Como (u_j) e (v_j) são convergentes, então são limitadas. Assim, existe $M>0$ tal que $\|u_j\|\leq M$ e $\|v_j\|\leq M$ para todo $j\in\mathbb{N}$. Como $\lim_{j\to\infty}\|u_j-u\|=\lim_{j\to\infty}\|v_j-v\|=0$, o limite de todas as expressões em (2.1.7) é igual a zero. Assim, podemos tomar o limite para $j \to \infty$ em (2.1.6) levando em conta (2.1.7) para obter

$$\lim_{j\to\infty}(u_j, v_j) = (u, v).$$

Para mostrar que $\lim_{j\to\infty}(u_j, w) = (u, w)$ e $\lim_{j\to\infty}(w, u_j) = (w, u)$, basta usar a simetria do produto interno e o resultado anterior para a sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definida como $v_j = w$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para a demonstração de que $\lim_{j\to\infty}\|u_j\| = \|u\|$, basta tomar $u_j = v_j$ e concluir que $\lim_{j\to\infty}(u_j, u_j) = (u, u)$. □

Observação 15. Seja $(E, \|.\|)$ um espaço com produto interno. Logo se $\lim_{j\to\infty} v_j = v$, então também vale $\lim_{j\to\infty}\|v_j\| = \|v\|$. Ou seja, para este resultado não precisamos de produto interno. De fato, usamos (2.1.2) para concluir que

$$|\|v_j\| - \|v\|| \le \|v_j - v\|.$$

Assim, $\lim_{j\to\infty} v_j = v$ implica que $\lim_{j\to\infty}\|v_j\| = \|v\|$.

Vamos finalizar discutindo o conceito de sequências de Cauchy e completude.

Definição 16. Dizemos que uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $(E, (.,.))$ é uma *sequência de Cauchy* se dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_j - u_i\| < \varepsilon$, para todo $i, j \ge N$.

Uma sequência de Cauchy $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é sempre limitada. Basta escolher $\varepsilon = 1$. Dessa forma, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_i - u_j\| < 1$ para $i, j \ge N$. Seja $M = \max_{i\in\{1,\dots,N\}}\|u_i\|$, então $\|u_i\| \le M$, se $i \in \{1, ..., N\}$, e

$$\|u_i\| = \|u_i - u_N + u_N\| \le \|u_i - u_N\| + \|u_N\| \le M + 1,$$

se $i \in \{1, ..., N\}$.

Além disso, se $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ for uma sequência convergente, então $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $i, j \ge N$, então $\|u_i - u\| < \varepsilon$ e $\|u_j - u\| < \varepsilon$. Assim,

$$\|u_i - u_j\| = \|u_i - u + u - u_j\| \le \|u_i - u\| + \|u - u_j\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

No entanto, uma sequência de Cauchy num espaço normado nem sempre converge, como veremos em breve. Assim, destacamos o seguinte tipo de espaço.

Definição 17. Seja $(E, \|.\|)$ um espaço normado. Dizemos que o espaço é *completo* se toda sequência de Cauchy convergir.

Vamos finalizar essa seção com a definição mais importante do curso.

Definição 18. Um espaço vetorial normado completo é chamado de *espaço de Banach*. Um espaço com produto interno completo é chamado de *espaço de Hilbert*.

Quando estivermos falando de espaços de Hilbert, sempre consideraremos a norma associada ao produto interno. Todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach. No entanto, o produto interno torna o estudo de espaços de Hilbert muito mais simples. Na teoria de equações diferenciais parciais, ambos os espaços desempenham um papel muito importante. Aqui nos restringiremos aos espaços de Hilbert, que consideramos o caminho mais natural (e seguido por diversas referências) para se começar o estudo de EDPs usando análise funcional.

2.2. Ortogonalidade e bases ortonormais

Um produto interno permite definir o importante conceito de ortogonalidade de vetores e espaços. Nesta seção fixaremos um espaço vetorial com produto interno $(E, (.,.))$ com dimensão maior ou igual a um.

Definição 19. i) Dois vetores não nulos u e v são *ortogonais* (denotamos por $u \perp v$) se $(u, v) = 0$.

ii) Um vetor não nulo u é *ortogonal a um subconjunto* $W \subset E$ se u é ortogonal a todos os vetores de $W\backslash\{0\}$, ou seja, $(u, w) = 0$ para todo $w \in W$ (note que para $w = 0$ isso sempre é verdade).

iii) *Dois subconjuntos W e V de E são ortogonais* se todos os vetores não nulos de W são ortogonais a todos os vetores não nulos de V, ou seja, $(v, w) = 0$ para todo $v \in V$ e $w \in W$.

iv) Dizemos que $S = \{e_i : i \in I\} \subset E$, em que I pode ser um conjunto finito ou infinito, é um *conjunto ortogonal* se todos os seus vetores são não nulos e ortogonais entre si, ou seja, $e_i \neq 0$ para todo $i \in I$ e $(e_i, e_j) = 0$ para todo $i \neq j$, $i, j \in I$.

v) O conjunto $S = \{e_i : i \in I\} \subset E$ é chamado de *conjunto ortonormal* se for um conjunto ortogonal e todos os seus vetores forem *unitários*, ou seja, $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.[1]

A ortogonalidade implica no seguinte Teorema.

Teorema 20. *(Teorema de Pitágoras). Sejam u_1, ..., u_n são vetores ortogonais, então*

$$\|\sum_{j=1}^{n} u_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|u_j\|^2.$$

Demonstração. Basta usar a definição de norma e ortogonalidade como abaixo.

$$\|\sum_{j=1}^{n} u_j\|^2 = (\sum_{i=1}^{n} u_i, \sum_{j=1}^{n} u_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_i, u_j) = \sum_{i=1}^{n}(u_i, u_i) = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2.$$

□

Uma relação bastante simples entre norma e produtos internos para vetores ortonormais é dado pela desigualdade de Bessel.

Proposição 21. *(Desigualdade de Bessel) Seja $S = \{e_i : i \in I\} \subset E$, em que $I = \{1, ..., N\}$ ou $I = \mathbb{N}$. Se S é um conjunto ortonormal, então sempre vale*

$$\sum_{j=1}^{N} |(u, e_j)|^2 \leq \|u\|^2,$$

em que $N = \infty$ se $I = \mathbb{N}$.

Demonstração. A prova é simples. Seja $M = N$ se $I = \{1, ..., N\}$ ou M um número em $\mathbb{N}$ se $I = \mathbb{N}$. Logo, pela definição de norma,

$$\|u - \sum_{j=1}^{M}(u, e_j)e_j\|^2 \geq 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\|u - \sum_{j=1}^{M}(u, e_j)e_j\|^2 &= (u - \sum_{i=1}^{M}(u, e_i)e_i, u - \sum_{j=1}^{M}(u, e_j)e_j) \\
&= (u, u) - \sum_{i=1}^{M}(u, e_i)(e_i, u) - \sum_{j=1}^{M} \overline{(u, e_j)}(u, e_j) + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}(u, e_i)\overline{(u, e_j)}(e_i, e_j) \\
&= (u, u) - \sum_{i=1}^{M} |(u, e_i)|^2 - \sum_{j=1}^{M} |(u, e_j)|^2 + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}(u, e_i)\overline{(u, e_j)}\delta_{ij} \\
&= (u, u) - \sum_{i=1}^{M} |(u, e_i)|^2 - \sum_{j=1}^{M} |(u, e_j)|^2 + \sum_{j=1}^{M} |(u, e_j)|^2 \\
&= (u, u) - \sum_{i=1}^{M} |(u, e_i)|^2.
\end{aligned}$$

[1] δ_{ij} é o delta de Kronecker. Ele é igual a 1 se $i = j$ e a zero se $i \neq j$.

Assim,

$$\|u\|^2 = (u,u) \geq \sum_{i=1}^{M} |(u,e_i)|^2$$

e isto encerra a demonstração. (Note que se $I = \mathbb{N}$, então basta tomar o limite $M \to \infty$ na desigualdade acima). $\square$

Antes de prosseguirmos, vamos lembrar rapidamente alguns conceitos de álgebra linear. Dado um espaço vetorial E, dizemos que um subconjunto $S = \{e_i : i \in I\} \subset E$, que pode ser finito ou não, é *linearmente independente* se para qualquer subconjunto finito $J \subset I$ e números $a_i \in \mathbb{K}$, $i \in J$, a igualdade

$$\sum_{i\in J} a_i e_i = 0$$

implicar que $a_i = 0$ para todo $i \in J$. Um conjunto linearmente independente (usamos a abreviação L. I. também) nunca contém um elemento nulo. De fato, S é L.I. se nenhum elemento for nulo nem puder ser escrito como combinação linear dos demais elementos de S. Conjuntos que não são L.I. são chamados de linearmente dependentes, ou L.D..

O conjunto de todas as combinações lineares de S será denotado por $[S]$. Assim, por definição, $v \in [S]$ se, e somente se,

$$v = \sum_{i\in J} a_i e_i,$$

para algum subconjunto finito $J \subset I$ e $a_i \in \mathbb{K}$, $i \in J$ (Atenção! Note que até agora J é sempre um conjunto finito). O conjunto $[S]$ é claramente um espaço vetorial. Ele é o menor subespaço vetorial de E que contém todos os elementos de S. Dizemos que S *gera o espaço* E se $[S] = E$. O conjunto $[S]$ também é chamado de *conjunto gerado por* S. Quando $S = \{e_1, ..., e_n\}$ também usaremos a notação $[e_1, ..., e_n]$ para denotar $[S]$.

Um conceito importantíssimo em álgebra linear é o de base de um espaço vetorial. Como trataremos também em breve do conceito de bases de Hilbert, chamaremos a base que vemos em álgebra linear de base algébrica. Uma *base algébrica* é um conjunto S linearmente independente que gera o espaço vetorial E. Dizemos que o espaço E tem *dimensão finita* se tiver uma base algébrica com finitos elementos[2]. Podemos mostrar, usando o Lema de Zorn, que todo espaço vetorial possui uma base algébrica. Esse resultado não mostra como podemos calcular (encontrar) essa base. Assim, bases algébricas em espaços de dimensão infinita serão frequentemente pouco adequadas para aplicações.

Voltando a noção de ortogonalidade, podemos mostrar facilmente que um conjunto ortogonal $S = \{e_1, ..., e_n\}$ é linearmente independente. De fato, se $v := \sum_{j=1}^{n} a_j e_j = 0$ para certos $a_j \in \mathbb{K}$, então tomando o produto interno com e_k, $k \in \{1, ..., n\}$, temos

$$0 = (v, e_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j, e_k \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j (e_j, e_k) = a_k (e_k, e_k). \tag{2.2.1}$$

Como e_k é não nulo, concluímos que $a_k = 0$.

Se todo o vetor de E puder ser escrito como combinação linear de elementos do conjunto ortogonal S, ou seja, se qualquer $v \in E$ puder ser escrito da forma

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j,$$

[2] Alguns resultados de álgebra linear valem ser recordados: Se um espaço vetorial tem uma base com n elementos, então todas as outras bases também terão n elementos. Isto faz com que a dimensão (o número de elementos de uma base de um espaço vetorial) esteja bem definida. Além disso, se a dimensão de um espaço vetorial for n, então todo conjunto de n elementos que for linearmente independente automaticamente gera todo o espaço vetorial, ou seja, é uma base. De forma similar, todo conjunto de n elementos que gera todo o espaço é automaticamente linearmente independente e, portanto, é uma base.

então o conjunto S é linearmente independente e gera E, ou seja, S é uma base algébrica de E. Os coeficientes a_j podem ser facilmente calculados. Por (2.2.1), vemos que $a_k = (v, e_k)/(e_k, e_k)$. Se S também é ortonormal, então $a_k = (v, e_k)$.

Se um subespaço vetorial $V \subset E$ for finitamente gerado, ou seja, se existir um conjunto finito $S = \{w_1, ..., w_n\}$ tal que $V = [S]$, então sempre podemos construir uma base algébrica ortonormal para V. Para isto, basta aplicar o método de Gram-Schmidt.

Proposição 22. *(Método de Gram-Schmidt) Seja $S = \{e_j : j \in I\}$ um subconjunto de vetores linearmente independentes de E, em que $I = \{1, ..., N\}$ ou $I = \mathbb{N}$. Logo existe um conjunto ortonormal $W = \{w_j : j \in I\}$ tal que*

$$[e_1, ..., e_n] = [w_1, ..., w_n]$$

para todo $1 \leq n \leq N$. Em particular, $[S] = [W]$.

Demonstração. Primeiro observamos que $w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ é um vetor unitário e tal que $[e_1] = [w_1]$. Agora vamos construir os demais vetores por indução. Suponha tenhamos construído um conjunto ortonormal $\{w_1, ..., w_n\}$, $1 \leq n < N$, tal que

$$[e_1, ..., e_j] = [w_1, ..., w_j], \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Vamos agora achar um vetor unitário w_{n+1} ortogonal a todo w_j, $1 \leq j \leq n$, tal que $[e_1, ..., e_{n+1}] = [w_1, ..., w_{n+1}]$. Para tanto, vamos definir

$$\tilde{w} = e_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (e_{n+1}, w_j) w_j.$$

O vetor $\tilde{w}$ é diferente do vetor nulo. De fato, se $\tilde{w} = 0$, então e_{n+1} pertenceria a $[w_1, ..., w_n] = [e_1, ..., e_n]$, ou seja, seria combinação linear de $\{e_1, ..., e_n\}$. Isso faria com que S não fosse linearmente independente.

Observamos também que $\tilde{w}$ é ortogonal a todos os vetores w_1, ..., w_n. De fato, se $1 \leq k \leq n$, temos

$$\begin{aligned}(\tilde{w}, w_k) &= (e_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (e_{n+1}, w_j) w_j, w_k) = (e_{n+1}, w_k) - \sum_{j=1}^{n} (e_{n+1}, w_j)(w_j, w_k) \\ &= (e_{n+1}, w_k) - \sum_{j=1}^{n} (e_{n+1}, w_j) \delta_{jk} = (e_{n+1}, w_k) - (e_{n+1}, w_k) = 0.\end{aligned}$$

Assim, $w_{n+1} = \tilde{w}/\|\tilde{w}\|$ é ortogonal a todos os vetores $\{w_1, ..., w_n\}$ e é unitário. Note que $w_{n+1} \subset [e_1, ..., e_{n+1}]$, já que $w_j \in [e_1, ..., e_n]$ para todo $1 \leq j \leq n$. Logo $\{w_1, ..., w_{n+1}\}$ é ortonormal (e portanto L.I) e está contido em $[e_1, ..., e_{n+1}]$, que tem dimensão $n + 1$, já que S é L.I.. Assim, $\{w_1, ..., w_{n+1}\}$ é uma base de $[e_1, ..., e_{n+1}]$. Portanto,

$$[e_1, ..., e_{n+1}] = [w_1, ..., w_{n+1}].$$

Este procedimento constrói todos os vetores w_j, $j \in J$.

Observe por fim que se $u \in [S]$, então $u \in [e_1, ..., e_n]$, em que $1 \leq n \leq N$, se S é finito, e $n < \infty$, se S é infinito. Isto ocorre pois u é uma combinação linear de finitos elementos de S. Assim, $u \in [w_1, ..., w_n] \subset [W]$ e, portanto, $[S] \subset [W]$. Invertendo o argumento, vemos que $[W] \subset [S]$. Portanto, $[W] = [S]$. □

Quando trabalhamos com EDPs, a combinação linear de finitos elementos nem sempre é suficiente para aplicações. Muitas vezes estamos interessados em escrever uma solução como uma série de elementos ou algo similar. Assim, é interessante saber quando as combinações lineares de um certo conjunto aproximam um elemento.

Vamos então definir alguns conceitos topológicos para espaços normados.

Definição 23. Seja $(E, \|.\|)$ um espaço vetorial normado e $S \subset E$ um subconjunto de E. O *fecho* de S é o conjunto $\overline{S}$ dos vetores $u \in E$ para os quais para todo $\varepsilon > 0$, existe $s \in S$ tal que $\|u - s\| < \varepsilon$. Dizemos que S é um *conjunto fechado* de E se $\overline{S} = S$.

Note que é sempre verdade que $S \subset \overline{S}$ pela definição acima. Como visto em análise, podemos caracterizar o fecho de conjuntos e espaços fechados usando sequências.

Proposição 24. *Um elemento $u \in \overline{S}$ se, e somente se, existir uma sequência $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em S que converge a u. Um conjunto S é fechado se, e somente se, toda sequência convergente $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em S convergir a um elemento de S, ou seja, $\lim_{j\to\infty} s_j \in S$ se $s_j \in S$ para todo S.*

Demonstração. *Primeira afirmação: $u \in \overline{S} \iff \exists (s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em S que converge a u.*

($\Longrightarrow$) Seja $u \in \overline{S}$. Logo para cada $j \in \mathbb{N}$, escolhendo $\varepsilon = \frac{1}{j}$, achamos $s_j \in S$ tal que $\|u - s_j\| < \frac{1}{j}$. Assim, é claro que $\lim_{j\to\infty} s_j \in S$.

($\Longleftarrow$) Por outro lado, se $u \in E$ é tal que $u = \lim_{j\to\infty} s_j$, em que $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos em S, então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $j > N$, temos $\|u - s_j\| < \varepsilon$. Isto implica que $u \in \overline{S}$.

Segunda afirmação: S é fechado $\iff$ toda sequência convergente $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em S converge a um elemento de S.

($\Longrightarrow$) Seja $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente tal que $s_j \in S$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $s = \lim_{j\to\infty} s_j \in \overline{S}$ e S é fechado, concluímos que $s \in S$.

($\Longleftarrow$) Seja $u \in \overline{S}$. Logo existe uma sequência $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em S que converge para u. Por hipótese, u deve pertencer a S. Desta maneira $\overline{S} \subset S$. Como $S \subset \overline{S}$, então $S = \overline{S}$ e S é fechado. □

Para continuar, precisamos também definir conjuntos densos em um espaço vetorial normado.

Definição 25. Dado um espaço vetorial normado $(E, \|.\|)$ e $S \subset E$, um conjunto $F \subset S$ *é denso em* S se para todo $v \in S$ e $\varepsilon > 0$, existir um elemento $f \in F$ tal que $\|f - v\| < \varepsilon$.

Usando uma repetição dos argumentos de análise real, podemos facilmente provar que $F \subset S$ é denso em S se, e somente se, para todo $v \in S$, existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores que estão contidos em F e que convergem a v, ou seja, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - v\| = 0$.

A demonstração é uma repetição do argumento da proposição 24. De fato, se $F \subset S$ é denso em S e $v \in S$, então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in F$ tal que $\|f_n - v\| < \frac{1}{n}$. Basta escolher $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Assim, é claro que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - v\| = 0$. Por outro lado, se para todo $v \in S$, existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em F tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - v\| = 0$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, temos $\|f_n - v\| < \varepsilon$. Assim, $f_{N+1} \in F$ e $\|f_{N+1} - v\| < \varepsilon$.

Definição 26. Seja $(E, \|.\|)$ um espaço normado. Dizemos que o conjunto $S \subset E$ é *total em* E se $[S]$ é denso em E, ou seja, para todo $v \in E$ e $\varepsilon > 0$, existem $s_1, ..., s_N$ em S e α_1, ..., α_N em $\mathbb{K}$ tais que $\|v - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j s_j\| < \varepsilon$.

Note que $[S]$ ser denso em E equivale a dizer que $\overline{[S]} = E$. Usando conjuntos totais, podemos definir o importante conceito de base de Hilbert.

Definição 27. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $S = \{e_j : j \in I\}$ um subconjunto de H indexado por I, em que I é um conjunto finito ou infinito. Dizemos que S é uma *base de Hilbert* de H se S for um conjunto ortonormal e total em H.

Em outras palavras, uma *base de Hilbert* $S = \{e_i : i \in I\}$ de H é um conjunto tal que $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ e tal que o espaço

$$[S] = \{\sum_{i\in J} a_j e_j : J \subset I \text{ é um subconjunto finito}\}$$

é denso em H.

Para finalizar, vamos comparar as definições para $S = \{e_i : i \in I\}$:

S é uma base algébrica ortonormal se	S é uma base de Hilbert se:
1) S é um conjunto ortonormal 2) $[S] = E$	1) S é um conjunto ortonormal 2) $\overline{[S]} = E$

Assim, numa base algébrica todo elemento de E pode ser escrito como combinações lineares de S. Numa base de Hilbert, todo elemento de E pode ser aproximado por combinações lineares de S.

2.2.1. Exemplos: Espaços de dimensão finita e espaços $l_2(\mathbb{K})$. Usando os resultados anteriores, vamos dar dois exemplos fundamentais de espaços de Hilbert: espaços com produto interno com dimensão finita e espaços $l_2(\mathbb{K})$.

Vamos começar com espaços de dimensão finita.

PROPOSIÇÃO 28. *Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita. Logo E é um espaço de Hilbert e um conjunto $S \subset E$ é uma base de Hilbert se, e somente se, S é uma base ortonormal algébrica.*

DEMONSTRAÇÃO. *E é um espaço de Hilbert.*

Como E tem dimensão finita, então, usando o método de Gram-Schmidt, sabemos que existe uma base algébrica ortonormal $B = \{e_1, ..., e_n\}$ de E. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em E.

Vamos provar que para cada $k \in \{1, ..., n\}$, a sequência $((u_j, e_k))_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_j - u_i\| < \varepsilon$ para todo $i, j > N$. Assim, para $i, j > N$, temos

$$|(u_j, e_k) - (u_i, e_k)| = |(u_j - u_i, e_k)| \leq \|u_j - u_i\|\|e_k\| = \|u_j - u_i\| < \varepsilon.$$

Sabemos de análise real que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge. Seja $a_k \in \mathbb{K}$ tal que $a_k = \lim_{j\to\infty}(u_j, e_k)$ e $u = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$. Basta agora mostrar que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$. Para tanto, observamos que

$$\begin{aligned}\|u_j - u\| &= \|\sum_{k=1}^{n}(u_j, e_k)e_k - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| \leq \|\sum_{k=1}^{n}((u_j, e_k) - a_k)\, e_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}|(u_j, e_k) - a_k|\|e_k\| = \sum_{k=1}^{n}|(u, e_k) - a_k|.\end{aligned}$$

Como $\lim_{j\to\infty}|(u_j, e_k) - a_k| = 0$, concluímos nossa demonstração de que E é um espaço de Hilbert.

$S \subset E$ é uma base de Hilbert se, e somente se, S é uma base algébrica ortonormal.

Se $[S]$ é uma base ortonormal algébrica, então $[S] = E$ e, portanto, $[S]$ é denso em E. Como E é ortonormal e total, concluímos que S é uma base de Hilbert de E.

Por outro lado, seja S uma base de Hilbert de E. Como E tem dimensão finita, então $[S]$ também tem dimensão finita. Seja $v \in E$. Como $[S]$ é um conjunto total de E, então existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos em $[S]$ que convergem para v em E. Como $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente, então também é uma sequência de Cauchy. Logo converge para um elemento em $[S]$, já que $[S]$ é completo. De fato, $[S]$ tem dimensão finita (pois é um subespaço de um espaço com dimensão finita) e, portanto, é um espaço de Hilbert pela discussão inicial. Como uma sequência converge para no máximo um elemento, concluímos que $v \in [S]$. Logo S é ortonormal e $[S] = E$. Logo S é uma base algébrica ortonormal. □

O segundo exemplo muito importante de espaço de Hilbert é dado pelos espaços $l_2(\mathbb{K})$. Este espaço consiste nas funções $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ (ou seja, sequências de números em $\mathbb{K}$), que representamos como

$$x = (x_1, x_2, ...), \quad x_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \mathbb{N},$$

que satisfazem

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2 < \infty.$$

Note que $x_j = x(j)$, ou seja, x_j são os elementos da imagem da função x.

É simples verificar que o espaço de todas as sequências $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ é um espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas abaixo:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...) &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...), \\ \lambda(x_1, x_2, ...) &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, ...),\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

em que x e y são sequências e $\lambda \in \mathbb{K}$. Para mostrar que $l_2(\mathbb{K})$ é um espaço vetorial, basta mostrar que a soma e a multiplicação por escalar de termos em $l_2(\mathbb{K})$ também pertencem a $l_2(\mathbb{K})$. Isto implicará que $l_2(\mathbb{K})$ é um subespaço vetorial do espaço das sequências e, portanto, também é um espaço vetorial, conforme a proposição abaixo.

Proposição 29. *O conjunto $l_2(\mathbb{K})$ é um espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas em 2.2.2.*

Demonstração. Como vimos, basta provar que se $x, y \in l_2(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $x + y \in l_2(\mathbb{K})$ e $\lambda x \in l_2(\mathbb{K})$.

Antes, observamos que, pelo Exemplo 4, a função

$$(x, y)_{\mathbb{K}^n} = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \quad x, y \in \mathbb{K}^n,$$

define um produto interno em $\mathbb{K}^n$. Logo $\|x\|_{\mathbb{K}^n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$ é uma norma e vale a desigualdade triangular $\|x + y\|_{\mathbb{K}^n} \leq \|x\|_{\mathbb{K}^n} + \|y\|_{\mathbb{K}^n}$ para todo $x, y \in \mathbb{K}^n$. Vamos agora continuar em etapas.

Etapa 1: Se $x, y \in l_2(\mathbb{K})$, então $x + y \in l_2(\mathbb{K})$.

Para $x = (x_1, x_2, ...), y = (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{K})$, definimos $x^n = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $y^n = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$. Assim, vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2 &= \lim_{n\to\infty} \|x^n + y^n\|_{\mathbb{K}^n}^2 \leq \lim_{n\to\infty} (\|x^n\|_{\mathbb{K}^n} + \|y^n\|_{\mathbb{K}^n})^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2} \right)^2 = \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2} \right)^2 < \infty.\end{aligned}$$

Portanto, $x + y \in l_2(\mathbb{K})$ e a adição está bem definida.

Etapa 2: Se $x \in l_2(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $\lambda x \in l_2(\mathbb{K})$.

Basta observar que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda x_j|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |\lambda x_j|^2 = |\lambda|^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = |\lambda|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty.$$

Assim, $\lambda x \in l_2(\mathbb{K})$ e a multiplicação também está bem definida. □

Proposição 30. *Sejam $x, y \in l_2(\mathbb{K})$. Logo a soma $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$ converge absolutamente e a função abaixo define um produto interno em $l_2(\mathbb{K})$:*

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}. \tag{2.2.3}$$

Demonstração. Sejam $x = (x_1, x_2, ...)$ e $y = (y_1, y_2, ...)$. Para mostrar que a soma converge absolutamente, vamos usar novamente as notações x^n, y^n e $(x^n, y^n)_{\mathbb{K}^n}$ da demonstração da Proposição 29.

Vamos definir $\tilde{x} = (|x_1|, |x_2|, ...)$ e $\tilde{y} = (|y_1|, |y_2|, ...)$. É evidente que $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ pertencem a $l_2(\mathbb{K})$. De fato, têm a mesma norma de x e y, respectivamente. Definimos $\tilde{x}^n = (|x_1|, ..., |x_n|)$ e $\tilde{y}^n = (|y_1|, ..., |y_n|)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para mostrar que a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$ converge absolutamente, basta observar que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} |x_j \overline{y_j}| &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |x_j||y_j| = \lim_{n\to\infty} (\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)_{\mathbb{K}^n} \leq \lim_{n\to\infty} \|\tilde{x}^n\|_{\mathbb{K}^n} \|\tilde{y}^n\|_{\mathbb{K}^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2}.\end{aligned}$$

Por fim, agora que sabemos que a função (2.2.3) está bem definida, mostrar que ela define um produto interno é simples e fica a cargo do leitor. □

Teorema 31. *O espaço $(l_2(\mathbb{K}), (.,.))$ é um espaço de Hilbert, em que o produto interno foi definido em (2.2.3). Uma base de Hilbert para esse espaço é dada por $B = \{e_1, e_2, ...\}$, em que e_j tem 1 na j-ésima entrada e 0 em todas as outras. (Exemplos: $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, ...)$, $e_3 = (0, 0, 1, ...)$ e etc)*

Demonstração. Basta agora mostrar que $l_2(\mathbb{K})$ é completo. Observe que se $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2(\mathbb{K})$, então

$$(x, e_j) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \delta_{kj} = x_j.$$

Assim, $x = ((x, e_1), (x, e_2), (x, e_3), ...)$.

Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $l_2(\mathbb{K})$. Pelo mesmo argumento da demonstração da Proposição (28), a sequência $((u_j, e_k))_{j\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy. De fato, vemos que se $i, j \in \mathbb{N}$, então

$$|(u_j, e_k) - (u_i, e_k)| = |(u_j - u_i, e_k)| \leq \|u_j - u_i\| \|e_k\| = \|u_j - u_i\|.$$

Dessa relação segue fácil que se (u_j) é uma sequência de Cauchy em $l_2(\mathbb{K})$, então $((u_j, e_k))_{j\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$.

Como toda sequência de Cachy em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sempre converge, então existe $a_k = \lim_{j\to\infty}(u_j, e_k)$. Vamos mostrar que

$$u = (a_1, a_2, a_3, ...)$$

pertence a $l_2(\mathbb{K})$ e que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$.

Para isto, começamos observando que, como $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $i, j \geq N$, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(u_j, e_k) - (u_i, e_k)|^2 = \|u_j - u_i\|^2 < \varepsilon^2.$$

Em particular, para todo $M \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{k=1}^{M} |(u_j, e_k) - (u_i, e_k)|^2 < \varepsilon^2.$$

Tomando o limite $i \to \infty$, concluímos que

$$\sum_{k=1}^{M} |(u_j, e_k) - a_k|^2 < \varepsilon^2. \tag{2.2.4}$$

Agora tomamos o limite $M \to \infty$ e em (2.2.4) obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(u_j, e_k) - a_k|^2 < \varepsilon^2. \tag{2.2.5}$$

Assim, fica claro que $u_j - u \in l_2(\mathbb{K})$. Como $u = (u - u_j) + u_j$ e $u - u_j \in l_2(\mathbb{K})$ e $u_j \in l_2(\mathbb{K})$, concluímos que $u \in l_2(\mathbb{K})$, já que a soma de elementos em $l_2(\mathbb{K})$ também pertence a $l_2(\mathbb{K})$, pela Proposição (29). Por fim, (2.2.5) mostra que $\|u_j - u\| < \varepsilon$, para todo $j > N$. Como $\varepsilon > 0$ era arbitrário, provamos nossa convergência. □

O último exemplo que daremos é o mais importante no estudo de equações diferenciais parciais. Trata-se do espaço das funções de quadrado integrável, ou, simplesmente, as funções em $L_2(\Omega; \mathbb{K})$. Esse espaço é definido da seguinte maneira.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\mathcal{L}_2(\Omega;\mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{K}$ mensuráveis[3] tais que

$$\int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Podemos mostrar que a relação $f \sim g$ definida como

$$f \sim g \iff \int_\Omega |f(x) - g(x)|^2 dx$$

é uma relação de equivalência. Definimos, então $L_2(\Omega;\mathbb{K}) := \mathcal{L}_2(\Omega;\mathbb{K})/\sim$, ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência. Definindo desta maneira, $L_2(\Omega;\mathbb{K})$ é um espaço vetorial com produto interno dado por

$$(f,g) := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Na prática, pensamos nos elementos de $L_2(\Omega;\mathbb{K})$ simplesmente como funções. Apenas devemos lembrar que se $\int_\Omega |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$, então consideramos que f e g são o mesmo vetor.

Existem diversas bases para $L_2(\Omega;\mathbb{K})$. Vamos estudar exemplos importantes a seguir.

2.3. Bases de polinômios e polinômios trigonométricos

Para discutir exemplos de base de Hilbert, vamos antes provar alguns teoremas de aproximação. Começaremos com o Teorema de aproximação de Weierstrass.

Vamos usar a notação $C([a,b];\mathbb{K})$ para denotar o conjunto das funções contínuas com valores em $\mathbb{K}$, em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Neste espaço, vamos definir a norma

$$\|f\|_{C([a,b];\mathbb{K})} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Vamos denotar por $\mathcal{P}_\mathbb{K}$ o conjunto dos polinômios de $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{K}$, isto é, o conjuntos das funções $p : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ da forma

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j x^j,$$

em que $c_j \in \mathbb{K}$ e $N \in \mathbb{N}_0$. Com essas definições, podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 32. *(Teorema de aproximação de Weierstrass) Seja $a < b$. Para toda função $f \in C([a,b];\mathbb{K})$, existe uma sequência $(p_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_\mathbb{K}$ tal que*

$$\lim_{m\to\infty} \|f - p_m\|_{C([a,b];\mathbb{K})} = 0.$$

Demonstração. *Etapa 1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ uma função contínua tal que $f(x) = 0$ se $x \notin [0,1]$. Logo existe uma sequência $(p_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_\mathbb{K}$ tal que* $\lim_{m\to\infty} \|f - p_m\|_{C([0,1];\mathbb{K})} = 0$.

Neste caso, para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$p_m(x) = \frac{\int_0^1 f(y)(1-(x-y)^2)^m dy}{\int_{-1}^1 (1-y^2)^m dy}.$$

É fácil verificar que p_m é um polinômio. De fato, usando o binômio de Newton, vemos que

$$p_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{2(m-j)} \left(\binom{m}{j} \binom{2(m-j)}{k} (-1)^{2m-j-k} \frac{\int_0^1 f(y) y^{2(m-j)-k} dy}{\int_{-1}^1 (1-y^2)^m dy} \right) x^k$$

e, portanto, p_m é um polinômio de grau menor ou igual a $2m$.

---

[3]Aqui o correto é usar as integrais no sentido de Lesbegue. Quem nunca estudou a teoria de medida e integração, fique tranquilo! Não é necessário saber exatamente o que são função mensuráveis. Basta saber que praticamente todas as funções que podemos imaginar são mensuráveis. (A construção de uma função não mensurável é complicada e requer o axima da escolha).

Vamos agora definir funções $L_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $m \in \mathbb{N}$, por

$$L_m(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-x^2)^m}{\int_{-1}^{1}(1-y^2)^m dy}, & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}$$

Para $x \in [0,1]$ vemos que

$$\frac{\int_0^1 f(y)(1-(x-y)^2)^m dy}{\int_{-1}^{1}(1-y^2)^m dy} = \int_0^1 f(y)L_m(x-y)dy = \int_{\infty}^{\infty} f(y)L_m(x-y)dy,$$

em que usamos que $f(y) = 0$ para $y \notin [0,1]$.

Nosso objetivo agora é mostrar que p_m converge para f quando $m \to \infty$ na norma de $C([0,1];\mathbb{K})$. Para tanto, observamos que

$$\begin{aligned} f(x) - p_m(x) &= f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)L_m(x-y)dy \\ &\overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)L_m(y)dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)L_m(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}(f(x)-f(x-y))L_m(y)dy. \end{aligned}$$

Usamos em (1) que $1 = \int_{-1}^{1} L_m(y)dy$ e fizemos a mudança de variável $y = x - y$ na segunda integral.

Vamos escolher $\delta \in]0,1[$ tal que se $|x_1 - x_2| < \delta$, então $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2$. Isto sempre é possível, pois f é diferente de zero apenas em $[0,1]$ e toda função contínua definida em um compacto é uniformemente contínua. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} &\left|\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)-f(x-y))L_m(y)dy\right| \\ &\le \left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x)-f(x-y))L_m(y)dy\right| + \left|\int_{|y|>\delta}(f(x)+f(x-y))L_m(y)dy\right| \\ &\le \int_{-\delta}^{\delta}|f(x)-f(x-y)|L_m(y)dy + \int_{|y|>\delta}(|f(x)|+|f(x-y)|)\,L_m(y)dy \\ &\le \varepsilon/2 + 2\|f\|_{C([a,b];\mathbb{K})}\int_{|y|>\delta} L_m(y)dy. \end{aligned}$$

Agora basta observar que $|y| > \delta$, então

$$(1-y^2)^m \le (1-\delta^2)^m$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}(1-w^2)^m dw = 2\int_0^1(1-w^2)^m dw &\ge 2\int_0^1(1-w)^m(1+w)^m dw \\ &\ge 2\int_0^1(1-w)^m dw = -2\frac{(1-w)^{m+1}}{m+1}\bigg|_0^1 = \frac{2}{m+1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{|y|>\delta} L_m(y)dy = \int_{\delta<|y|\le 1} L_m(y)dy = \frac{\int_{\delta<|y|\le 1}(1-y^2)^m dy}{\int_{-1}^{1}(1-w^2)^m dw} \le (1-\delta^2)^m(m+1).$$

Observe que

$$\lim_{x\to\infty}(1-\delta^2)^x(x+1) = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)}{e^{-x\ln(1-\delta^2)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\ln(1-\delta^2)e^{-x\ln(1-\delta^2)}} = 0,$$

em que usamos L'hopital na última igualdade.

Desta maneira, para cada $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que se $m > M$, temos $(1-\delta^2)^m(m+1) < \varepsilon/(4\|f\|_{C([a,b];\mathbb{K})})$. Desta forma, para $m > M$, temos

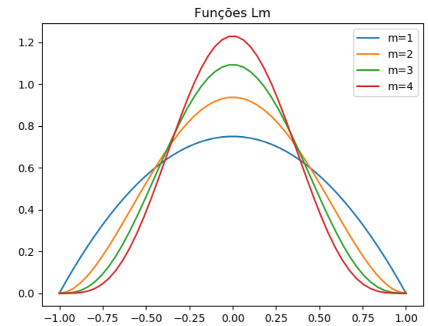

FIGURA 2.3.1

$$|f(x) - p_m(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x-y)) L_m(y) dy \right|$$
$$\leq \varepsilon/2 + 2\|f\|_{C([a,b];\mathbb{K})} \int_{|y|>\delta} L_m(y) dy \leq \varepsilon.$$

Como isto vale para todo $x \in [0,1]$, concluímos que

$$\lim_{m\to\infty} \|f - p_m\|_{C([0,1];\mathbb{K})} = \lim_{m\to\infty} \max_{x\in[0,1]} |f(x) - p_m(x)| = 0.$$

Etapa 2: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ contínua. Logo existe uma sequência $(p_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ tal que $\lim_{m\to\infty} \|f - p_m\|_{C([a,b];\mathbb{K})} = 0$.

Agora vamos provar nosso teorema. Seja $f \in C([a,b];\mathbb{K})$. Logo a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(a + x(b-a)) - f(a) - xf(b) + xf(a), x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$$

é contínua e se anula fora de $[0,1]$. (Note que $g(0) = g(1) = 0$).

Assim, pelos resultados anteriores, existe uma sequência de polinômios p_m tais que

$$\lim_{m\to\infty} \|g - p_m\|_{C([0,1];\mathbb{K})} = 0.$$

Fazendo uma mudança de variável, vemos que

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x\in[a,b]} \left| g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - p_m\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| = \lim_{m\to\infty} \max_{x\in[0,1]} |g(x) - p_m(x)| = 0.$$

Pela definição de g, temos

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - \left(f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)(f(b) - f(a)) + p_m\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right) \right| = 0.$$

Assim, definindo os polinômios $h_m : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ por

$$h_m(x) = f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)(f(b) - f(a)) + p_m\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

concluímos que

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - h_m(x)| = 0.$$

$\square$

Para dar exemplos de bases de Hilbert, precisamos de mais um resultado de aproximação: o Teorema 34. Faremos a demonstração de um resultado junto com um resultado até mais refinado mais adiante. Por enquanto, vamos apenas aceitar o resultado do Teorema 34. Vamos antes definir funções de suporte compacto.

DEFINIÇÃO 33. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dizemos que uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tem suporte compacto se o conjunto

$$\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

é um conjunto compacto contido em Ω. Usamos a notação $C_c(\Omega; \mathbb{K})$ para denotar o conjunto de todas as funções contínuas de suporte compacto. A notação $C_c^m(\Omega; \mathbb{K})$, $m \in \{0, 1, 2, ...\} \cup \{\infty\}$ é utilizada para denotar as funções de classe C^m com suporte compacto, ou seja, $C_c^m(\Omega; \mathbb{K}) = C_c(\Omega; \mathbb{K}) \cap C^m(\Omega; \mathbb{K})$. Por convenção $C_c^0(\Omega; \mathbb{K}) := C_c(\Omega; \mathbb{K})$.

Quando $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$, uma função f pertence a $C_c(\Omega; \mathbb{K})$ se, e somente se, $f \in C(]a, b[; \mathbb{K})$ e existe $\delta \in]0, \frac{b-a}{2}[$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in]a, a + \delta[\cup]b - \delta, b[$. Uma função f em $C_c(\Omega; \mathbb{K})$ sempre pode ser extendida de maneira única a uma função contínua em $\overline{\Omega}$. Basta fazer $u(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$. Abaixo sempre que considerarmos uma função $f \in C_c(\Omega; \mathbb{K})$ como uma função em $\overline{\Omega}$, estamos nos referindo a essa extensão.

TEOREMA 34. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Logo o conjunto $C_c(\Omega; \mathbb{K})$ é denso em $L^2(\Omega; \mathbb{K})$, ou seja, para cada $f \in L^2(\Omega; \mathbb{K})$ e $\varepsilon > 0$, existe uma função $g \in C_c(\Omega; \mathbb{K})$ tal que $\|f - g\|_{L^2(\Omega;\mathbb{K})} < \varepsilon$. (Como sempre a norma de $L^2(\Omega; \mathbb{K})$ é dada por $\|h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{K})} = \left(\int_0^1 |h(x)|^2 dx\right)^{1/2}$.)*

Usando o Teorema de Weierstrass, podemos facilmente achar diversas bases para o espaços de Hilbert $L^2(]a, b[; \mathbb{K})$, em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.3.1. Bases formadas de polinômios. Consideramos os polinômios $\mathcal{P} = \{1, x, x^2, ...\}$. Em $L^2(] - 1, 1[; \mathbb{K})$, consideremos como sempre o produto interno

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Usando a Proposição 22, podemos aplicar o método de Gram-schmidt para obter um conjunto ortonormal $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ em relação ao produto interno acima. A não ser por constantes multiplicativas para deixar os vetores com norma 1, esse conjunto conssiste nos polinômios de Legendre, que são usados, entre outras coisas, no método de quadratura de Gauss para calcular numericamente integrais. A menos de uma constante multiplicativa, os elementos e_j são $e_1 = \alpha_1 1$, $e_2 = \alpha_2 x$, $e_3 = \alpha_3 \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $e_4 = \alpha_4 \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ e etc, em que α_1, α_2, α_3 e etc são constantes multiplicativas..

TEOREMA 35. *O conjunto $\mathcal{B}$ descrito acima é uma base de Hilbert de $L^2(] - 1, 1[; \mathbb{K})$.*

DEMONSTRAÇÃO. O conjunto $\mathcal{B}$ é ortonormal por definição. Devemos agora mostrar que ele também é total.

Seja $f \in L^2(] - 1, 1[; \mathbb{K})$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 34, existe $g \in C_c(] - 1, 1[; \mathbb{K})$ tal que

$$\|f - g\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/2.$$

Pelo Teorema de Weierstrass 32, existe um polinômio $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ tal que

$$\|g - p\|_{C([-1,1];\mathbb{K})} < \varepsilon/(2\sqrt{2}).$$

Logo

$$\|g - p\|_{L^2([-1,1];\mathbb{K})} = \sqrt{\int_{-1}^{1} |g(x) - p(x)|^2 dx} \leq \|g - p\|_{C([-1,1];\mathbb{K})} \sqrt{\int_{-1}^{1} 1 dx} < \varepsilon/2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|f - p\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})} &= \|f - g + g - p\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})} \\ &\leq \|f - g\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})} + \|g - p\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Observamos por fim que como p é um polinômio, então $p \in [\mathcal{P}] = [\mathcal{B}]$, em que a última igualdade segue da Proposição 22. Assim, $[\mathcal{P}]$ é denso em $L^2(]-1,1[;\mathbb{K})$. $\square$

2.3.2. Bases formadas de polinômios trigonométricos. Abaixo vamos dar exemplos importantes de bases trigonométricas.

Teorema 36. *Sejam $\mathcal{B}_s$ e $\mathcal{B}_c$ os conjuntos $\mathcal{B}_s = \{\psi_n : n \in \{1,2,3,...\}\}$ e $\mathcal{B}_c = \{\phi_n : n \in \{0,1,2,3,...\}\}$, em que $\psi_n(x) = \sqrt{2}sen(n\pi x)$, $\phi_0(x) = 1$ e $\phi_n(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x)$ para $n \geq 1$. Então tanto $\mathcal{B}_s$ como $\mathcal{B}_c$ são bases do espaço de Hilbert $L^2(]0,1[;\mathbb{K})$.*

Para provar o Teorema, precisamos de um lema.

Lema 37. *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, existem constantes $b_0^{(n)}$, $b_1^{(n)}$, ..., $b_n^{(n)}$ tais que*

$$(\cos(\pi x))^n = \sum_{j=0}^{n} b_j^{(n)} \cos(j\pi x).$$

Demonstração. Vamos mostrar por indução finita. Para $n = 0$, escolhemos $b_0^{(0)} = 1$. Para $n = 1$, basta escolher $b_0^{(1)} = 0$ e $b_1^{(1)} = 1$.

Suponha que o lema valha para $n \in \mathbb{N}_0$. Vamos mostrar que ele vale para $n+1$. De fato, sabemos que

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right). \tag{2.3.1}$$

Assim, temos

$$(\cos(\pi x))^{n+1} = (\cos(\pi x))^n \cos(\pi x) \stackrel{(1)}{=} \sum_{j=0}^{n} b_j^{(n)} \cos(j\pi x)\cos(\pi x)$$
$$\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} b_j^{(n)} \left(\cos((j+1)\pi x) + \cos((j-1)\pi x)\right) \stackrel{(3)}{=} \sum_{j=0}^{n+1} \tilde{b}_j^{(n)} \cos(j\pi x),$$

em que usamos a hipótese de indução em (1), a relação trigonométrica (2.3.1) em (2) e apenas juntamos os termos em (3). Isto conclui a demonstração de que o lema vale para $n+1$ e a nossa demonstração por indução finita. $\square$

Agora estamos em condições de provar o Teorema 36. Lembramos que para mostrar que $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ é uma base no espaço de Hilbert H, devemos:

(1) Provar que o conjunto $\mathcal{B}$ é ortonormal.
(2) Provar que $[\mathcal{B}]$ é denso em H, isto é, mostrar que para cada $u \in H$ e $\varepsilon > 0$, existe $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \in [\mathcal{B}]$ tal que $\|u - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j\|_H < \varepsilon$.

Demonstração. *Conjunto $\mathcal{B}_c$:*

Para provar que o conjunto é ortonormal, basta verificar que

$$\int_0^1 \sqrt{2}\cos(n\pi x)\sqrt{2}\cos(m\pi x)dx = \delta_{mn},$$
$$\int_0^1 \sqrt{2}\cos(m\pi x)dx = 0,$$
$$\int_0^1 1^2 dx = 1,$$

em que $m, n \in \mathbb{N}$. Deixamos as integrais acima a cargo do leitor.

Para provar que $[\mathcal{B}]$ é denso em $L^2(]0,1[;\mathbb{K})$, consideremos $f \in L^2(]0,1[;\mathbb{K})$ e $\varepsilon > 0$. Sabemos pelo Teorema 34 que existe $g \in C_c(]0,1[;\mathbb{K})$ tal que

$$\|f - g\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/2.$$

Sabemos que $x \in [0,1] \mapsto \cos(\pi x) \in [-1,1]$ é um homeomorfismo, cuja inversa chamaremos de $y \in [-1,1] \mapsto \frac{1}{\pi}\arccos(y) \in [0,1]$. Assim, $[-1,1] \ni y \mapsto g(\frac{1}{\pi}\arccos(y)) \in \mathbb{K}$ é uma função contínua. Pelo Teorema de Weierstrass, existe uma sequência de polinômios $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\lim_{m\to\infty} \max_{y\in[-1,1]} \left| g(\frac{1}{\pi}\arccos(y)) - p_m(y) \right| = 0.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \cos(\pi x)$, concluímos que

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x\in[0,1]} |g(x) - p_m(\cos(\pi x))| = 0.$$

Portanto, para um dado $\varepsilon > 0$, existirá um $m \in \mathbb{N}$, que fixaremos a partir de agora, tal que

$$\max_{x\in[0,1]} |g(x) - p_m(\cos(\pi x))| < \varepsilon/2. \tag{2.3.2}$$

A função p_m tem a seguinte expressão:

$$p_m(y) = \sum_{j=0}^{M_m} a_{jm} y^j,$$

em que $a_{jm} \in \mathbb{K}$, $j \in \{0, ..., M_m\}$ e $M_m \in \mathbb{N}_0$. Assim,

$$p_m(\cos(\pi x)) = \sum_{j=0}^{M_m} a_{jm} \cos(\pi x)^j.$$

Pelo Lema 37, concluímos existem $b_{jm} \in \mathbb{K}$, $j \in \{0, ..., M_m\}$, tais que

$$p_m(\cos(\pi x)) = \sum_{j=0}^{M_m} b_{jm} \cos(j\pi x).$$

Isto mostra que $p_m \in [\mathcal{B}_c]$. Note também que

$$\begin{aligned} \|g(x) - p_m(\cos(\pi x))\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} &= \sqrt{\int_0^1 |g(x) - p_m(\cos(\pi x))|^2 dx} \\ &\leq \max_{x\in[0,1]} |g(x) - p_m(\cos(\pi x))| \sqrt{\int_0^1 1^2 dx} < \varepsilon/2, \end{aligned}$$

pela Desigualdade (2.3.2).

Para finalizar, basta observar que

$$\begin{aligned} \|f - p_m(\cos(\pi x))\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} &\leq \|f - g + g - p_m(\cos(\pi x))\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} \\ &\leq \|f - g\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} + \|g - p_m(\cos(\pi x))\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Desta maneira, vemos que $[\mathcal{B}_c]$ é denso em $L^2(]0,1[;\mathbb{K})$. Isto termina a demonstração de que $\mathcal{B}_c$ é uma base.

Conjunto $\mathcal{B}_s$:

Para mostrar que $\mathcal{B}_s$ é um conjunto ortonormal, basta observar que

$$\int_0^1 \sqrt{2}\text{sen}(n\pi x)\sqrt{2}\text{sen}(m\pi x) dx = \delta_{mn},$$

em que m e n pertencem a $\mathbb{N}$. Deixamos novamente a cargo do leitor.

Basta agora mostrar que $[\mathcal{B}_s]$ é denso em $L^2(]0,1[;\mathbb{K})$.

Seja $f \in L^2(]0,1[;\mathbb{K})$ e $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $g \in C_c(]0,1[;\mathbb{K})$ tal que

$$\|f - g\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/2,$$

pelo Teorema 34.

Vamos definir $\tilde{g} : [0,1] \to \mathbb{K}$ por

$$\tilde{g}(x) = \frac{g(x)}{\text{sen}(\pi x)}.$$

Como g é contínua e tem suporte compacto, a função $\tilde{g}$ também o é. Logo $\tilde{g} \in L^2(]0,1[;\mathbb{K})$. Já vimos que $\mathcal{B}_c$ é uma base. Logo, existe uma função $p : [0,1] \to \mathbb{K}$ dada por

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cos(j\pi x)$$

tal que

$$\|\tilde{g}(x) - p(x)\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/2.$$

Assim,

$$\int_0^1 |g(x) - p(x)\text{sen}(\pi x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \frac{g(x)}{\text{sen}(\pi x)} - p(x) \right|^2 |\text{sen}(\pi x)|^2 dx \leq \int_0^1 \left| \frac{g(x)}{\text{sen}(\pi x)} - p(x) \right|^2 dx \leq \varepsilon^2/4.$$

Logo $\|g(x) - p(x)\text{sen}(\pi x)\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/2$. Note que

$$p(x)\text{sen}(\pi x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cos(j\pi x)\text{sen}(\pi x).$$

Vamos, então, recordar que

$$\cos(a)\text{sen}(b) = \frac{1}{2}\left(\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)\right).$$

Assim,

$$\cos(j\pi x)\text{sen}(\pi x) = \frac{1}{2}\left(\text{sen}((j+1)\pi x) - \text{sen}((j-1)\pi x)\right)$$

e, portanto, existem b_j, $j \in \{0, ..., m+1\}$, tais que

$$p(x)\text{sen}(\pi x) = \sum_{j=0}^{m+1} b_j \text{sen}(j\pi x).$$

Logo $p(x)\text{sen}(\pi x) \in [\mathcal{B}_s]$.

Para finalizar, basta observar que

$$\begin{aligned} &\|f - p(x)\text{sen}(\pi x)\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} \leq \|f - g + g - p(x)\text{sen}(\pi x)\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} \\ &\leq \|f - g\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} + \|g - p(x)\text{sen}(\pi x)\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Usando os resultados acima, daremos exemplos de base de Hilbert em $L^2(]-1,1[;\mathbb{K})$.

TEOREMA 38. *Sejam* $\mathcal{B}_{real} = \{1/\sqrt{2}\} \cup \{sen(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$ *forma uma base de Hilbert do espaço de Hilbert* $L^2(]-1,1[;\mathbb{K})$.

Demonstração. Para mostrar que $\mathcal{B}_{\text{real}}$ é um conjunto ortonormal, basta verificar (o que deixaremos a cargo do leitor) que para $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)dx &= \delta_{mn},\\ \int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x)dx &= \delta_{mn},\\ \int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x)dx &= 0,\\ \int_{-1}^{1} \cos(m\pi x)dx &= 0,\\ \int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(m\pi x)dx &= 0,\\ \int_{0}^{1} 1^2 dx &= 1.\end{aligned}$$

Agora para mostrar que $[\mathcal{B}_{\text{real}}]$ é denso em $L^2(]-1,1[;\mathbb{K})$, vemos que toda função $f : [-1,1] \to \mathbb{K}$ pode ser escrita como

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Definimos $f_P, f_I : [-1,1] \to \mathbb{K}$ por

$$f_P(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ e } f_I(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Observe que $f_P(-x) = f_P(x)$ e que $f_I(-x) = -f_I(x)$, ou seja, f_P é par e f_I é ímpar. Fixemos agora um $\varepsilon > 0$. Vamos escolher funções

$$p_P(x) = \sum_{j=0}^{m_P} a_j \cos(j\pi x) \text{ e } p_I(x) = \sum_{j=1}^{m_I} b_j \operatorname{sen}(j\pi x)$$

tais que $\|f_P - p_P\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/(2\sqrt{2})$ e $\|f_I - p_I\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/(2\sqrt{2})$ (Aqui estamos usando que $\mathcal{B}_s$ e $\mathcal{B}_c$ são bases de $L^2(]0,1[;\mathbb{K})$, pelo Teorema 36). Definindo $p = p_P + p_I$, vemos que

$$\begin{aligned}\|f-p\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})} &= \|f_P + f_I - p_P - p_I\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})}\\ &\le \|f_P - p_P\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})} + \|f_I - p_I\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})}.\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\|f_P - p_P\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})} &= \sqrt{\int_{-1}^{1} |f_P(x) - p_P(x)|^2 dx}\\ &= \sqrt{2}\sqrt{\int_{0}^{1} |f_P(x) - p_P(x)|^2 dx} = \sqrt{2}\|f_P - p_P\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/2,\\ \|f_I - p_I\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})} &= \sqrt{\int_{-1}^{1} |f_I(x) - p_I(x)|^2 dx}\\ &= \sqrt{2}\sqrt{\int_{0}^{1} |f_I(x) - p_I(x)|^2 dx} = \sqrt{2}\|f_I - p_I\|_{L^2(]0,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon/2,\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

em que usamos que $x \mapsto |f_P(x) - p_P(x)|^2$ e $x \mapsto |f_I(x) - p_I(x)|^2$ são funções pares. De fato, basta observar que

$$|f_I(-x) - p_I(-x)|^2 = |-f_I(x) + p_I(x)|^2 = |f_I(x) - p_I(x)|^2$$

e de forma similar para $|f_P(x)-p_P(x)|^2$. Juntando (2.3.3) e (2.3.4), concluímos que $\|f-p\|_{L^2(]-1,1[;\mathbb{K})} < \varepsilon$. $\square$

O resultado acima nos permite achar mais um base importante para $L^2(]-1,1[;\mathbb{C})$. Note que aqui precisaremos dos números complexos.

Corolário 39. *O conjunto $\mathcal{B}_{comp} = \{(1/\sqrt{2})e^{in\pi x} : n \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base de Hilbert do espaço de Hilbert $L^2(]-1,1[;\mathbb{C})$.*

Demonstração. Primeiro, observamos que o conjunto $\mathcal{B}_{\text{comp}}$ é ortonormal, ou seja,

$$\int_{-1}^{1} e^{in\pi x}\overline{e^{im\pi x}}dx = \int_{-1}^{1} e^{in\pi x}e^{-im\pi x}dx = \delta_{mn},$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. (Fica a cargo do leitor).

Por fim, pela Fórmula de Euler, $\{e^{in\pi x}, e^{-in\pi x}\}$ gera o mesmo espaço que $\{\cos(n\pi x), \text{sen}(n\pi x)\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $[\mathcal{B}_{\text{comp}}] = [\mathcal{B}_{\text{real}}]$, ou seja, $[\mathcal{B}_{\text{comp}}]$ é denso em $L^2(]-1,1[;\mathbb{C})$, já que $[\mathcal{B}_{\text{real}}]$ o é. $\square$

2.4. Propriedades de Bases de Hilbert

Anteriormente, vimos a definição de bases de Hilbert. Nessa seção, vamos mostrar a importância delas. Inicialmente iremos escrever um vetor do espaço de Hilbert como uma série em termos da base de Hilbert de maneira análoga ao que fazemos em álgebra linear em dimensões finitas. Depois iremos considerar o problema de existência de bases de Hilbert.

2.4.1. Expansão de elementos em termos de uma base de Hilbert. Diremos que uma série $\sum_{j=1}^{\infty} v_j$ de elementos v_j contidos em um espaço normado $(E, \|.\|)$ converge para um elemento $v \in E$ se a sequência $(\sum_{j=1}^{n} v_j)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para v. Isto é o mesmo que dizer que $\lim_{n\to\infty} \|\sum_{j=1}^{n} v_j - v\| = 0$ ou, de forma equivalente, que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, temos $\|\sum_{j=1}^{n} v_j - v\| < \varepsilon$.

O Teorema 41 é fundamental na teoria[4]. Antes vamos provar um simples lema de álgebra linear.

Lema 40. *Seja $(E, (.,.))$ um espaço com produto interno. Se v é ortogonal ao subconjunto $\{w_1, ..., w_m\}$ contido em E, então v é ortogonal ao conjunto $[w_1, ..., w_m]$, ou seja, v é ortogonal a toda combinação linear de w_1, ..., w_m.*

Demonstração. Basta observar que se $w \in [w_1, ..., w_m]$, então $w = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j$, em que $\alpha_j \in \mathbb{K}$. Logo

$$(v, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_j}(v, w_j) = 0.$$

$\square$

Teorema 41. *Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno e $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ um conjunto ortonormal total (ou seja, $\mathcal{B}$ é ortonormal e $[\mathcal{B}]$ é denso em E). Se $v \in E$, então:*

i. $v = \sum_{j=1}^{\infty}(v, e_j)e_j$.

ii. $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(v, e_j)|^2$.

Em particular, se $(H, (.,.))$ é um espaço de Hilbert e $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Hilbert, então todo elemento $v \in H$ pode ser expresso como i. e sua norma como ii..

---

[4]Para este teorema não é necessário o espaço ser completo. Algumas referências fazem provas alternativas, usando a completeza do espaço. Veja o Teorema 21.12 no livro: Introdução à análise funcional, do César R. de Oliveira, que traz uma demonstração bastante clara desse teorema que, no entanto, requer que o espaço seja completo.

Demonstração. i. Seja $v \in E$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos definir $v_n = \sum_{j=1}^{n}(v,e_j)e_j$. Nosso objetivo é mostrar que a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para v. Inicialmente, observamos que, para todo $k \in \{1,...,n\}$, temos

$$(v - v_n, e_k) = \left(v - \sum_{j=1}^{n}(v,e_j)e_j, e_k \right) = (v,e_k) - \sum_{j=1}^{n}(v,e_j)(e_j,e_k) = (v,e_k) - (v,e_k) = 0,$$

ou seja, $v - v_n$ é nulo ou ortogonal ao conjunto $\{e_1,...,e_n\}$.

Como $\mathcal{B}$ é um espaço total, dado $\varepsilon > 0$, existe $s = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j e_j \in [\mathcal{B}]$ tal que

$$\|v - s\| < \varepsilon.$$

Seja $n \geq N$. Logo $v_n - s$ é uma combinação linear dos vetores $\{e_1,...,e_n\}$. Logo $v_n - s$ é ortogonal a $v - v_n$ pelo Lema 40. Pelo Teorema de Pitágoras 20, temos

$$\|v - s\|^2 = \|v - v_n + v_n - s\|^2 = \|v - v_n\|^2 + \|v_n - s\|^2,$$

ou seja, $\|v_n - v\| \leq \|v - s\| < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\lim_{n\to\infty}\|v - v_n\| = 0$, que é o que queríamos provar.

ii. Para demonstrar esta segunda afirmação, note que

$$v = v_n + (v - v_n).$$

Os vetores $v_n = \sum_{j=1}^{n}(v,e_j)e_j$ e $v - v_n$ são ortogonais pelo Lema 40, já que $v - v_n$ é ortogonal a todo e_j, $j \in \{1,...,n\}$. Assim, pelo Teorema 20, temos

$$\|v\|^2 = \|v_n\|^2 + \|v - v_n\|^2.$$

Como $\lim_{n\to\infty}\|v - v_n\| = 0$ pelo item i., concluímos que

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2.$$

Para finalizar, basta observar, novamente pelo Teorema de Pitágoras, uma vez que os vetores de $\mathcal{B}$ são ortonormais, que

$$\|v_n\|^2 = \|\sum_{j=1}^{n}(v,e_j)e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\|(v,e_j)e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n}|(v,e_j)|^2.$$

□

Usando o Teorema 41 e os resultados da seção 2.3.2, podemos expressão uma função $f \in L^2(]0,1[;\mathbb{K})$ como

$$f(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mathrm{sen}(j\pi\theta), \quad b_j = 2\int_0^1 f(\theta)\mathrm{sen}(j\pi\theta)d\theta \tag{2.4.1}$$

em que o limite é entendido da seguinte maneira

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1 |f(\theta) - \sum_{j=1}^{N} b_j \mathrm{sen}(j\pi\theta)|^2 d\theta = 0. \tag{2.4.2}$$

Similarmente, podemos escrever $f \in L^2(]0,1[;\mathbb{K})$ na forma

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\pi\theta), \quad a_j = 2\int_0^1 f(\theta)\cos(j\pi\theta)d\theta \tag{2.4.3}$$

Uma função $f \in L^2(]-1,1[;\mathbb{C})$ pode ser escrita como

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cos(j\pi\theta) + b_j\mathrm{sen}(j\pi\theta)\right), \quad a_j = \int_{-1}^{1} f(\theta)\cos(j\pi\theta)d\theta,\ b_j = \int_{-1}^{1} f(\theta)\mathrm{sen}(j\pi\theta)d\theta. \tag{2.4.4}$$

e

$$f(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{j\pi\theta}, \quad c_j = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(\theta)e^{-j\pi\theta}d\theta. \tag{2.4.5}$$

Todos os limites são entendidos no sentido da norma L^2, de forma análoga a (2.4.2). A série (2.4.1) é chamada de *série de Fourier seno.* A série (2.4.3) é chamada de *série de Fourier cosseno.* A série (2.4.4) é chamada de *série de Fourier na forma real.* Finalmente a série (2.4.5) é chamada de *série de Fourier na forma complexa.*

Para ficar mais claro, vamos calcular uma série no exemplo abaixo.

EXEMPLO 42. Consideremos a função $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(\theta) = \theta$. Sabemos que $\mathcal{B}_s = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$, em que $\phi_n(x) = \sqrt{2}\text{sen}(n\pi x)$, é uma base de Hilbert de $L^2(]0,1[;\mathbb{R})$. Logo

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}(f,\phi_n)\phi_n \ \text{ e } \ \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(f,\phi_n)|^2.$$

Vamos calcular as expressões acima explicitamente. Temos

$$\begin{aligned}(f,\phi_n) &= \sqrt{2}\int_0^1 f(\theta)\text{sen}(n\pi\theta)d\theta = \sqrt{2}\int_0^1 \theta\text{sen}(n\pi\theta)d\theta = -\sqrt{2}\frac{\theta\cos(n\pi\theta)}{n\pi}\bigg|_0^1 + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{\cos(n\pi\theta)}{n\pi}d\theta \\ &= -\sqrt{2}\frac{\theta\cos(n\pi\theta)}{n\pi}\bigg|_0^1 + \sqrt{2}\ \frac{\text{sen}(n\pi\theta)}{n^2\pi^2}\bigg|_0^1 = \frac{-\sqrt{2}\cos(n\pi)}{n\pi} + \sqrt{2}\frac{\text{sen}(n\pi)-\text{sen}(n0)}{n^2\pi^2} \\ &= \frac{-\sqrt{2}\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{-\sqrt{2}(-1)^n}{n\pi}.\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f,\phi_n)\phi_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\text{sen}(n\pi x)$$

e que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\phi_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}.$$

Observe que

$$\|f\|^2 = \int_0^1 \theta^2 d\theta = \frac{1}{3}.$$

Assim, conseguimos provar a seguinte relação[5]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2} = \frac{1}{3} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A demonstração acima pode ser facilmente adaptada para o caso em que a o conjunto $\mathcal{B}$ é finito. Nesse caso, o Teorema 41 é bem conhecido de álgebra linear. O resultado acima também nos mostra que a desigualdade de Bessel é uma igualdade quando o conjunto ortonormal é total.

Observe que nas condições do Teorema 41, se $v \in E$, então $v = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j$ com $\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|^2 < \infty$. Os elementos α_j são unicamente determinados. De fato, para $k \in \mathbb{N}$, temos

$$(v,e_k) = (\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j, e_k) = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(e_j,e_k) = \alpha_k. \tag{2.4.6}$$

[5]O valor de $\frac{\pi^2}{6}$ é igual a: 1.6449340668482264. Usando um programa simples no python, podemos calcular a série $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$. Para $N = 10$, temos 1.5497677311665408. Para $N = 1000$, temos 1.6439345666815615. Para $N = 1000000$, temos 1.64493306684877. Vemos que se aproxima cada vez mais do valor de $\frac{\pi^2}{6}$.

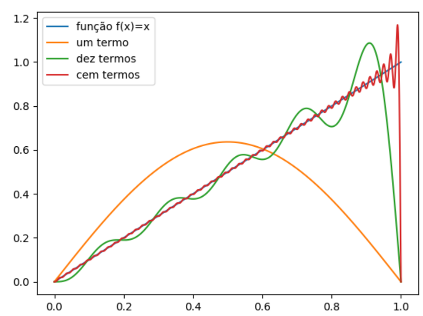

FIGURA 2.4.1. Exemplo 42

Poderíamos nos perguntar se uma série $v = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ com $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty$ sempre converge para um elemento em E. Em geral, isso não é verdade. No entanto, isso vale quando o espaço é completo, ou seja, para espaços de Hilbert, conforme a proposição abaixo.

PROPOSIÇÃO 43. *Seja* $(H, (.,.))$ *um espaço de Hilbert e* $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ *uma base de Hilbert. Logo* $v \in H$ *se, e somente se, existir uma sequência* $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$ *e* $v = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$*. Neste caso,* $a_j = (v, e_j)$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $v \in H$, então o Teorema 41 nos diz que $v = \sum_{j=1}^{\infty} (v, e_j) e_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} |(v, e_j)|^2 = \|v\|^2 < \infty$. Logo não há mais nada a se mostrar.

Agora seja $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$. Definimos $v_k = \sum_{j=1}^{k} a_j e_j$. Se $k > l$, então o Teorema de Pitágoras 20 nos diz que

$$\|v_k - v_l\|^2 = \|\sum_{j=1}^{k} a_j e_j - \sum_{j=1}^{l} a_j e_j\|^2 = \|\sum_{j=l+1}^{k} a_j e_j\|^2 = \sum_{j=l+1}^{k} \|a_j e_j\|^2 = \sum_{j=l+1}^{k} |a_j|^2$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$, a sequência $(\sum_{j=1}^{l} |a_j|^2)_{l\in\mathbb{N}}$ converge e, portanto, é de Cauchy. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $k > l \geq N$, temos

$$\|v_k - v_l\|^2 = \sum_{j=l+1}^{k} |a_j|^2 = \left| \sum_{j=1}^{k} |a_j|^2 - \sum_{j=1}^{l} |a_j|^2 \right| < \varepsilon$$

Desta forma, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy. Como H é um espaço de Hilbert, então H é completo. Logo existe $v \in H$ tal que

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} a_j e_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j.$$

Por fim, como vimos em (2.4.6), os coeficientes serão dados por $a_j = (v, e_j)$. □

COROLÁRIO 44. *Seja* $(H, (.,.))$ *um espaço de Hilbert com uma base de Hilbert* $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$*. Logo* $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ *define um elemento em* H *se, e somente se,* $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$*.*

DEMONSTRAÇÃO. É uma consequência direta do Teorema 41.ii. e da Proposição 43. □

A Proposição 43 não é verdade se tirarmos a completude do espaço. Consideremos, por exemplo, o subconjunto $l_2^{fin}(\mathbb{K}) \subset l_2(\mathbb{K})$ dos elementos $x = (x_1, x_2, ...)$ para os quais apenas um número finito de elementos x_j são diferentes de zero. O conjunto $l_2^{fin}(\mathbb{K})$ é um subespaço vetorial e $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal e total em $l_2^{fin}(\mathbb{K})$, pois todos os elementos de $l_2^{fin}(\mathbb{K})$ são combinações lineares (finitas) de elementos de $\mathcal{B}$. De fato, $v \in l_2^{fin}(\mathbb{K})$ se, e somente se, v puder ser escrito como $v = \sum_{k=1}^{N} a_j e_j$ para algum $N \in \mathbb{N}$ e $a_j \in \mathbb{K}$. Logo $[B] = l_2^{fin}(\mathbb{K})$ e, portanto, é denso em $l_2^{fin}(\mathbb{K})$.

Note que a sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dada por $u_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} e_k$ é de Cauchy, já que se $j > l$, então

$$\|u_j - u_l\|^2 = \| \sum_{k=l+1}^{j} \frac{1}{k} e_k \|^2 = \sum_{k=l+1}^{j} \frac{1}{k^2}$$

e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$. Assim, basta repetir o argumento da demonstração do Teorema 43. No entanto, u_j não converge em $l_2^{fin}(\mathbb{K})$, pois o limite da sequência é $u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j} e_j$ e u não pertence a $l_2^{fin}(\mathbb{K})$, já que todos os elementos que multiplicam e_j são não nulos.

2.4.2. Existência de Bases de Hilbert em espaços separáveis. Até agora vimos propriedades de bases de Hilbert e exemplos de bases finitas e infinitas enumeráveis. Poderíamos nos perguntar se todo espaço de Hilbert possui uma base de Hilbert. Isso é verdade. **Todo espaço de Hilbert tem uma base de Hilbert**. No entanto, essas bases podem sequer ser enumeráveis.

Aqui, ao invés de demonstrar esse Teorema mais geral, que é feito com o uso do Lema de Zorn, vamos nos restringir a demonstração de existência de bases de Hilbert para os chamados espaços separáveis. A demonstração é mais construtiva e esses espaços são suficientes para as nossas aplicações.

Diremos que um conjunto A é *enumerável* quando for finito ou quando existir uma bijeção $B : \mathbb{N} \to A$. Para mais propriedades de conjuntos enumeráveis, recomendamos o(s) livro(s) do Elon L. Lima de análise[6]. Lá são discutidas propriedades de enumerabilidade suficientes aos nossos propósitos.

Definição 45. Dizemos que um espaço vetorial com produto interno $(E, (.,.))$ é *separável* se existir um subconjunto S que seja enumerável e denso em E.

Proposição 46. *Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno separável. Logo todo subespaço $F \subset E$ também é separável.*

Demonstração. Se E ou F têm dimensão zero, então o resultado é trivial. Consideremos então o caso em que as dimensões de E e de F sejam maiores do que zero.

Seja $\tilde{E} = \{x_j : j \in \mathbb{N}\} \subset E$ um subconjunto enumerável denso em E. Queremos achar um subconjunto enumerável $\tilde{F} \subset F$ que seja denso em F.

Para cada $x_j \in \tilde{E}$, definimos $d_j := \inf_{y\in\tilde{F}} \|y - x_j\|$ e um subconjunto $\mathcal{C}_{x_j}$ da seguinte forma:

∘ Se $d_j \geq 1$ (ou seja, não existe $y \in F$ tal que $\|y - x_j\| < 1$), então definimos $\mathcal{C}_{x_j} = \emptyset$.

∘ Se $d_j \in (0, 1)$, então definimos $K = \max\{k \in \mathbb{N} : d_j < 1/k\}$, ou seja, se $k \leq K$, então existe $y \in F$ tal que $\|y - x_j\| < \frac{1}{k}$ e se $k > K$, então não existe $y \in F$ tal que $\|y - x_j\| < \frac{1}{k}$. Neste caso definimos $\mathcal{C}_{x_j} = \{y_k \in F : k \in \{1, ..., K\}\}$, em que y_k foram escolhidos de forma que $\|y_k - x_j\| < \frac{1}{k}$.

∘ Se $d_j = 0$, então para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $y \in F$ tal que $\|x_j - y\| < 1/k$. Neste caso, definimos $\mathcal{C}_{x_j} = \{y_k \in F : k \in \mathbb{N}\}$, em que y_k foram escolhidos de forma que $\|y_k - x_j\| < \frac{1}{k}$. Note que os y_k não precisam ser distintos.

O conjunto $\tilde{F} = \cup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_{x_j}$ é enumerável, por ser união enumerável de conjuntos vazios ou enumeráveis. Além disso $\tilde{F} \subset F$ por construção. Vamos agora mostrar que $\tilde{F}$ é denso em F.

Dado $x \in F$ e $\varepsilon > 0$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $2/k < \varepsilon$. Sabemos que existe $x_j \in \tilde{E}$ tal que $\|x_j - x\| < 1/k$. Logo $d_j < 1/k$. Portanto, pela construção de $\mathcal{C}_{x_j}$, existe $y_k \in \mathcal{C}_{x_j}$ tal que $\|y_k - x_j\| < 1/k$. Desta forma, temos

$$\|x - y_k\| = \|x - x_j + x_j - y_k\| \leq \|x - x_j\| + \|x_j - y_k\| < 2/k < \varepsilon.$$

Concluímos que $\tilde{F}$ é denso em F. □

Seguindo os passos da Proposição 46, também poderíamos provar que se $S \subset E$, então existe um conjunto enumerável $\tilde{S} \subset S$ que é denso em S.

[6]Uma boa referência é o livro: Análise real, volume 1. Funções de uma variável, Elon Lages Lima, Coleção matemática universitária.

Nossa definição de enumerabilidade foi retirada de lá.

PROPOSIÇÃO 47. *O espaço vetorial com produto interno $(E,(.,.))$ é separável se, e somente se, existir um subconjunto enumerável S tal que $[S]$ é denso, ou seja, um subconjunto $S=\{u_i : i\in I\}$ de E, $I=\{1,...,N\}$ ou $I=\mathbb{N}$, tal que o subespaço*

$$[S]=\{\sum_{i=1}^{m} a_j u_j : a_j\in\mathbb{K},\, m\in I\}$$

é denso em E.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos supor que a dimensão de E seja maior do que zero, pois caso contrário a demonstração é trivial, e que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Se $(E,(.,.))$ é separável, então existe um subconjunto enumerável $S=\{u_i : i\in\mathbb{N}\}$ que é denso em E. Como $S\subset[S]$ e S é denso em E, então é claro que $[S]$ também é denso em E.

Por outro lado, se existir $S=\{u_i : i\in I\}$, $I=\{1,...,N\}$ ou $I=\mathbb{N}$, tal que $[S]$ é denso em E, então mostraremos que o conjunto

$$[S]_{\mathbb{Q}}:=\{\sum_{i=1}^{n} b_j u_j : b_j\in\mathbb{Q},\, n\in I\}$$

é denso em E. Para tanto, vamos supor, sem perda de generalidade, que $0\notin S$.

Seja $v\in E$. Logo existe $\sum_{i=1}^{n} a_j u_j$, $a_j\in\mathbb{R}$, tal que $\|v-\sum_{i=1}^{n} a_j u_j\|<\varepsilon/2$. Vamos escolher agora $b_j\in\mathbb{Q}$ tal que $|b_j-a_j|<\varepsilon/(2n\|u_j\|)$. Assim,

$$\begin{aligned}\|v-\sum_{i=1}^{n} b_j u_j\| &= \|v-\sum_{i=1}^{n} a_j u_j+\sum_{i=1}^{n} a_j u_j-\sum_{i=1}^{n} b_j u_j\|\\ &= \|v-\sum_{i=1}^{n} a_j u_j\|+\sum_{i=1}^{n}|a_j-b_j|\|u_j\|\\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2n\|u_j\|}\|u_j\|=\varepsilon.\end{aligned}$$

Por fim, basta observar que $[S]_{\mathbb{Q}}:=\cup_{j\in I}[S_j]_{\mathbb{Q}}$, em que

$$[S_j]_{\mathbb{Q}}=\{\sum_{i=1}^{j} a_i u_i : a_j\in\mathbb{Q}\}.$$

Como $\mathbb{Q}^j$ é um conjunto enumerável, então $[S_j]_{\mathbb{Q}}$ também é enumerável, já que $(a_1,...,a_j)\in\mathbb{Q}^j\mapsto\sum_{i=1}^{j} a_i u_i\in[S_j]_{\mathbb{Q}}$ é sobrejetor. Assim, o conjunto S é união enumerável de conjuntos enumeráveis. Portanto, é enumerável.

A demonstração para $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ é feita trocando $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}=\{a+ib : a,b\in\mathbb{Q}\}$ e observando que este último conjunto também é enumerável. □

TEOREMA 48. *Seja $(E,(.,.))$ um espaço separável. Logo existe um subconjunto $\mathcal{B}\subset E$ enumerável que é ortonormal e total em E. Em particular, se $(H,(.,.))$ é um espaço de Hilbert separável, então H tem uma base de Hilbert enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO. Como E é separável, existe $S=\{x_j : j\in I\}$, $I=\{1,...,N\}$ ou $I=\mathbb{N}$, tal que $[S]=E$. Vamos supor que S seja um conjunto linearmente independente. Para tanto, basta excluir os termos em excesso: Começamos com x_1. Se $x_1\neq 0$, mantemos o x_1. Se x_1 e x_2 são L.D., excluímos o x_2. Caso contrário, mantemos o x_2. Se $\{x_1,x_2,x_3\}$ é L.D., excluímos o x_3. Se não for, mantemos o x_3. E assim por diante.

Construímos $\mathcal{B}=\{e_j : j\in I\}$ usando o método de Gram-Schmidt a partir de S. Pela Proposição 22, o conjunto $\mathcal{B}$ é ortonormal e $[\mathcal{B}]=[S]$. Como S é total em E, então $[S]$ é denso em E. Portanto, $[\mathcal{B}]=[S]$ também é denso em E. Logo $\mathcal{B}$ é total em E. □

Corolário 49. *Um espaço vetorial com produto interno $(E, (.,.))$ é separável se, e somente se, existir um conjunto ortonormal, total em E e enumerável. Em particular, um espaço de Hilbert é separável se, e somente se, tiver uma base de Hilbert enumerável.*

Demonstração. Se E for separável, então E possui um subconjunto enumerável, ortonormal e total em E, pelo Teorema 48. Por outro lado, se E contiver um conjunto total em E e enumerável, então E é separável, pela Proposição 47. □

2.5. Decomposição de um espaço de Hilbert em espaços ortogonais

Vamos agora discutir decomposições de espaços de Hilbert em subespaços ortogonais. Inicialmente vamos definir o espaço ortogonal a um conjunto $S \subset E$, em que E é um espaço vetorial com produto interno.

Definição 50. Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno e $S \subset E$ um subconjunto não vazio. O *complemento ortogonal de* S, denotado por $S^\perp$, é o subconjunto de E definido por

$$S^\perp = \{u \in E : (u, s) = 0, \, \forall s \in S\}.$$

A seguinte propriedade de inclusão é válida.

Proposição 51. *Sejam $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno, S_1 e S_2 subconjuntos não vazios de E. Se $S_1 \subset S_2$, então $S_2^\perp \subset S_1^\perp$.*

Demonstração. Se $u \in S_2^\perp$, então $(u, s) = 0$ para todo $s \in S_2$. Como $S_1 \subset S_2$, isto implica que $(u, s) = 0$ para todo $s \in S_1$. Logo $s \in S_1^\perp$. □

Em relação às propriedades de fecho de um conjunto, podemos provar os seguintes resultados sobre o complemento ortogonal.

Proposição 52. *Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno e $S \subset E$ um subconjunto não vazio. As seguintes propriedades são válidas.*
i. $S^\perp$ é um subespaço vetorial fechado.
ii. $S^\perp = (\overline{S})^\perp$.

Demonstração. *i.* Sejam $u, v \in S^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $s \in S$. Logo

$$(\alpha u + \beta v, s) = \alpha(u, s) + \beta(v, s) = 0.$$

Assim, $\alpha u + \beta v \in S^\perp$ e $S^\perp$ é um subespaço.
Para mostrar que $S^\perp$ é fechado, consideremos $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $S^\perp$ que converge a $v \in E$. Para todo $s \in S$, temos

$$(v, s) = (\lim_{j\to\infty} v_j, s) = \lim_{j\to\infty} (v_j, s) = 0.$$

Logo $v \in S^\perp$ e $S^\perp$ é fechado.
ii. Como $S \subset \overline{S}$, então, pela Proposição 51, vemos que $(\overline{S})^\perp \subset S^\perp$.
Por outro lado, se $z \in S^\perp$, então $(z, s) = 0$ para todo $s \in S$. Se $\overline{s} \in \overline{S}$, então podemos achar uma sequência $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} s_j = s$. Assim,

$$(z, \overline{s}) = (z, \lim_{j\to\infty} s_j) = \lim_{j\to\infty} (z, s_j) = 0$$

e, portanto, $z \in (\overline{S})^\perp$. Portanto, $S^\perp \subset (\overline{S})^\perp$.
Como $(\overline{S})^\perp \subset S^\perp$ e $S^\perp \subset (\overline{S})^\perp$, concluímos que $S^\perp = (\overline{S})^\perp$. □

As propriedades vistas até aqui são válidas para todos os espaços com produto interno. Vamos usar agora a completeza para provar algumas propriedades que só são válidas para espaços de Hilbert. Antes mostraremos que os subespaços completos de um espaço de Hilbert são os subespaços fechados.

Proposição 53. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e F um subespaço de H. Logo F é um espaço de Hilbert com o mesmo produto interno de H se, e somente se, F for um subespaço fechado. Além disso, se H for separável, então F também é separável.*

Demonstração. *Se F é fechado, então F é um espaço de Hilbert.*

Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em F. Como H é um espaço de Hilbert, a sequência converge para um elemento $u \in H$. Mas F é fechado por hipótese. Logo o elemento u pertence a F. Assim, toda sequência de Cauchy em F converge para um elemento em F. Isto mostra que F é completo e, portanto, um espaço de Hilbert.

Se F é um espaço de Hilbert, então F é fechado.

Seja $u \in \overline{F}$. Logo existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em F que converge para u. Como a sequência é convergente, ela também é de Cauchy. Como F é um espaço de Hilbert, então existe $v \in F$ tal que a sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge para v. Uma sequência só pode convergir para um único elemento, conforme visto na Equação (2.1.5). Assim, $u = v \in F$. Isto mostra que F é fechado, pela Proposição 24

Se H é separável, então F também é separável.

É uma consequência direta da Proposição 46. □

Agora mostraremos como decompor um espaço de Hilbert em soma direta de espaços ortogonais. Aqui a completeza do espaço será utilizada. Antes vamos fixar a notação e relembrar soma direta.

Definição 54. Sejam E um espaço vetorial, F_1 e F_2 subespaços de E. Dizemos que *E é a soma direta de F_1 e F_2* e denotamos por $E = F_1 \oplus F_2$, se

i. $E = F_1 + F_2 = \{f_1 + f_2 : f_1 \in F_1, f_2 \in F_2\}$, ou seja, todo elemento de E pode ser escrito como soma de elementos de F_1 e F_2.

ii. $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

As propriedades implicam que um elemento de E pode ser escrito de maneira única como soma de elementos de F_1 e F_2. De fato, se $u \in E$ e $u = f_1 + f_2 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$, com $f_1, \tilde{f}_1 \in F_1$ e $f_2, \tilde{f}_2 \in F_2$, então $f_1 - \tilde{f}_1 = f_2 - \tilde{f}_2$ pertence a $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Logo $f_1 = \tilde{f}_1$ e $f_2 = \tilde{f}_2$.

Teorema 55. *Sejam $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $F \subset H$ um subespaço fechado de H. Então $H = F \oplus F^\perp$. Em particular, todo elemento $u \in H$ pode ser escrito de maneira única como uma combinação linear $u = f + f^\perp$, em que $f \in F$ e $f^\perp \in F^\perp$.*

Além disso, $\|u - f\| = \|f^\perp\| = \inf_{v\in F} \|u - v\|$, ou seja, f é a melhor aproximação possível de u no espaço F. Se $\mathcal{B}_F = \{f_j : j \in I\}$, $I = \{1, ..., N\}$ ou $I = \mathbb{N}$, for uma base de Hilbert para F, então $f = \sum_{j\in I}(u, f_j)f_j$.

Demonstração. *Os espaços F e $F^\perp$ são tais que $F \cap F^\perp = \{0\}$.*

Seja $u \in F \cap F^\perp$. Como $u \in F^\perp$, então $(u, f) = 0$ para todo $f \in F$. Como $u \in F$, temos $(u, u) = 0$. Assim, $u = 0$.

O espaço H é soma de F e $F^\perp$, isto é, $H = F + F^\perp$.

Seja $u \in H$. Se $u \in F$, então $u = u + 0$, em que $u \in F$ e $0 \in F^\perp$.

Se $u \notin F$, então definimos $d = \inf_{v\in F} \|u - v\|$. Logo $d > 0$, pois F é fechado. De fato, se d fosse igual a zero, então para todo $\varepsilon > 0$ existiria $v \in F$ tal que $\|u - v\| < \varepsilon$. Assim, poderíamos achar uma sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em F tal que $\|u - v_j\| < \frac{1}{j}$ (basta escolher $\varepsilon = 1/j$ para cada $j \in \mathbb{N}$). Isto claramente implicaria que $\lim_{j\to\infty} v_j = u$. Como F é fechado, então u pertenceria a F, o que é um absurdo. Isto prova que $d > 0$.

Sabemos pela definição de ínfimo de análise real que se $d = \inf_{v\in F} \|u - v\|$, então existe uma sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em F tal que $d \le \|u - v_j\| < d + \frac{1}{j}$. Assim, essa sequência satisfaz

$$\begin{aligned}
\|v_j - v_k\|^2 &= \|(v_j - u) - (v_k - u)\|^2 \\
&\overset{(1)}{=} 2\|v_j - u\|^2 + 2\|v_k - u\|^2 - \|(v_j - u) + (v_k - u)\|^2 \\
&= 2\|v_j - u\|^2 + 2\|v_k - u\|^2 - \|v_j + v_k - 2u\|^2 \\
&= 2\|v_j - u\|^2 + 2\|v_k - u\|^2 - 4\|\frac{v_j + v_k}{2} - u\|^2,
\end{aligned}$$

em que usamos a lei do paralelogramo em (1), ou seja, usamos

$$\|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 - \|a+b\|^2$$

para $a = v_j - u$ e $b = v_k - u$. Note que $(v_j + v_k)/2 \in F$, pois F é um subespaço vetorial.

Como $\|u - v\| \geq d$ para todo $v \in F$, tomando $v = \frac{v_j+v_k}{2}$ concluímos que

$$\|v_j - v_k\|^2 \leq 2\|v_j - u\|^2 + 2\|v_k - u\|^2 - 4d^2.$$

Pela construção da sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$, temos $\lim_{j\to\infty} \|v_j - u\|^2 = d^2$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq N$, então $\|v_j - u\|^2 < d^2 + \varepsilon^2/4$. Assim, se $j, k \geq N$, concluímos que

$$\|v_j - v_k\|^2 < 2(d^2 + \varepsilon^2/4) + 2(d^2 + \varepsilon^2/4) - 4d^2 = \varepsilon^2.$$

A sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é, portanto, uma sequência de Cauchy. Logo converge, já que H é um espaço de Hilbert (Aqui usamos o fato de que H é um espaço de Hilbert!). Seja $f := \lim_{j\to\infty} v_j$. Como $v_j \in F$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e F é fechado, concluímos que $f \in F$. Além disso,

$$\|u - f\| = \|u - \lim_{j\to\infty} v_j\| = \lim_{j\to\infty} \|u - v_j\| = d.$$

Agora consideremos $z \in F$ tal que $\|z\| = 1$. Logo $f + (u - f, z)z \in F$, pois F é um subespaço vetorial. Assim,

$$\begin{aligned}
\|u - f\|^2 = d^2 = \inf_{v\in F} \|u - v\|^2 &\leq \|u - (f + (u - f, z)z)\|^2 \\
&= (u - f - (u - f, z)z, u - f - (u - f, z)z) \\
&= (u - f, u - f) - \overline{(u - f, z)}(u - f, z) - (u - f, z)(z, u - f) + |(u - f, z)|^2(z, z) \\
&= \|u - f\|^2 - \overline{(u - f, z)}(u - f, z) - \overline{(u - f, z)}(u - f, z) + |(u - f, z)|^2 \\
&= \|u - f\|^2 - |(u - f, z)|^2.
\end{aligned}$$

Para que a igualdade

$$\|u - f\|^2 \leq \|u - f\|^2 - |(u - f, z)|^2$$

seja válida, é necessário que $(u - f, z) = 0$.

Concluímos que se $w \in F$ for diferente de zero, então $(u - f, w) = \|w\|(u - f, w/\|w\|) = 0$. Basta tomar $z = w/\|w\|$. Assim, $u - f \in F^\perp$. Definindo $f^\perp := u - f \in F^\perp$, concluímos que $u = f + f^\perp$.

Se $\mathcal{B}_F = \{f_j : j \in I\}$, $I = \{1, ..., N\}$ ou $I = \mathbb{N}$, for uma base de Hilbert para F, então $f = \sum_{j\in I}(u, f_j)f_j$.

Para provar essa afirmação, observamos que

$$u = \sum_{j\in I}(u, f_j)f_j + (u - \sum_{j\in I}(u, f_j)f_j).$$

O vetor $\sum_{j\in I}(u, f_j)f_j$ pertence a F, já que $\mathcal{B}_F$ é uma base de F. Por outro lado, $u - \sum_{j\in I}(u, f_j)f_j \in F^\perp$. De fato, se $z \in F$, então $z = \sum_{j\in I}(z, f_j)f_j$. Portanto,

$$\begin{aligned}
(u - \sum_{j\in I}(u, f_j)f_j, z) &= (u, z) - \sum_{j\in I}(u, f_j)(f_j, z) = (u, z) - (u, \sum_{j\in I}(z, f_j)f_j) \\
&= (u, z) - (u, z) = 0.
\end{aligned}$$

Como a decomposição de $u \in H$ em vetores de F e $F^\perp$ é única, concluímos que

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{j\in I}(u, f_j)f_j, \\
f^\perp &= u - \sum_{j\in I}(u, f_j)f_j.
\end{aligned}$$

$\square$

Observe que se u e v são dois vetores não nulos, então a projeção de u no subespaço $V = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{K}\}$ é igual a $u - \frac{(u,v)}{(v,v)}v$. É interessante observar que foi justamente o vetor $u - \frac{(u,v)}{(v,v)}v$ que foi usado na demonstração da desigualdade de Cauchy-Schwarz. A projeção também já foi usada na demonstração da Desigualdade de Bessel e no método de Gram-Schmidt.

Uma análise da demonstração acima nos mostra que o que realmente precisamos é que F seja um espaço de Hilbert. Isto sempre é válido se H for um espaço de Hilbert e se F for fechado, pela Proposição 53. Abaixo, vamos estudar um exemplo de espaço E que não é de Hilbert e que contém um subespaço fechado $F \subset E$, mas que não é completo. Assim, conseguiremos obter um exemplo em que as conclusões do Teorema 55 não valem.

Exemplo 56. Seja $l_2(\mathbb{K})$ e $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ a base construída no Teorema 31. Consideremos $E \subset l^2(\mathbb{K})$ o subespaço das combinações lineares dos vetores $\{\tilde{e}_1\} \cup \{e_j : j \in \mathbb{N}, j \geq 2\}$, em que $\tilde{e}_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} e_j$.

O conjunto $F = [\{e_j : j \in \mathbb{N}, j \geq 2\}]$ dos elementos da forma $\sum_{j=2}^{N} \alpha_j e_j$ é um conjunto fechado em E, pois toda sequência em F que converge para um elemento de E, deve necessariamente pertencer a $[\{e_j : j \in \mathbb{N}, j \geq 2\}]$ (verifique!).

Observe que $F^\perp = \{u \in E : (u, e_j) = 0, j \geq 2\} = \{0\}$. Assim, não temos $E = F \oplus F^\perp$, já que $\tilde{e}_1 \notin F \oplus F^\perp = F$.

Para espaços de Hilbert, podemos caracterizar o complemento ortogonal do complemento ortogonal, como abaixo.

Proposição 57. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert. Se S é um subespaço vetorial, então $(S^\perp)^\perp = \overline{S}$.*

Demonstração. Seja $u \in \overline{S}$. Logo existe uma sequência $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em S que converge a u. Se $s^\perp \in S^\perp$, então

$$(u, s^\perp) = (\lim_{j\to\infty} s_j, s^\perp) = \lim_{j\to\infty} (s_j, s^\perp) = 0.$$

Logo $u \in (S^\perp)^\perp$ e $\overline{S} \subset (S^\perp)^\perp$.

Agora seja $u \in (S^\perp)^\perp$. Como $H = \overline{S} \oplus (\overline{S})^\perp = \overline{S} \oplus S^\perp$, pelo Teorema 55 e a Proposição 52, concluímos que $u = \overline{s} + s^\perp$, com $\overline{s} \in \overline{S}$ e $s^\perp \in S^\perp = (\overline{S})^\perp$. Com isto, vemos que

$$(s^\perp, s^\perp) = (s^\perp, \overline{s} + s^\perp) = (s^\perp, u) = 0,$$

pois u é ortogonal a todo elemento de $S^\perp$. Assim, $s^\perp = 0$ e $u = \overline{s} \in \overline{S}$, ou seja, $(S^\perp)^\perp \subset \overline{S}$. □

Novamente, o fato de H ser de Hilbert é fundamental para a Proposição 57.

Exemplo 58. Nas condições do Exemplo 56, Vemos que $F^\perp = \{0\}$. Logo $(F^\perp)^\perp = E$ que não é o fecho de F, já que F já é um conjunto fechado em E.

Corolário 59. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $F \subset H$ um subespaço. Se $F^\perp = \{0\}$, então $\overline{F} = H$, ou seja, F é denso em H.*

Demonstração. Basta observar que $\overline{F} = (F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$. □

Novamente o Corolário acima não vale se H não for de Hilbert, pelo Exemplo 56. Vamos terminar essa seção com mais uma caracterização de Base de Hilbert.

Corolário 60. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{B} = \{e_j : j \in I\}$ um conjunto ortonormal, em que I é finito ou infinito. Se $(e_j, u) = 0$ para todo $j \in I$ implicar que $u = 0$, então $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert.*

Demonstração. O conjunto $\mathcal{B}$ é ortonormal por hipótese. Portanto, basta provar que ele é total em H.

Pela Proposição 51, como $\mathcal{B} \subset [\mathcal{B}]$, então $[\mathcal{B}]^\perp \subset \mathcal{B}^\perp$. Como $\mathcal{B}^\perp = \{0\}$, então $[\mathcal{B}]^\perp = \{0\}$. Logo pelo Corolário 59, temos $\overline{[\mathcal{B}]} = H$. □

Poderíamos achar que se $(E,(.,.))$ fosse um espaço com produto interno e $\mathcal{B} = \{e_j : j \in I\}$ fosse um conjunto ortonormal, então a propriedade: "Se $(e_j, u) = 0$ para todo $j \in I$, então $u = 0$" implicaria que $\mathcal{B}$ é um conjunto total em E. Mas isso não é verdade. No Exemplo 56, o conjunto $\mathcal{B}_2 = \{e_j : j \in \mathbb{N}, j \geq 2\}$ tem essa propriedade, mas não é total em E, já que $\tilde{e}_1$ não pode ser aproximado por uma sequência de elementos de $[\mathcal{B}_2]$.

2.6. Transformações lineares em espaços de Hilbert

Vamos agora estudar transformações lineares contínuas entre espaços vetoriais com produto interno.

Definição 61. Sejam $(E,(.,.)_E)$ e $(F,(.,.)_F)$ dois espaços com produto interno. Uma função $T : E \to F$ é chamada de *transformação linear* se $T(u+v) = T(u) + T(v)$ e $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para todos $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dizemos que $T : E \to F$ é uma *transformação linear contínua* se para todo $u_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que se $\|u - u_0\|_E < \delta$, então $\|T(u) - T(u_0)\|_F < \varepsilon$.

Muitas vezes usaremos a notação Tu para indicar $T(u)$.

Observação 62. Para o estudo de funcionais lineares mais adiante também precisaremos definir *transformação antilinear* $T : E \to F$ como uma função que satisfaz $T(u+v) = Tu+Tv$, $T(\lambda u) = \overline{\lambda} Tu$, para todos $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, e *transformação antilinear contínua* $T : E \to F$ como uma transformação antilinear que satisfaz a condição de continuidade. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, as definições de transformações lineares e antilineares coincidem, já que $\overline{\lambda} = \lambda$. A caracterização de continuidade dada na proposição seguinte também vale para as transformações antilineares.

Associado a uma transformação linear, definimos o núcleo $N(T)$ de T e a imagem $T(E)$ de T como sendo os subespaços vetoriais $N(T) = \{u \in E : Tu = 0\} \subset E$ e $T(E) = \{Tu \in F : u \in E\} \subset F$, respectivamente. Lembramos de álgebra linear que T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$. Por definição, ela será sobrejetora se $T(E) = F$. A transformação linear T é bijetora se for injetora e sobrejetora.

Uma transformação linear contínua possui caracterizações simples, como veremos abaixo.

Proposição 63. *Sejam $(E,(.,.)_E)$ e $(F,(.,.)_F)$ dois espaços com produto interno e $T : E \to F$ uma transformação linear. As seguintes propriedades são equivalentes:*
a) A transformação linear T é contínua.
b) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|u\|_E < \delta$, então $\|Tu\|_F < \varepsilon$.
c) Existe $C > 0$ tal que $\|Tu\|_F \leq C\|u\|_E$ para todo $u \in E$.

Demonstração. $a) \implies b)$

Se T é uma transformação linear contínua, então $b)$ é uma consequência direta da Definição 61 aplicada ao ponto $u_0 = 0$, observando que $T(0) = 0$.

$b) \implies c)$

Vamos supor que $u \neq 0$, já que a desigualdade vale trivialmente para $u = 0$. Neste caso, $\frac{\delta u}{2\|u\|_E}$ é tal que $\|\frac{\delta u}{2\|u\|_E}\|_E = \frac{\delta}{2} < \delta$. Logo $\|T(\frac{\delta u}{2\|u\|_E})\|_F < \varepsilon$ e, portanto,

$$\|Tu\|_F < \frac{2\varepsilon}{\delta}\|u\|_E.$$

A demonstração fica concluída definindo $C := \frac{2\varepsilon}{\delta}$.

$c) \implies a)$

Sejam $u_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$. Vamos escolher $\delta := \frac{\varepsilon}{C} > 0$. Assim, se $\|u - u_0\|_E < \delta$, temos

$$\|Tu - Tu_0\|_F = \|T(u - u_0)\|_F \leq C\|u - u_0\|_E \leq C\delta < \varepsilon.$$

□

Devido ao item c) do item anterior, alguns livros chamam uma transformação linear contínua de *transformação linear limitada.* O nome *operador linear,* ou simplesmente *operador,* também é usado como sinônimo para transformação linear (às vezes restrito ao caso em que $E = F$).

O conjunto das transformações lineares contínuas de E para F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$. Para $T \in \mathcal{L}(E, F)$, definimos

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E}.$$

Em particular, $\|Tu\|_F \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|u\|_E$ para todo $u \in E$. De fato, é fácil verificar que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \inf\{C \geq 0 : \|Tu\|_F \leq C\|u\|_E, \forall u \in E\}.$$

Quando for claro, usaremos apenas a notação $\|T\|$ para $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$. Fica a cargo do leitor verificar que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial normado com a norma $T \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Como se espera, uma transformação linear contínua comuta com o limite de sequências.

PROPOSIÇÃO 64. *Sejam $(E, (.,.)_E)$ e $(F, (.,.)_F)$ dois espaços com produto interno e $T : E \to F$ uma transformação linear contínua. Se $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em E que converge para u, então $\lim_{j \to \infty} Tu_j = Tu$.*

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é simples. Basta usar que a transformação é limitada. De fato, sabemos que

$$\|Tu_j - Tu\|_F \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|u_j - u\|_E. \tag{2.6.1}$$

A convergência de $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ implica que $\lim_{j \to \infty} \|u_j - u\|_E = 0$. Por (2.6.1), concluímos que $\lim_{j \to \infty} \|Tu_j - Tu\|_F = 0$. Logo a sequência $(Tu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para Tu. □

COROLÁRIO 65. *Sejam $(E, (.,.)_E)$ e $(F, (.,.)_F)$ dois espaços com produto interno e $T : E \to F$ uma transformação linear contínua. Então $N(T)$ é um subespaço fechado.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $u \in \overline{N(T)}$. Logo existe uma sequência $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $N(T)$ que converge para u. Assim,

$$Tu = T \lim_{j \to \infty} u_j = \lim_{j \to \infty} Tu_j = 0$$

e $u \in N(T)$. Portanto, $N(T) = \overline{N(T)}$ e $N(T)$ é fechado. □

Quando o espaço F for completo, então podemos estender transformações lineares contínuas definidas sobre conjuntos densos de E. Essa é uma importante propriedade que requer, pela primeira vez nessa seção, que um espaço seja de Hilbert.

TEOREMA 66. *Seja $(E, (.,.)_E)$ um espaço vetorial com produto interno e $(H, (.,.)_H)$ um espaço de Hilbert. Considere $\mathcal{D} \subset E$ um subespaço denso de E e $T : \mathcal{D} \to H$ uma transformação linear. Suponha que T seja contínua, ou seja, $\|Tu\|_H \leq C\|u\|_E$ para todo $u \in \mathcal{D}$. Logo existe uma única transformação linear contínua $\overline{T} : E \to H$ que estende T, ou seja, tal que $\overline{T}u = Tu$ para todo $u \in \mathcal{D}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos provar por partes.

A definição de $\overline{T}$.

Seja $u \in E$. Como $\mathcal{D}$ é denso em E, existe uma sequência $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}$ que converge para u. Como esta sequência é convergente, então ela é de Cauchy. Logo para dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que se $i, j \geq N$, temos $\|u_j - u_k\|_E < \frac{\varepsilon}{C}$. Assim, como

$$\|Tu_j - Tu_k\|_H \leq C\|u_j - u_k\|_E < \varepsilon,$$

concluímos que a sequência $(Tu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy em H. Como H é completo, concluímos que existe $y \in H$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} Tu_j = y.$$

Definiremos $\overline{T} : E \to H$ por $\overline{T}u = y$. Para que esta definição faça sentido, devemos deixar claro que esta função está bem definida, ou seja, o valor de $\overline{T}u$ independe da sequência $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ escolhida.

Seja $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma outra sequência em $\mathcal{D}$ que converge para u. Pelo argumento anterior, sabemos que a sequência $(Tv_j)_{j\in\mathbb{N}}$ também converge. Note que

$$\begin{aligned}
&\| \lim_{j\to\infty} Tv_j - y\|_H = \| \lim_{j\to\infty} Tv_j - \lim_{j\to\infty} Tu_j\|_H = \lim_{j\to\infty} \|Tv_j - Tu_j\|_H \\
&= \lim_{j\to\infty} \|T(v_j-u_j)\|_H \le C \lim_{j\to\infty} \|v_j-u_j\|_H = C\| \lim_{j\to\infty} v_j - \lim_{j\to\infty} u_j\|_H \\
&= C\|u-u\|_H = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{j\to\infty} Tv_j = y$. Assim, o valor y independe da sequência escolhida e a função $\overline{T}$ está bem definida.

A linearidade de $\overline{T}$.

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u, v \in E$. Consideremos duas sequências $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}$ que convergem para u e v, respectivamente. É claro que $(\alpha u_j + v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{D}$ que converge para $\alpha u + v$ (a verificação é simples e fica a cargo do leitor). Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{T}(\alpha u + v) &= \lim_{j\to\infty} T(\alpha u_j + v_j) = \lim_{j\to\infty} (\alpha T u_j + T v_j) \\
&= \alpha \lim_{j\to\infty} Tu_j + \lim_{j\to\infty} Tv_j = \alpha \overline{T} u + \overline{T} v.
\end{aligned}$$

Tomando, $\alpha = 1$, vemos que $\overline{T}(u+v) = \overline{T}u + \overline{T}v$. Tomando $v = 0$, vemos que $\overline{T}(\alpha u) = \alpha\overline{T}u$, já que $\overline{T}(0) = T(0) = 0$.

A continuidade de $\overline{T}$.

Sejam $u \in E$ e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}$ que converge para u. Logo

$$\|\overline{T}u\|_H = \| \lim_{j\to\infty} Tu_j\|_H = \lim_{j\to\infty} \|Tu_j\|_H.$$

Como $\|Tu_j\|_H \le C\|u_j\|_E$ e $\lim_{j\to\infty} \|u_j\|_E = \|u\|_E$, concluímos que $\|\overline{T}u\|_H \le C\|u\|_E$.

A transformação linear $\overline{T}$ estende T.

Seja $u \in \mathcal{D}$. Então $u = \lim_{j\to\infty} u_j$, em que $u_j = u$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo $\overline{T}u = \lim_{j\to\infty} Tu_j = \lim_{j\to\infty} Tu = Tu$.

A unicidade de $\overline{T}$.

Observamos que se $S : E \to H$ é uma transformação linear contínua que estende T, então, dado $u \in E$, escolhemos uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}$ que converge para u. Logo

$$Su \overset{(1)}{=} \lim_{j\to\infty} Su_j \overset{(2)}{=} \lim_{j\to\infty} Tu_j \overset{(3)}{=} \overline{T}u,$$

em que (1) decorre da continuidade de S, (2) do fato de que S é uma extensão de T e portanto coincide com T em $\mathcal{D}$, e (3) segue da própria definição de $\overline{T}$. Concluímos que $S = \overline{T}$. $\square$

EXEMPLO 67. O Teorema (66) não vale quando o contradomínio não for completo. Seja $\mathcal{D} = [\mathcal{B}] \subset l_2(\mathbb{K})$ o subespaço gerado pelos elementos da base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ...\}$ de $l_2(\mathbb{K})$ descrita no Teorema 31. Se considerarmos a transformação linear $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ definida por $T(u) = u$, para todo $u \in \mathcal{D}$, então não podemos estendê-la para uma transformação linear contínua $\overline{T} : l_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{D}$. Se pudéssemos, teríamos

$$\overline{T}(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} e_j) = \overline{T}(\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} e_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} T(\frac{1}{j} e_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} e_j.$$

Mas $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} e_j \notin \mathcal{D}$.

Dentre os diversos operadores lineares, vamos destacar aqui três tipos que serão importantes para nós: os operadores unitários, os auto-adjuntos e as projeções ortogonais. Começaremos pelos unitários.

2.6.1. Transformações lineares unitárias.

DEFINIÇÃO 68. Uma transformação linear $T : (E, (.,.)_E) \to (F, (.,.)_F)$ é chamada de *unitária* (ou *operador unitário*) se for bijetora e $(Tu, Tv)_F = (u, v)_E$, para todo $u, v \in E$.

Observe que toda a transformação linear unitária $T : E \to F$ é contínua, pois

$$\|Tu\|_F = \sqrt{(Tu, Tu)_F} = \sqrt{(u, u)_E} = \|u\|_E.$$

Operadores unitários de certa maneira mostram que podemos identificar os elementos de dois espaços vetoriais um a um, mantendo seus produtos internos com essa identificações.

Um exemplo onde isto ocorre é para espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita, que, como mostraremos abaixo, sempre podem ser identificados com o espaço $l_2(\mathbb{K})$.

PROPOSIÇÃO 69. *Seja $(H, (.,.)_H)$ um espaço de Hilbert separável sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de H. Então o operador $U : H \to l_2(\mathbb{K})$ definido como*

$$U(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j) = (a_1, a_2, ...)$$

é um operador unitário.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar que U está bem definido. Primeiro observamos que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j = \sum_{j=1}^{\infty} b_j e_j$ se, e somente se, $a_j = b_j$. Basta nos lembrar do argumento isto em (2.4.6).

Além disso, vimos que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \in H$ se, e somente se, $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$, ou seja, se, e somente se, $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{K})$, veja Corolário 44. Assim, U leva elementos de H em elementos de $l_2(\mathbb{K})$ e é uma função bijetora.

É fácil ver que U é uma transformação linear (deixamos a cargo do leitor).

Por fim, observamos que

$$(U(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j), U(\sum_{j=1}^{\infty} b_j e_j))_{l_2(\mathbb{K})} = ((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...))_{l_2(\mathbb{K})} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{b_j}. \tag{2.6.2}$$

Por outro lado, pela Proposição 14, temos

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i, \sum_{j=1}^{\infty} b_j e_j)_H &= (\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} a_i e_i, \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} b_j e_j)_H = \lim_{N\to\infty} (\sum_{i=1}^{N} a_i e_i, \sum_{j=1}^{N} b_j e_j)_H \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i \overline{b_j} (e_i, e_j)_H = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i \overline{b_j} \delta_{ij} = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j \overline{b_j} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{b_j}.\end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Assim, as Equações (2.6.2) e (2.6.3) mostram que

$$(Ux, Ux)_H = (x, y)_{l_2(\mathbb{K})}$$

para todo $x, y \in H$. $\square$

EXEMPLO 70. O conjunto $\mathcal{B}_{\text{comp}} = \{(1/\sqrt{2})e^{in\pi x} : n \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base de Hilbert no espaço de Hilbert $L^2(]-1,1[;\mathbb{C})$. Logo a aplicação $T : L^2(]-1,1[;\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ dada por

$$T(f) = T(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{1}{\sqrt{2}} e^{in\pi x}) = (c_0, c_{-1}, c_1, c_{-2}, c_2, ...)$$

é uma transformação linear unitária.

Terminaremos novamente com um teorema de extensão de operadores.

PROPOSIÇÃO 71. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert, $\mathcal{D} \subset H$ um subconjunto denso de H e $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ uma transformação linear bijetora tal que $(Tu, Tv) = (u, v)$ para todo $u, v \in \mathcal{D}$. Logo existe uma única transformação linear contínua $\overline{T} : H \to H$ que estende T. Esta transformação linear $\overline{T}$ é unitária.*

Demonstração. Observamos que

$$\|Tu\|_H = \sqrt{(Tu, Tu)} = \sqrt{(u, u)} = \|u\|_H.$$

Portanto, pelo Teorema 66, T tem uma única extensão linear contínua $\overline{T} : H \to H$. Vamos agora mostrar que ela é unitária.

Primeiro observamos que $(\overline{T}u, \overline{T}v) = (u, v)$ para todo $u, v \in H$. Sejam $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ duas sequências em $\mathcal{D}$ que convergem para u e v, respectivamente. Logo, pela Proposição 14, vemos que

$$(\overline{T}u, \overline{T}v) = (\lim_{j\to\infty} Tu_j, \lim_{j\to\infty} Tv_j) = \lim_{j\to\infty}(Tu_j, Tv_j) = \lim_{j\to\infty}(u_j, v_j) = (u, v).$$

Devemos mostrar também que $\overline{T}$ é bijetora. Para verificar que é injetora, basta observar que se $\overline{T}u = 0$, então $(u, u) = (\overline{T}u, \overline{T}u) = 0$. Logo $u = 0$.

Para verificar que $\overline{T}$ é sobrejetora, note que se $y \in H$, então, como $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ é bijetora, existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}$ tal que $\lim_{j\to\infty} Tu_j = y$. Como $(Tu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge, então é de Cauchy. Assim, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $j, k \geq N$, então $\|Tu_j - Tu_k\| < \varepsilon$. Assim, a sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ também é de Cauchy, já que

$$\|u_j - u_k\| = \|Tu_j - Tu_k\| < \varepsilon.$$

Como H é completo, então $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge para um elemento $u \in H$. Pela definição de $\overline{T}$, concluímos que $\overline{T}u = \lim_{j\to\infty} Tu_j = y$. □

2.6.2. Operadores auto-adjuntos. Uma classe que aparecerá constantemente em aplicações é aquela dos operadores auto-adjuntos.

Definição 72. Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno e $T : E \to E$ um operador linear contínuo. Diremos que T é *auto-adjunto* se $(Tu, v) = (u, Tv)$ para todo $u, v \in E$.

Exemplo 73. Consideremos em $H = L_2(]-1,1[;\mathbb{C})$ a base ortonormal $\mathcal{B} = \{1/\sqrt{2}e^{in\pi x} : n \in \mathbb{Z}\}$ e $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio tal que $p(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo o operador $T(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n/p(\pi n)e^{in\pi x}$ é um operador auto-adjunto.

Primeiramente vamos mostrar que T é contínuo. Como p é um polinômio, então ou p é igual a uma constante ou $\lim_{|x|\to\infty} |p(x)| = \infty$. Logo existe $c > 0$ tal que $|p(x)| \geq c$. Assim,

$$\begin{aligned}\|T(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x})\| &= \|\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{p(n)} e^{in\pi x}\| = 2\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{c_n}{p(n)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\left(\frac{1}{c^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{2}{c}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{c}\|\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x}\|.\end{aligned}$$

Logo T é limitado e $\|T\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq 1/c$.

Por fim, podemos verificar que $(Tu, v) = (u, Tv)$. Para tanto, vemos que:

$$\begin{aligned}\left(T(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x}), \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\pi x}\right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p(n)}e^{in\pi x}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{in\pi x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\overline{d_n}}{p(n)} \\ = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{p(n)}e^{in\pi x}\right) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x}, T(\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\pi x})\right).\end{aligned}$$

Este operador é importante, pois inverte operadores diferenciais. De fato, seja $p(D_x) = \sum_{j=0}^{N} p_j(-i)^j \frac{d^j}{dx^j}$ e $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x}$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |n^k c_n| < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo

$$\begin{aligned} Tp(D_x)u(x) &= Tp(D_x)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x}\right) = T\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n\pi)c_n e^{in\pi x}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n\pi)^{-1}p(n\pi)c_n e^{in\pi x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x} = u(x). \end{aligned}$$

Da mesma forma, $p(D_x)Tu(x) = u(x)$. Observe que, quando p não é uma constante, T está definido em todo H. O mesmo não ocorre com o operador $p(D_x)$, já que este não é limitado.

Da mesma forma que fizemos com operadores unitários, podemos estender operadores auto-adjuntos em subespaços denso de um espaço de Hilbert.

Proposição 74. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert, $\mathcal{D} \subset H$ um subconjunto denso de H e $T : \mathcal{D} \to H$ um operador linear contínuo tal que $(Tu, v) = (u, Tv)$, para todo $u, v \in \mathcal{D}$. Logo existe uma única transformação linear contínua $\overline{T} : H \to H$ que estende T. Esta transformação linear é auto-adjunta.*

Demonstração. A existência de uma única extensão linear contínua $\overline{T} : H \to H$ que estende T já foi demonstrada no Teorema 61. Para provar que essa extensão é auto-adjunta, consideremos $u, v \in H$ e sequencias $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ e $\lim_{j\to\infty} v_j = v$. Logo

$$(\overline{T}u, v) = \lim_{j\to\infty}(Tu_j, v_j) = \lim_{j\to\infty}(u_j, Tv_j) = (u, \overline{T}v).$$

□

2.6.3. Projeções ortogonais. O último tipo de operador que consideraremos são as projeções ortogonais, como definidas abaixo.

Definição 75. Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno e $T : E \to E$ um operador linear contínuo. Diremos que T é uma *projeção ortogonal* se T for auto-adjunto e $T^2 = T$.

Um exemplo pode ser visto abaixo.

Exemplo 76. Consideremos em $E = L_2(0, 2\pi)$ a base ortonormal $B = \{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$. Logo o operador $T(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx}$ é um operador de projeção ortogonal.

Primeiro verificamos que $T^2 = T$:

$$T^2(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}) = T(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Agora verificamos que T é auto-adjunto:

$$\begin{aligned} &\left(T(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}), \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overline{d_n} \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{inx}\right) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, T(\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx})\right). \end{aligned}$$

Teorema 77. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert.*

i. Se $T : H \to H$ é uma projeção ortogonal, então $F := T(H)$ é um subespaço fechado de H, $Tu = u$ para todo $u \in F$ e $N(T) = F^{\perp}$.

ii. Se F é um subespaço fechado de H, então a transformação linear $T : H \to H$ definida como $T(u) = u$ se $u \in F$ e $T(u) = 0$ se $u \in F^{\perp}$ está bem definida e é uma projeção ortogonal.

DEMONSTRAÇÃO. i. Vamos provar por partes.

Se $u \in F$, então $Tu = u$.

Seja $u \in F$. Logo $u = Tv$ para algum $v \in H$. Assim, $Tu = T^2v = Tv = u$. Se $Tu = 0$.

Se $u \in F^\perp$, então $Tu = 0$.

Basta observar que

$$(Tu, Tu) \overset{(1)}{=} (u, T^2u) \overset{(2)}{=} (u, Tu) \overset{(3)}{=} 0,$$

em que usamos em (1) que T é auto-adjunto, em (2) que $T^2 = T$ e em (3) que $u \in F^\perp$ e $Tu \in T(H) = F$.

O subespaço F é fechado.

Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em F que converge para $u \in H$. Logo

$$\lim_{j\to\infty} u_j \overset{(1)}{=} \lim_{j\to\infty} Tu_j \overset{(2)}{=} Tu,$$

em que usamos em (1) que $Tv = v$ para todo $v \in H$. Em (2) usamos que T é contínua. Concluímos que a sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge tanto para u como para Tu. Logo $u = Tu \in T(H) = F$.

ii. Como $H = F \oplus F^\perp$, sabemos que todo elemento de H pode ser escrito de maneira única como $u = f + f^\perp$, em que $f \in F$ e $f^\perp \in F^\perp$. Assim, $Tu = T(f + f^\perp) = f$ está bem definido.

Para provar as demais propriedades vamos fixar $u, v \in F$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ com as decomposições ortogonais $u = f_1 + f_1^\perp$ e $v = f_2 + f_2^\perp$, com $f_1, f_2 \in F$ e $f_1^\perp, f_2^\perp \in F^\perp$.

A aplicação T é linear.

De fato,

$$\alpha u + v = (\alpha f_1 + f_2) + (\alpha f_1^\perp + f_2^\perp).$$

Como $\alpha f_1 + f_2 \in F$ e $\alpha f_1^\perp + f_2^\perp \in F^\perp$, concluímos que $T(\alpha u + v) = \alpha f_1 + f_2 = \alpha Tu + Tv$. Portanto, T é linear.

A função T é contínua.

Basta observar que

$$\|Tu\| = \|f_1\| \leq \sqrt{\|f_1\|^2 + \|f_1^\perp\|^2} = \|f_1 + f_1^\perp\| = \|u\|,$$

em que usamos o Teorema de Pitágoras, observando que f_1 e $f_1^\perp$ são perpendiculares.

A função T é uma projeção ortogonal, ou seja, satisfaz $T^2 = T$ e é autoadjunta.

Observe que $T^2u = Tf_1 = f_1 = Tu$. Além disso, T é auto-adjunta, pois

$$(Tu, v) = (f_1, f_2 + f_2^\perp) = (f_1, f_2) = (f_1 + f_1^\perp, f_2) = (u, Tv).$$

O núcleo e a imagem de T são $T(H) = F$ e $N(T) = \{0\}$.

Isto segue imediatamente da definição de T. □

2.7. Transformada de Fourier

Para o estudo da transformada de Fourier, vamos recordar a definição da classe de função $L^1(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{K}$ é *integrável* se for mensurável e $\int_\Omega |f(x)|dx < \infty$. O conjunto das funções integráveis será denotado por $\mathcal{L}^1(\Omega)$. Podemos considerar em $\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{K})$ a seguinte classe de equivalência: $f \sim g$ se, e somente se, $\int_\Omega |f(x) - g(x)|dx = 0$. O conjunto das casses de equivalência é denotado por $L^1(\Omega; \mathbb{K})$. Este conjunto é um espaço normado com a norma dada por

$$\|f\|_{L^1(\Omega;\mathbb{K})} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Podemos definir a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ da seguinte forma.

DEFINIÇÃO 78. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. A transformada de Fourier de f é a função $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida como

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx,$$

em que $x \cdot \xi := x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$. Também usamos a notação $\hat{f} := \mathcal{F}f$.

A transformada de Fourier está sempre bem definida, já que

$$|\mathcal{F}f(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Exemplo 79. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) = e^{-x^2/2}.$$

Vamos usar a notação $\hat{f}$ para a transformada de Fourier. Assim,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) &= \frac{d}{d\xi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}e^{-x^2/2}dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty} -ixe^{-ix\xi}e^{-x^2/2}dx = i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\right)dx \\
&= \lim_{R\to\infty} i\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\right)dx = \lim_{R\to\infty}\left(ie^{-ix\xi}e^{-x^2/2}\Big|_{-R}^{R}\right) - \lim_{R\to\infty} i\int_{-R}^{R}\frac{d}{dx}\left(e^{-ix\xi}\right)e^{-x^2/2}dx \\
&\overset{(1)}{=} -i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(e^{-ix\xi}\right)e^{-x^2/2}dx = -\frac{\xi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}e^{-x^2/2}dx = -\frac{\sqrt{2\pi}\xi}{2}\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Em (1), usamos o fato de que a função $x \mapsto e^{-ix\xi}e^{-x^2/2}$ vai a zero quando $x \to \pm\infty$. Observe que obtemos uma equação diferencial da forma

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2}\hat{f}(\xi).$$

Para resolvê-la, vamos integrar tudo de 0 a ξ da seguinte forma:

$$\int_0^{\xi}\frac{\hat{f}'(s)}{\hat{f}(s)}ds = -\int_0^{\xi} sds.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \hat{f}(s)$, temos $dy = \hat{f}'(s)ds$. Assim

$$\int_{\hat{f}(0)}^{\hat{f}(\xi)}\frac{dy}{y} = -\int_0^{\xi} sds \implies \ln\left(\frac{\hat{f}(\xi)}{\hat{f}(0)}\right) = -\frac{\xi^2}{2} \implies \hat{f}(\xi) = \hat{f}(0)e^{-\xi^2/2}.$$

Basta agora calcular $\hat{f}(0)$. Isso pode ser calculado facilmente. De fato,

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{f}(0)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy \overset{(1)}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}rdr\right)d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}rdr = -\,2\pi e^{-r^2/2}\Big|_0^{\infty} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Em (1), usamos a mudança de variável: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\mathrm{sen}(\theta)$ e $dxdy = rdrd\theta$.
Concluímos que $\hat{f}(0) = 1$ e que

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

Observação 80. Acima calculamos a integral da função gaussiana. Esta importante integral será usada diversas vezes aqui. Uma pequena mudança de variável permite obter o seguinte resultado para $a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Exemplo 81. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ a função dada por $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Logo $\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$. De fato, temos

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\xi_1} e^{-x_1^2/2} dx_1 \right) ... \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n\xi_n} e^{-x_n^2/2} dx_n \right)$$
$$= (e^{-\xi_1^2/2})...(e^{-\xi_n^2/2}) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.$$

Por fim, é importante destacar também a linearidade da transformada de Fourier.

Proposição 82. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Logo $\mathcal{F}f$ pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Além disso, a transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \to L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ define uma transformação linear.*

Demonstração. Basta usar a linearidade da integral:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} (\alpha f(x) + \beta g(x)) d\xi$$
$$= \alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x) d\xi + \beta \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} g(x) d\xi = \alpha \mathcal{F}f(\xi) + \beta \mathcal{F}g(\xi).$$

□

Podemos determinar f a partir de sua transformada de Fourier. Abaixo, mostramos uma importante fórmula de inversão.

Teorema 83. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ uma função tal que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Logo*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi. \tag{2.7.1}$$

Note que a fórmula acima é muito semelhante a transformada de Fourier. A diferença é o sinal positivo na exponencial.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Logo

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi} f(y) dy \right) e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^2} e^{i\xi\cdot x} d\xi$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}} e^{-i\xi\cdot(y-x)} d\xi \right) f(y) dy,$$

em que usamos Fubini na última igualdade (troca da ordem de integrações).

Na expressão acima, vemos a importância do termo $e^{-\frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}}$. Se não colocarmos ele, a integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot(x-y)} d\xi$ sequer está bem definida.

Note que

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}} e^{-i\xi\cdot(y-x)} d\xi = \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} e^{-i\xi\cdot\frac{(y-x)}{\varepsilon}} d\xi$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \right) \left(\frac{y-x}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{|y-x|^2}{2\varepsilon^2}}.$$

Assim,

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^2} e^{i\xi\cdot x} d\xi = \frac{1}{(2\pi\varepsilon^2)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y-x|^2}{2\varepsilon^2}} f(y) dy \overset{(1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{2}} f(x + \varepsilon z) dz.$$

em que (1) fizemos a mudança de variável $z = \frac{y-x}{\varepsilon}$ (note que $dz = \frac{1}{\varepsilon^n} dy$ e $y = \varepsilon z + x$). Tomando o limite $\varepsilon \to 0$ dos dois lados da expressão acima, concluímos que

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{2}} f(x) dz = f(x).$$

As passagens do limite para dentro da integral podem ser justificadas usando o teorema da convergência limitada. □

Observação 84. Se não tivéssemos usado o termo $e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^2}$, não poderíamos ter usado Fubini. De fato, chegaríamos a algo do tipo

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot(y-x)}d\xi\right)f(y)dy,$$

porém não existe $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot(y-x)}d\xi$.

O resultado anterior nos motiva a definir a seguinte transformação linear.

Definição 85. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. A transformada de Fourier inversa de f é a função $\mathcal{F}^{-1}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida como

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}f(x)dx,$$

em que $x\cdot\xi := x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$.

Observe que $\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$. Vamos definir o espaço

$$\mathcal{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) : \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})\}.$$

Observe que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ se, e somente se, $x \mapsto \mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Logo

$$\mathcal{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) : \mathcal{F}^{-1}f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})\}.$$

Concluímos o seguinte resultado.

Corolário 86. *A transformada de Fourier é uma transformação linear bijetora $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ cuja inversa é dada por $\mathcal{F}^{-1}$.*

Demonstração. Vimos que $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Assim, basta mostrar que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = Id$, em que $Id : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é a identidade.

Já vimos que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = Id$, pelo Teorema 83. Para provar que $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = Id$, consideremos $g \in \mathcal{X}$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}(\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi}g(y)dy)d\xi \overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}g(-y)dy)d\xi\\ &\overset{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi}g(-y)dy)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(-x)\cdot\xi}(\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi}g(-y)dy)d\xi\\ &\overset{(3)}{=} g(-(-x)) = g(x),\end{aligned}$$

em que em (1), fizemos $y \mapsto -y$. Em (2), $y \mapsto -y$. Finalmente em (3), usamos o Teorema 83. □

Observe que se $f \in \mathcal{X}$, então $f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Assim, vemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|f(x)|\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}\,|f(x)|\, dx\\ &\le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} < \infty.\end{aligned}$$

Assim, $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}$. Isto implica em particular que $\mathcal{X} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Mostraremos mais adiante que χ também é um conjunto denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por enquanto, iremos apenas assumir esse resultado.

Estamos agora em condições de enunciar o Teorema de Plancherel.

Teorema 87. *(Teorema de Plancherel) Sejam f e $g \in \mathcal{X}$. Logo*
1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi$.
2. $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\hat{f}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Demonstração. A demonstração é um simples cálculo:

1. Vemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx &\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{g}(\xi)d\xi}dx\\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi\right)dx \overset{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\left((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx\right)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi,\end{aligned}$$

em (1) usamos a fórmula de inversão de g, isto é, $g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{g}(\xi)d\xi$. Em (2), usamos Fubini.

2. O resultado segue diretamente do anterior. Basta tomar $f = g$:

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \left\|\hat{f}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Agora estamos em condição de provar o resultado principal dessa seção.

Teorema 88. *Existe uma única transformação linear contínua* $\overline{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *que estende a transformada de Fourier* $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$*. Esta transformação linear* $\overline{\mathcal{F}}$ *é unitária.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 71. Para tanto, usamos $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D} = \mathcal{X}$ e o Teorema 87.i. □

2.8. Funcionais lineares e bilineares contínuos

O espaço $\mathbb{K}$ é um espaços vetorial em $\mathbb{K}$ com produto interno. De fato, basta definir $(\alpha, \beta) = \alpha\overline{\beta}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Assim, o produto é a multiplicação para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e a multiplicação de um número pelo complexo conjugado do outro quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Desta maneira, podemos definir transformações lineares entre um espaço vetorial com produto interno sobre $\mathbb{K}$ com valores em $\mathbb{K}$. Esta classe de transformações lineares é tão importante que tem um nome próprio, como veremos abaixo.

Definição 89. Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno sobre $\mathbb{K}$. Um *funcional linear contínuo* é uma transformação linear contínua $\varphi : E \to \mathbb{K}$, ou seja, uma função tal que

1. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$, $\forall u, v \in E$.
2. $\varphi(\alpha u) = \alpha\varphi(u)$, $\forall u \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.
3. Existe $C > 0$ tal que $|\varphi(u)| \leq C\|u\|$, $\forall u \in E$.

O conjunto dos funcionais lineares contínuos de E será denotado por E^*. Para $\varphi \in E^*$, definimos

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{\|u\|_E \neq 0}\frac{|\varphi(u)|}{\|u\|_E} = \sup_{\|u\|_E = 1}|\varphi(u)|.$$

Podemos verificar que $\varphi \in E^* \mapsto \|\varphi\|_{E^*} \in [0, \infty)$ define uma norma em E^*. Quando estiver, claro denotaremos $\|\varphi\|_{E^*}$ apenas por $\|\varphi\|$.

Um exemplo muito importante de funcional linear é dado da seguinte forma. Considere $v \in E$ e definamos $\varphi_v : E \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_v(u) = (u, v).$$

Pelas propriedades de produto interno, é evidente que φ_v é linear. Para mostrar a continuidade, basta usar a desigualdade de Schwarz.

$$|\varphi_v(u)| = |(u, v)| \leq \|u\|\|v\|.$$

A fórmula acima nos mostra que $\|\varphi_v\| \leq \|v\|$. Se $v = 0$, é claro que $\|\varphi_v\| = 0$. Se $v \neq 0$, então $\varphi_v(v/\|v\|) = \|v\|$ nos mostra que $\|\varphi_v\| \geq \|v\|$, o que implica que $\|\varphi_v\| = \|v\|$.

O interessante é que exemplo acima caracteriza todos os funcionais lineares. Este é o conteúdo da próxima proposição.

TEOREMA 90. *(Teorema de Riesz-Fischer) Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert. Logo a aplicação $\mathcal{R} : H \to H^*$ dada por $\mathcal{R}(v) = \varphi_v$ é uma transformação anti-linear contínua, bijetora e que preserva a norma.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos começar verificando que $\mathcal{R}$ é uma transformação antilinear. De fato, para qualquer $u \in H$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)(u) &= \varphi_{v_1+v_2}(u) = (u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1(u, v_1) + \alpha_2(u, v_2) \\ &= \alpha_1 \varphi_{v_1}(u) + \alpha_2 \varphi_{v_2}(u) = \left(\alpha_1 \mathcal{R}(v_1) + \alpha_2 \mathcal{R}(v_2)\right)(u).\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{R}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \mathcal{R}(v_1) + \alpha_2 \mathcal{R}(v_2)$.

Já vimos que $\|\mathcal{R}(u)\|_{H^*} = \|\varphi_u\|_{H^*} = \|u\|_H$. Logo $\mathcal{R}$ preserva a norma e é contínua. Também é imediato que é injetora, já que $\mathcal{R}(u) = 0$ implica que $\|u\|_H = \|\mathcal{R}(u)\|_{H^*} = 0$ e, portanto, $u = 0$.

A parte mais difícil da demonstração é mostrar que $\mathcal{R}$ é sobrejetora. Seja $\varphi \in H^*$, $\varphi \neq 0$. Vamos definir $F = \ker(\varphi)$. Logo F é um subespaço fechado de H. É subespaço, pois se $u_1, u_2 \in F$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, então

$$\varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \alpha_2 \varphi(u_2) = 0$$

e, assim, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in F$. Além disso é fechado, pois se $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em F e convergir para u em H, então

$$\varphi(u) = \varphi(\lim_{j\to\infty} u_j) = \lim_{j\to\infty} \varphi(u_j) = 0.$$

Portanto, $u \in F$ e F é fechado.

Pelo teorema da decomposição ortogonal, $H = F \oplus F^\perp$. Como $\varphi \neq 0$, então $F^\perp \neq \{0\}$. Seja $v \in F^\perp$, $v \neq 0$. Logo $\varphi(v) \neq 0$. Vamos definir $w = v/\varphi(v)$. Assim,

$$\varphi(u - \varphi(u)w) = \varphi(u) - \varphi(u)\varphi(v)/\varphi(v) = 0$$

e $u - w\varphi(u) \in F$. Desta forma, $u - \varphi(u)w$ é ortogonal a v. Desta maneira

$$0 = (u - \varphi(u)w, v) = (u, v) - \varphi(u)(w, v) = (u, v) - \frac{\varphi(u)}{\varphi(v)}(v, v).$$

Concluímos que

$$\varphi(u) = (u, \frac{\varphi(v)}{(v, v)} v)$$

e, assim, $\varphi = \mathcal{R}(\frac{\varphi(v)v}{(v,v)})$. A função $\mathcal{R}$ é, portanto, sobrejetora. □

Agora vamos ao estudo das funções bilineares.

DEFINIÇÃO 91. Uma função $B : E \times E \to \mathbb{R}$ é chamada de uma *função bilinear* se
1. $B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u, w) + \beta B(v, w)$, para todo $u, v, w \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $B(w, \alpha u + \beta v) = \alpha B(w, u) + \beta B(w, v)$, para todo $u, v, w \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A função B será chamada de *bilinear contínua* se satisfizer 1 e 2 e a propriedade seguinte:
3. Para todo $(u, v) \in E \times E$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - u\| < \delta$ e $\|y - v\| < \delta$, então $|B(x, y) - B(u, v)| < \varepsilon$.

PROPOSIÇÃO 92. *Dada uma função bilinear $B : E \times E \to \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são equivalentes.*
i) B é contínua.
ii) Sejam $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sequências em E que convergem para u e v, respectivamente. Logo

$$\lim_{j\to\infty} B(u_j, v_j) = B(u, v).$$

iii) Existe $C > 0$ tal que $|B(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$.

DEMONSTRAÇÃO. $i) \implies ii)$

Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que se $\|x-u\| < \delta$ e $\|y-v\| < \delta$, então $|B(x,y)-B(u,v)| < \varepsilon$. Como $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ e $\lim_{j\to\infty} v_j = v$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j > N$, temos $\|u - u_j\| < \delta$ e $\|v - v_j\| < \delta$. Assim,

$$|B(u_j, v_j) - B(u, v)| < \varepsilon$$

para todo $j > N$. Concluímos que $\lim_{j\to\infty} B(u_j, v_j) = B(u, v)$.

$ii) \implies iii)$

Suponha que a propriedade $iii)$ não seja válida. Logo para todo $C > 0$, existe $u_C, v_C \in E$ tais que $|B(u_C, v_C)| > C\|u_C\|\|v_C\|$. Vamos tomar, então, $C = N^2$. Assim, construímos sequências $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ e $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tais que

$$|B(u_N, v_N)| > N^2\|u_N\|\|v_N\|,$$

ou seja,

$$|B(\frac{u_N}{N\|u_N\|}, \frac{v_N}{N\|v_N\|})| > 1.$$

Agora basta observar que $\lim_{N\to\infty} \frac{u_N}{N\|u_N\|} = 0$ e $\lim_{N\to\infty} \frac{v_N}{N\|v_N\|} = 0$, mas a sequência $(B(\frac{u_N}{N\|u_N\|}, \frac{v_N}{N\|v_N\|}))_{N\in\mathbb{N}}$ não converge a $B(0, 0) = 0$. Logo a propriedade $ii)$ não vale.

$iii) \implies i)$

Seja $u, v \in E$ e $\varepsilon > 0$.Vamos escolher $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2C(1+\max\{\|u\|,\|v\|\})}, 1\}$. Logo se $\|u - x\| < \delta$ e $\|v - y\| < \delta$, então

$$\|x\| = \|x - u\| + \|u\| \leq 1 + \|u\|$$

e

$$\begin{aligned}
|B(u,v) - B(x,y)| &= |B(u-x,v) + B(x,v-y)| \\
&\leq C\|u-x\|\|v\| + C\|x\|\|v-y\| \\
&\leq C\frac{\varepsilon}{2C(1+\max\{\|u\|,\|v\|\})}\|v\| + C(1+\|u\|)\frac{\varepsilon}{2C(1+\max\{\|u\|,\|v\|\})} \\
&\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Vimos que se $\varphi \in E^*$, então existe $v \in E$ tal que $\varphi(u) = (u, v)$ para todo $u \in E$. Vamos dar condições agora para que o mesmo resultado valha para uma função bilinear no lugar do produto interno, isto é, $\varphi(u) = B(u, v)$ para todo $u \in E$.

DEFINIÇÃO 93. Seja $(E, (.,.))$ um espaço com produto interno e $B : E\times E \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua. Dizemos que B é *coerciva* se existir $\alpha > 0$ tal que

$$B(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$$

para todo $u \in E$.

TEOREMA 94. *(Lax-Milgram) Sejam $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $B : H \times H \to \mathbb{R}$ uma função bilinear e coerciva. Logo existe uma transformação linear contínua e bijetora $T : H \to H$ tal que $B(u, v) = (u, Tv)$.*

Em particular, para cada $\varphi \in H^*$ existe um $v \in H$ tal que

$$\varphi(u) = B(u, v) \tag{2.8.1}$$

para todo $u \in H$.

DEMONSTRAÇÃO. *Existe $T : H \to H$ linear, contínua e bijetora tal que $B(u, v) = (u, Tv)$, para todos $u, v \in H$.*

Para cada $v \in H$, definimos a função $\varphi_v^B : H \to \mathbb{R}$ como $\varphi_v^B(u) = B(u, v)$. A função φ_v^B é linear, pois

$$\varphi_v^B(\alpha u + \beta w) = B(\alpha u + \beta w, v) = \alpha B(u, v) + \beta B(w, v) = \alpha\varphi_v^B(u) + \beta\varphi_v^B(w).$$

A função também é contínua, pois

$$|\varphi_v^B(u)| \leq |B(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| = (C\|v\|)\|u\|.$$

Assim, pelo Teorema de Riesz-Fischer, existe um único $\tilde{v} \in H$ tal que $\varphi_v^B(u) = (u, \tilde{v})$. Seja $T : H \to H$ a aplicação definida como $T(v) = \tilde{v}$. Logo $B(u,v) = \varphi_v^B(u) = (u, \tilde{v}) = (u, Tv)$. Assim, basta mostrar que T é linear, contínua e bijetora.

Para mostrar que T é linear, note que

$$\begin{aligned}(u, T(\alpha v_1 + \beta v_2)) &= B(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha B(u, v_1) + \beta B(u, v_2)\\ &= \alpha(u, Tv_1) + \beta(u, Tv_2) = (u, \alpha T v_1 + \beta T v_2).\end{aligned}$$

Assim, para todo $u \in H$, temos

$$(u, T(\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha T v_1 - \beta T v_2) = 0.$$

Em particular, escolhendo $u = T(\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha T v_1 - \beta T v_2$, concluímos que $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T v_1 + \beta T v_2$.

Para mostrar que T é contínua, note que

$$\|Tv\|^2 = |(Tv, Tv)| = |B(Tv, v)| \leq C\|Tv\|\|v\|.$$

Assim, $\|Tv\| \leq C\|v\|$ e T é contínua.

A aplicação T é injetora. De fato, note que

$$\|v\|^2 \leq |B(v,v)| = |(v, Tv)| \leq \|v\|\|Tv\|.$$

Desta maneira, $\|v\| \leq \|Tv\|$. Portanto, $Tv = 0$ implica que $\|Tv\| = 0$ e, portanto, que $\|v\| = 0$, ou seja, $v = 0$.

Para finalizar, vamos mostrar que T é sobrejetora. Primeiro vamos mostrar que a imagem de T, denotada por $T(H)$, é fechada. Suponha que $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência em $T(H)$ que converge para $v \in H$. Logo existe uma sequência $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $Tu_j = v_j$ e $\lim_{j \to \infty} Tu_j = v$. Como $(Tu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, então dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que se $j, k > N$, então $\|Tu_j - Tu_k\| < \varepsilon$. No entanto, vimos que

$$\|u_j - u_k\| \leq \|T(u_j - u_k)\|.$$

Portanto, $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, como H é de Hilbert, converge para um elemento $u \in H$. Como T é contínua, concluímos que

$$v = \lim_{j \to \infty} Tu_j = T \lim_{j \to \infty} u_j = Tu.$$

Logo $T(H)$ é fechado. Vamos supor que $T(H)$ seja diferente de H. Logo $H = T(H) \oplus T(H)^{\perp}$ com $T(H)^{\perp} \neq \{0\}$. Seja $u \in T(H)^{\perp}$ com $u \neq 0$. Logo

$$\alpha\|u\|^2 \leq B(u,u) = (u, Tu) = 0,$$

em que usamos a coercividade na primeira desigualdade e o fato de que u é ortogonal a $T(H)$, em particular a Tu, na última igualdade. Como $u \neq 0$, temos um absurdo. Concluímos, assim, que $T(H) = H$ e T é sobrejetor.

Para cada $\varphi \in H^*$ existe um $v \in H$ tal que $\varphi(u) = B(u,v)$ para todo $u \in H$.

Seja $\varphi \in H^*$. Logo pelo Teorema de Riesz-Fischer, existe um único $w \in H$ tal que

$$\varphi(u) = (u, w).$$

Assim, definindo $v = T^{-1}w$, temos

$$\varphi(u) = (u, w) = (u, TT^{-1}w) = B(u, T^{-1}w) = B(u, v).$$

□

Observação 95. O operador $T^{-1}: H \to H$ é contínuo. Isto pode ser provado pelo Teorema da aplicação aberta (que não vimos nas notas de aula) ou simplesmente observando que

$$\alpha\|T^{-1}u\|^2 \leq B(T^{-1}u, T^{-1}u) = (T^{-1}u, TT^{-1}u) = (T^{-1}u, u) \leq \|T^{-1}u\|\|u\|.$$

Logo $\|T^{-1}u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|u\|$.

Observação 96. Suponha que $B : H \times H \to \mathbb{R}$ seja uma forma bilinear simétrica contínua e coerciva. Então é claro que B é um produto interno e (H, B) é um espaço de Hilbert. Assim, a existência de $v \in H$ tal que a Equação (2.8.1) é válida para todo $u \in H$ pode demonstrada diretamente do Teorema de Riesz-Fisher.

Proposição 97. *Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno, $a : E \times E \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica contínua e coerciva e $\varphi \in E^*$. Consideremos a função $J : E \to \mathbb{R}$ dada por*

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u).$$

Logo as seguintes afirmações são equivalentes:
1) Existe um único vetor $v \in E$ tal que $a(u,v) = \varphi(u)$ para todo $u \in E$.
2) Existe $v \in E$ tal que $J(v) < J(u)$ para todo $u \in E$, $u \neq v$.
Neste caso, os vetores v de 1) e 2) coincidem.

Observe que para a proposição acima, a simetria é essencial. Além disso, o vetor v que satisfaz 2) tem que ser único. Se existisse vetores distintos v_1 e $v_2 \in E$ com essas propriedades, teríamos $J(v_1) < J(v_2)$ e $J(v_2) < J(v_1)$. Como isto não pode ocorrer, os vetores v_1 e v_2 são iguais.

Demonstração. Inicialmente, observamos que se $v, w \in H$, então

$$\begin{aligned} J(v+w) &= \frac{1}{2}a(v+w, v+w) - \varphi(v+w) \\ &= \frac{1}{2}a(v,v) + \frac{1}{2}a(v,w) + \frac{1}{2}a(w,v) + \frac{1}{2}a(w,w) - \varphi(v) - \varphi(w) \\ &= \frac{1}{2}a(v,v) + a(w,v) + \frac{1}{2}a(w,w) - \varphi(v) - \varphi(w). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(v) - J(v+w) &= \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) - \frac{1}{2}a(v,v) - a(w,v) - \frac{1}{2}a(w,w) + \varphi(v) + \varphi(w) \\ &= -a(w,v) - \frac{1}{2}a(w,w) + \varphi(w). \end{aligned}$$

1) $\implies$ 2)
Seja $v \in H$ tal que $a(u,v) = \varphi(u)$, $\forall u \in H$. Logo, como $a(w,v) = \varphi(w)$, concluímos que

$$J(v) - J(v+w) = -a(w,v) - \frac{1}{2}a(w,w) + \varphi(w) = -\frac{1}{2}a(w,w) < 0,$$

em que usamos a existência de uma constante tal que que $a(u,u) \geq C\|u\|^2$ para todo $u \in E$ na última desigualdade.

Concluímos que $J(v) < J(v+w)$ para todo $w \in E\backslash\{0\}$. Assim, dado $u \neq v$, temos

$$J(v) < J(v + (u-v)) = J(u).$$

2) $\implies$ 1)
Seja $v \in E$ tal que $J(v) < J(u)$ para todo $u \in E$, $u \neq v$. Logo as mesmas contas anteriores para $w \neq 0$ nos dizem que

$$-a(w,v) - \frac{1}{2}a(w,w) + \varphi(w) = J(v) - J(v+w) < 0.$$

Assim, seja $w = tu$, em que $t \in \mathbb{R}$ e $u \neq 0$. Vamos definir a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(t) = -a(tu,v) - \frac{1}{2}a(tu,tu) + \varphi(tu) = -ta(u,v) - \frac{t^2}{2}a(u,u) + t\varphi(u).$$

Logo $f(0) = 0$ e $f(t) < 0$ para $t \neq 0$. Portanto, t é um ponto de máximo da função f. Como f é uma função de classe C^1, na verdade é C^∞, pois é um polinômio, concluímos que 0 é um ponto crítico, ou seja, $f'(0) = 0$. Logo

$$0 = f'(0) = -a(u, v) + \varphi(u).$$

Portanto, $a(u, v) = \varphi(u)$ para todo $u \in E$ (note que para $u = 0$ a igualdade é trivial). Para a unicidade, basta observar que se existir v_1 e v_2 tais que $a(u, v_1) = \varphi(u)$ e $a(u, v_2) = \varphi(u)$ para todo $u \in E$, teríamos $a(u, v_1 - v_2) = 0$ para todo $u \in E$. Em particular, para $u = v_1 - v_2$, teríamos, pela coercividade de a, que

$$0 = a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \geq C\|v_1 - v_2\|^2.$$

Logo $v_1 = v_2$. $\square$

CAPíTULO 3

Espaços de Sobolev e problemas de contorno em dimensão um

3.1. Espaços de Sobolev em uma dimensão $H^k(I)$, $I = (a, b)$

Iniciaremos o estudo dos espaços de Sobolev introduzindo o espaço mais simples: o espaço H^1 em um intervalo limitado. Nossa apresentação é fortemente baseada no livro de Arendt e Urban (ver referências).

Para começar nosso estudo sobre espaços de Sobolev, consideremos inicialmente as funções de classe C^1.

Lembramos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 se f for contínua, derivável em todo ponto de $[a, b]$ e a derivada $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua. O conjunto de todas as funções de classe C^1 em $[a, b]$ será denotado por $C^1([a, b])$. Da mesma forma, definimos $C^1(]a, b[)$ substituindo $[a, b]$ por $]a, b[$ na definição.

Pelo teorema fundamental do cálculo, vemos facilmente que se $x \in [a, b]$, então

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Além disso, se $\varphi \in C^1([a, b])$ for uma que se anula em $[a, a + \varepsilon] \cup [b - \varepsilon, b]$ para algum $\varepsilon > 0$, então

$$\int_a^b f'(t)\varphi(t) = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt = -\int_a^b f(t)\varphi'(t)dt,$$

pois $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Usando as propriedades acima podemos achar novas caracterizações de $C^1([a, b])$, como veremos a seguir. Para tanto, lembramos que se $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, então $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ pertence a classe de funções C^k *com suporte compacto*, denotada por $C^k_c(]a, b[)$, se $f \in C^k(]a, b[)$ e se existir $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in]a, a + \varepsilon] \cup [b - \varepsilon, b[$.

Exemplo 98. Seja $a < b$ e $\varepsilon > 0$ tal que $a < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b$. Definamos $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ como

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, a + \varepsilon] \\ (x - a - \varepsilon)^2(x - b + \varepsilon)^2, & x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \\ 0, & x \in [b - \varepsilon, b] \end{cases}.$$

Logo $\varphi \in C^1_c(]a, b[)$. Note que a função $x \mapsto \psi(x) := \varphi(x)/\int_a^b \varphi(x)dx$ também pertence a $C^\infty_c(]a, b[)$ e é tal que $\int_a^b \psi(x)dx = 1$. Usaremos essa função mais à frente.

Se $\varphi \in C^k_c(]a, b[)$, então podemos definir $\tilde{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $\tilde{\varphi}(a) = \tilde{\varphi}(b) = 0$ e $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para $x \in]a, b[$. É fácil verificar que $\tilde{\varphi} \in C^k([a, b])$ e que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{\varphi}(x) = 0$ para todo $x \in [a, a + \varepsilon] \cup [b - \varepsilon, b]$. Por outro lado, se $\tilde{\varphi} \in C^k([a, b])$ e se existir $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{\varphi}(x) = 0$ para todo $x \in [a, a + \varepsilon] \cup [b - \varepsilon, b]$, então $\varphi = \tilde{\varphi}|_{]a,b[} \in C^k_c(]a, b[)$. Assim, faremos a identificação entre φ e $\tilde{\varphi}$ e escreveremos $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, mesmo que, estritamente falando, a função φ não esteja definida nem a, nem em b.

Proposição 99. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*
i) $f \in C^1([a, b])$.
ii) Existe $c \in \mathbb{R}$ e $g \in C([a, b])$ tal que $f(x) = c + \int_a^x g(t)dt$.
iii) $f \in C([a, b])$ e existe $g \in C([a, b])$ tal que $\int_a^b f(t)\varphi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\varphi(t)dt$, para todo $\varphi \in C^1_c(]a, b[)$.

Neste caso, $c = f(a)$ e $g = f'$.

A demonstração de que $i) \implies ii)$, segue do Teorema fundamental do cálculo. Uma simples derivação mostra $ii)$ implica $i)$. A demonstração de que $i)$ implica $iii)$ segue da integração por partes. Por fim, o fato de que $iii)$ implica $i)$ poderá ser demonstrado com os resultados que serão demonstrados nessa seção. Deixaremos a cargo do leitor a demonstração deste fato (recomenda-se que se faça após a leitura da seção).

Para usar os espaços de Hilbert $L^2(a,b)$, vamos definir as funções no espaço $H^1(a,b)$. Esta classe de funções é análoga a classe de funções C^1 no seguinte sentido: $f \in H^1$ se, e somente se, f e f' pertencem a $L^2(a,b)$.

No entanto, para que a teoria funcione e possa ser estendida facilmente para dimenões maiores, estenderemos inicialmente a noção de derivada e definiremos fracas. A derivada que conhecemos nos cursos de cálculo e de análise real será chamada de *derivada clássica*.

Definição 100. Seja $f \in L^2(a,b)$. Dizemos que f tem *derivada fraca em* $L^2(a,b)$ se existir uma função $g \in L^2(a,b)$ tal que $\int_a^b f(t)\varphi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\varphi(t)dt$, para todo $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$.

Note que a derivada fraca é única, pois se g e $h \in L^2(a,b)$ forem derivadas fracas de f, então

$$(g-h,\varphi) = \int_a^b (g(t)-h(t))\varphi(t)dt = \int_a^b (-f(t)+f(t))\varphi'(t)dt = 0,$$

para todo $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$. Como $C_c^1(]a,b[)$ é denso em $L^2(a,b)$, concluímos que $g = h$.

Pela definição de derivada fraca e pela Proposição 99, fica claro que se se $f \in C^1([a,b])$, então a derivada de f também é a (única) derivada fraca de f, já que tanto f como f' pertencem a $L^2(a,b)$, por serem contínuas.

Assim, como não há grande risco de confusões, vamos denotar a derivada fraca de uma função em $L^2(a,b)$, quando ela existir, por f'. Vamos agora provar que a derivação fraca é linear.

Proposição 101. *Sejam f e $g \in L^2(a,b)$ funções que possuem derivadas fracas em $L^2(a,b)$, então $\alpha f + \beta g$ também tem derivada fraca em $L^2(a,b)$ para todo α e $\beta \in \mathbb{R}$. Esta derivada é igual a $\alpha f' + \beta g'$.*

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\varphi'(t)dt &= \alpha\int_a^b f(t)\varphi'(t)dt + \beta\int_a^b g(t)\varphi'(t)dt \\ = -\alpha\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt - \beta\int_a^b g'(t)\varphi(t)dt &= -\int_a^b (\alpha f'(t)+\beta g'(t))\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

□

Pela proposição acima, o conjunto de todas as funções em $L^2(a,b)$ que possuem derivadas fracas em $L^2(a,b)$ é um espaço vetorial. Nele, podemos definir o seguinte produto interno

$$(f,g)_{H^1(a,b)} = \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b f'(t)g'(t)dt. \tag{3.1.1}$$

Assim, temos

Definição 102. O *espaço de Sobolev de ordem* 1 *em* (a,b), denotado por $H^1(a,b)$, é o espaço vetorial de todas as funções $f \in L^2(a,b)$ que possuem derivadas fracas em $L^2(a,b)$ munido do produto interno (3.1.1).

Exemplo 103. Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ dada como $f(x) = |x|$. Logo $f \in H^1(-1,1)$, mas não pertence a $C^1(-1,1)$. A derivada fraca de $f \in H^1(-1,1)$ é igual a função sinal, definida por

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Para prová-lo, note que as funções f e f' definidas acima são de classe $L^2(-1,1)$, por serem limitadas. Assim, basta mostrar que a derivada fraca de f é igual a f'. Para tanto, seja $\varphi \in C_c^1(]-1,1[)$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx &= -\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\ &= -\left(x\varphi(x)|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\varphi(x)dx\right) + \left(x\varphi(x)|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\varphi(x)dx\right) \\ &= -\left(-\varphi(-1) - \int_{-1}^{0}\varphi(x)dx\right) + \left(\varphi(1) - \int_{0}^{1}\varphi(x)dx\right) \\ &= \int_{-1}^{0}\varphi(x)dx - \int_{0}^{1}\varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1}\operatorname{sign}(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Como sempre ocorre quando lidamos com funções L^2, o valor em um ponto não muda a função (ou mais precisamente, a classe de equivalência em que a função se encontra). Assim, o valor de f' no ponto 0 é indiferente para o argumento acima.

O espaço $H^1(a,b)$ tem propriedades análogas ao espaço C^1. De fato, temos

Teorema 104. *Seja $f :]a,b[\to \mathbb{R}$. Assim, as seguintes propriedades são equivalentes:*
i) $f \in H^1(a,b)$, ou seja, $f \in L^2(a,b)$ e existe $g \in L^2(a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(t)\varphi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\varphi(t)dt,$$

para todo $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$.
ii) Existe $c \in \mathbb{R}$ e $g \in L^2(a,b)$ tal que $f(x) = c + \int_a^x g(t)dt$.

Observe que se $g \in L^2(a,b)$, então

$$|\int_a^x g(t)dt| \leq \int_a^x |g(t)|dt \leq \int_a^b |g(t)|dt \leq \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt}\sqrt{\int_a^b 1^2 dt} = (b-a)^{1/2}\sqrt{\int_a^b |g(s)|^2 ds}.$$

Logo $\int_a^x g(t)dt$ é limitado e, em particular, uma função em $L^2(a,b)$.

O Teorema (104) é análogo à Proposição (99). Apenas trocamos o papel das funções continuas pelas funções L^2. Para o espaço H^1, no entanto, ignoramos a noção de derivada clássica (a que aprendemos em cursos de análise). Uma caracterização usando derivadas clássicas sem demonstração é deixada no apêndice da seção para àqueles mais familiarizados com a teoria de medida e integração de Lebesgue.

Para a demonstração do teorema, precisamos de um lema, que é interessante por si só. Lembramos que se $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ for derivável em todos os pontos e $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a,b[$, então a função f é igual a uma constante. Vamos mostrar que o mesmo é válido quando consideramos derivadas fracas.

Lema 105. *Seja $f \in L^2(a,b)$ uma função que possui derivada fraca em $L^2(a,b)$ e $f' = 0$. Então f é igual a uma constante.*

Demonstração. Vamos começar escolhendo $\psi \in C_c^1(]a,b[)$ tal que $\int_a^b \psi(x)dx = 1$. Para $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$, vamos definir a função

$$\Phi(x) = \int_a^x \left(\varphi(t) - \psi(t)\int_a^b \varphi(s)ds\right)dt.$$

Como φ e ψ pertencem a $C_c^1(]a,b[)$, sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $a < a+\varepsilon < b-\varepsilon < b$ tal que φ e ψ se anulam em $]a, a+\varepsilon[$ e em $[b-\varepsilon, b[$. Desta maneira, se $x < a+\varepsilon$, então

$$\Phi(x) = \int_a^x \left(\varphi(t) - \psi(t)\int_a^b \varphi(s)ds\right)dt = 0,$$

pois $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ para todo $t \in]a, x] \subset]a, a+\varepsilon]$. Por outro lado, se $x > b - \varepsilon$, então

$$\int_a^x \left(\varphi(t) - \psi(t)\int_a^b \varphi(s)ds\right) dt = \int_a^b \left(\varphi(t) - \psi(t)\int_a^b \varphi(s)ds\right) dt - \int_x^b \left(\varphi(t) - \psi(t)\int_a^b \varphi(s)ds\right) dt$$

$$\stackrel{(1)}{=} \int_a^b \left(\varphi(t) - \psi(t)\int_a^b \varphi(s)ds\right) dt = \int_a^b \varphi(t)dt - \int_a^b \psi(t)dt \int_a^b \varphi(s)ds = 0.$$

Em (1), usamos que $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ para todo $t \in [x, b[\subset [b-\varepsilon, b[$.

O argumento acima nos mostra que $\Phi \in C_c^1(]a,b[)$. Além disso, vemos facilmente que

$$\Phi'(x) = \varphi(x) - \psi(x)\int_a^b \varphi(s)ds.$$

Agora, pela definição de derivada fraca, temos

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b \Phi(t)f'(t)dt &= -\int_a^b \Phi'(t)f(t)dt = -\int_a^b \left(\varphi(t) - \psi(t)\int_a^b \varphi(s)ds\right) f(t)dt \\ &= -\int_a^b f(t)\varphi(t)dt + \int_a^b \left(\int_a^b \psi(t)f(t)dt\right)\varphi(s)ds \end{aligned}$$

Desta maneira, vemos que

$$(\int_a^b \psi(s)f(s)ds - f, \varphi) = \int_a^b \left(\int_a^b \psi(s)f(s)ds - f(t)\right)\varphi(t)dt = 0$$

para todo $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$. Como $C_c^1(]a,b[)$ é denso em $L^2(a,b)$, concluímos que

$$f(t) = \int_a^b \psi(s)f(s)ds$$

e portanto, f é igual a uma constante. $\square$

Agora estamos em condição de provar o teorema.

Demonstração. $ii) \implies i)$

Seja $f(x) = c + \int_a^x g(s)ds$. Logo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt &= \int_a^b \left(c + \int_a^t g(s)ds\right)\varphi'(t)dt = c\int_a^b \varphi'(t)dt + \int_a^b \left(\int_a^t g(s)ds\right)\varphi'(t)dt \\ &= \int_a^b \left(\int_s^b \varphi'(t)dt\right) g(s)ds = \int_a^b (\varphi(b) - \varphi(s))\, g(s)ds = -\int_a^b \varphi(s)g(s)ds. \end{aligned}$$

Assim, $f \in L^2(a,b)$ tem derivada fraca em L^2 e $f' = g$.

$i) \implies ii)$ Seja $f \in H^1(a,b)$ e f' sua derivada fraca. Vamos definir $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \int_a^x f'(s)ds.$$

A função g é limitada e, portanto, está em $L^2(a,b)$. Além disso, sua derivada fraca é f', pelo argumento de $ii) \implies i)$. Assim, $g \in H^1(a,b)$ e $(g-f)' = 0$. Pelo Lema 105, concluímos que $g - f$ é uma constante. Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = f - g$. Concluímos que

$$f(x) = c + g(x) = c + \int_a^x f'(s)ds.$$

Isto encerra a demonstração. $\square$

COROLÁRIO 106. *Seja* $f \in H^1(a,b)$*, então existem os limites* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to b^-} f(x)$ *e a função* $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ *definida como* $\tilde{f}(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$*,* $\tilde{f}(b) = \lim_{x\to b^-} f(x)$ *e* $\tilde{f}|_{]a,b[} = f$ *é uma função contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é uma consequência direta do fato de que, para $x \in]a,b[$, a função f é dada por

$$f(x) = c + \int_a^x g(t)dt, \tag{3.1.2}$$

em que $g \in L^2(a,b)$ e $c \in \mathbb{R}$. Em particular, $\lim_{x\to a^+} f(x) = c$, $\lim_{x\to b^-} f(x) = c + \int_a^b g(t)dt$ e a função $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ também é dada pela expressão (3.1.2), inclusive nos ponto $x = a$ e $x = b$.

Para quem conhece um pouco de teoria da medida e integração de Lesbegue, é possível mostrar que $\tilde{f}$ é contínua usando o teorema da convergência dominada. Vejamos os detalhes abaixo (fiquem à vontade de pular o resto da demonstração, caso não se sintam à vontade com a teoria de interação).

Para cada subconjunto $I \subset [a,b]$, definimos $\chi_I : [a,b] \to \mathbb{R}$ como a função tal que $\chi_I(x) = 0$, se $x \notin I$, e $\chi_I(x) = 1$, se $x \in I$.

Assim,

$$f(x) = c + \int_a^x g(t)dt = c + \int_a^b \chi_{[a,x]}(t)g(t)dt.$$

Se $x_0 \in [a,b]$, então $\lim_{x\to x_0} \chi_{[0,x]}(t)g(t) = \chi_{[0,x_0]}(t)g(t)$ para todo $t \neq x_0$. Como $|\chi_{[a,x]}(t)g(t)| \leq |g(t)|$ e g é integrável, já que é uma função em $L^2(a,b)$, então podemos aplicar o teorema da convergência dominada e concluir que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c + \lim_{x\to x_0} \int_a^b \chi_{[a,x]}(t)g(t)dt = c + \int_a^b \chi_{[a,x_0]}(t)g(t)dt = c + \int_a^{x_0} g(t)dt = f(x_0).$$

□

OBSERVAÇÃO 107. Novamente para quem estiver familiarizado com a teoria de medida e integração, o enunciado mais preciso do corolário acima seria dizer que dado $f \in H^1(a,b)$, existe uma única função $\tilde{f} \in C([a,b])$ tal que $f = \tilde{f}$ para quase todo ponto em $]a,b[$. Sempre que dissermos que uma função f pertencente a um espaço de Sobolev (o espaço definido anteriormente ou os que iremos definir adiante) é contínua ou de classe C^k, estaremos dizendo que existe uma função contínua ou de classe C^k que coincide com a função f em quase todo ponto.

O corolário acima nos permite identificar naturalmente uma função em $H^1(a,b)$ a uma única função em $C([a,b])$.

COROLÁRIO 108. *Seja* $f \in H^1(a,b)$*. Logo* f *é de classe* $C^1([a,b])$ *se, e somente se, sua derivada fraca for contínua. Neste caso, a derivada fraca coincide com a derivada clássica.*

DEMONSTRAÇÃO. Se f é de classe C^1, então pela Proposição 99, vemos que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)dy, \tag{3.1.3}$$

em que f' é a derivada clássica.

Logo pelo Teorema 104, a função f pertence a $H^1(a,b)$ e sua derivada fraca é igual a derivada clássica. Portanto, sua derivada fraca é contínua.

Se por outro lado, f tiver uma derivada fraca contínua, então pelo Teorema 104, sabemos que f satisfaz igualdade (3.1.3), em que f' é a derivada fraca. Portanto, f é de classe C^1 pela Proposição 99 e a derivada clássica coincide com a derivada fraca. □

Por fim, mostraremos uma última consequência do Teorema (104) que nos será muito útil: a integração por partes.

Proposição 109. *Seja $f, g \in H^1(a,b)$. Logo*
i. $fg \in H^1(a,b)$ e $(fg)' = f'g + fg'$.
ii. $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

Demonstração. Vamos começar provando ii. Vemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)g(x)dx &= \int_a^b f'(x)\left(g(a) + \int_a^x g'(y)dy\right)dx \\
&= g(a)\int_a^b f'(x)dx + \int_a^b \left(\int_a^x f'(x)g'(y)dy\right)dx \\
&= g(a)f(b) - g(a)f(a) + \int_a^b \left(\int_y^b f'(x)dx\right)g'(y)dy \\
&= g(a)f(b) - g(a)f(a) + \int_a^b f(b)g'(y)dy - \int_a^b f(y)g'(y)dy \\
&= g(a)f(b) - g(a)f(a) + f(b)g(b) - f(b)g(a) - \int_a^b f(y)g'(y)dy \\
&= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.
\end{aligned}$$

Usando o mesmo argumento acima, podemos verificar que

$$\int_a^x f'(t)g(t)dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t)dt.$$

Logo

$$f(x)g(x) = f(a)g(a) + \int_a^x \left(f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\right)dt.$$

Pelo Teorema 104, concluímos que $fg \in H^1(a,b)$ e que $(fg)' = f'g + fg'$. $\square$

Teorema 110. *O espaço $H^1(a,b)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Seja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H^1(a,b)$. Logo dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $i, j \geq N$, então

$$\|f_i - f_j\|^2_{L^2(a,b)} + \|f_i' - f_j'\|^2_{L^2(a,b)} \leq \|f_i - f_j\|^2_{H^1(a,b)} < \varepsilon^2.$$

Assim, concluímos que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(f_j')_{j\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $L^2(a,b)$. Como $L^2(a,b)$ é um espaço completo, existem funções $f, g \in L^2(a,b)$ tais que $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ e $\lim_{j\to\infty} f_j' = g$ em $L^2(a,b)$.

Pela definição de derivada fraca, sabemos que para todo $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$, temos

$$\int_a^b f_j(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b f_j'(x)\varphi(x)dx,$$

ou seja, $(f_j, \varphi')_{L^2(a,b)} = -(f_j', \varphi)_{L^2(a,b)}$. Tomando o limite, vemos que

$$(f, \varphi')_{L^2(a,b)} = \lim_{j\to\infty}(f_j, \varphi')_{L^2(a,b)} = -\lim_{j\to\infty}(f_j', \varphi)_{L^2(a,b)} = -(g, \varphi)_{L^2(a,b)},$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b g(x)\varphi(x)dx,$$

o que implica que $f \in H^1(a,b)$ e $f' = g$. Por fim, note que

$$\lim_{j\to\infty}\|f - f_j\|_{H^1(a,b)} = \lim_{j\to\infty}\sqrt{\|f - f_j\|^2_{L^2(a,b)} + \|f' - f_j'\|_{L^2(a,b)}} = 0,$$

ou seja, a sequência $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge para f em $H^1(a,b)$. $\square$

PROPOSIÇÃO 111. *Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|f\|_{L^\infty(a,b)} \leq C\|f\|_{H^1(a,b)}$ para toda função $f \in H^1(a, b)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que não exista tal constante. Logo para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\tilde{f}_n \in H^1(a, b)$ não nula que satisfaz

$$\|\tilde{f}_n\|_{L^\infty(a,b)} > n\|\tilde{f}_n\|_{H^1(a,b)}.$$

Vamos definir $f_n \in H^1(a, b)$ por $f_n = \tilde{f}_n/\|\tilde{f}_n\|_{H^1(a,b)}$. Assim, $\|f_n\|_{H^1(a,b)} = 1$ e $\|f_n\|_{L^\infty(a,b)} > n$.
Sabemos que se $x \in]a, b[$, então

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(y)dy. \tag{3.1.4}$$

Observando que

$$\left|\int_a^x f_n'(y)dy\right| \leq \int_a^b |f_n'(y)|dy \leq (b-a)^{1/2}\sqrt{\int_a^b |f_n'(y)|^2 dy} \leq (b-a)^{1/2}\|f_n\|_{H^1(a,b)} = (b-a)^{1/2}, \tag{3.1.5}$$

vemos que (3.1.4) e (3.1.5) implicam que

$$|f_n(a)| = |f_n(x)| - |\int_a^x f_n'(y)dy| \geq |f_n(x)| - (b-a)^{1/2}. \tag{3.1.6}$$

Tomando o supremo em $[a, b]$ em (3.1.6), concluímos que

$$|f_n(a)| \geq \|f_n\|_{L^\infty(a,b)} - (b-a)^{1/2}.$$

Logo $\lim_{n\to\infty} |f_n(a)| = \infty$. As equações (3.1.4) e (3.1.5) também nos dizem que

$$|f_n(x)| = |f_n(a)| - (b-a)^{1/2}.$$

Assim,

$$\|f_n\|^2_{H^1(a,b)} \geq \|f_n\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b |f_n(x)|^2 dx \geq \int_a^b ||f_n(a)|-(b-a)^{1/2}|^2 dx = (|f_n(a)|-(b-a)^{1/2})^2(b-a).$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|^2_{H^1(a,b)} = \infty$, o que é uma constradição com $\|f_n\|_{H^1(a,b)} = 1$. □

COROLÁRIO 112. *Seja $x_0 \in [a, b]$, então a função $L_{x_0} : H^1(a, b) \to \mathbb{R}$ dada por $L_{x_0}(f) = f(x_0)$ é um funcional linear contínuo.*

Lembramos que $f \in H^1(a, b)$ é igual (para quase todo ponto) a uma única função em $C([a, b])$. Logo o funcional linear acima está bem definido.

DEMONSTRAÇÃO. A linearidade é de simples verificação e fica a cargo do leitor. Para a continuidade, basta observar que

$$|L_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leq \|f\|_{L^\infty(a,b)} \leq C\|f\|_{H^1(a,b)},$$

em que $C > 0$ é a constante da Proposição 111. □

Para a resolução de problemas com condições de Dirichlet, é interessante definir um subespaço adequado de $H^1(a, b)$.

DEFINIÇÃO 113. Definimos o espaço $H_0^1(a, b)$ como o espaço das funções $f \in H^1(a, b)$ tais que $f(a) = f(b) = 0$.

Para mostrar que $H_0^1(a, b)$ é um espaço de Hilbert, começaremos com um lema simples.

LEMA 114. *Seja H um espaço de Hilbert. Se F_1 e F_2 são dois subespaços fechados de H, então $F_1 \cap F_2$ também é um subespaço fechado de H.*

Demonstração. Observamos que se u e v pertencem a $F_1 \cap F_2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha u + \beta v$ também pertencerá tanto a F_1 como a F_2, já que ambos são subespaços. Logo $F_1 \cap F_2$ é um subespaço.

Para mostrar que $F_1 \cap F_2$ é fechado, consideremos uma sequência $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $F_1 \cap F_2$ que converge para $f \in H$. Como a sequência está em F_1 e F_1 é fechado, concluímos que o limite também pertence a F_1. O mesmo pode ser dito de F_2. Assim, $f \in F_1 \cap F_2$ e concluímos que $F_1 \cap F_2$ é um conjunto fechado. $\square$

Proposição 115. *O espaço $H_0^1(a, b)$ é um espaço de Hilbert e está contido no espaço de todas as funções $f \in C([a, b])$ tais que $f(a) = f(b) = 0$.*

Demonstração. As funções em $H_0^1(a, b)$ podem ser identificadas com funções contínuas em $[a, b]$ pelo Corolário 106. Que essas funções se anulam em a e em b, segue diretamente da definição de $H_0^1(a, b)$.

Para mostrar que $H_0^1(a, b)$ é um espaço de Hilbert, basta mostrar que é um subespaço fechado de $H^1(a, b)$, pela Proposição 53.

Sejam $L_a, L_b : H^1(a, b) \to \mathbb{R}$ as funções em $H^1(a, b)$ definidas por $L_a(f) = f(a)$ e $L_b(f) = f(b)$. Essas funções são funcionais lineares contínuos pelo Corolário 112. Agora observamos que $H_0^1(a, b) = N(L_a) \cap N(L_b)$, em que, como sempre, N indica o núcleo dos operadores. Logo $H_0^1(a, b)$ é igual a intereseção de dois subespaços fechados. Logo também é um subespaço fechado. $\square$

Proposição 116. *(Desigualdade de Poincaré) Se $u \in H_0^1(a, b)$, então*

$$\|u\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(a,b)}.$$

Demonstração. Se $u \in H_0^1(a, b)$, então $u(x) = \int_a^x u'(y)dy$ e $u' \in L^2(a, b)$. Assim,

$$|u(x)|^2 = |\int_a^x u'(y)dy|^2 \leq (x-a) \int_a^x |u'(y)|^2 dy.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |u(x)|^2 dx &\leq \int_a^b \left((x-a) \int_a^x |u'(y)|^2 dy \right) dx \\
&\leq \int_a^b (x-a) dx \int_a^b |u'(y)|^2 dy = \frac{1}{2}(b-a)^2 \|u'\|_{L^2(a,b)}^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Corolário 117. *Dados a e $b \in \mathbb{R}$, existe uma constante $C > 0$ (que depende de a e b) tal que*

$$\|u\|_{H^1(a,b)} \leq C \|u'\|_{L^2(a,b)}$$

para todo $u \in H_0^1(a, b)$.

Demonstração. Basta observar que

$$\|u\|_{H^1(a,b)}^2 = \|u\|_{L^2(a,b)}^2 + \|u'\|_{L^2(a,b)}^2 \leq \left(1 + \frac{(b-a)^2}{2}\right) \|u'\|_{L^2(a,b)}^2.$$

$\square$

Definição 118. O *espaço de Sobolev de ordem zero* é definido como sendo $L^2(a, b)$. Para $m \in \mathbb{N}$, *o espaço de Sobolev de ordem m* é o espaço de todas as funções $f \in H^1(a, b)$ que possuem uma derivada fraca pertence a $H^{m-1}(a, b)$. Se $f \in H^m(a, b)$, $m \in \mathbb{N}$, definimos $f^{(0)} = f$. Se $m \geq 1$, e $k \leq m$, então definimos $f^{(k)}$ como sendo a derivada fraca de $f^{(k-1)}$. Em particular, $f^{(1)} = f'$. A função $f^{(k)}$ será chamada de *derivada fraca de ordem $k \in \mathbb{N}_0$*.

Lembramos que o espaço $C^m([a,b])$ é definido da mesma maneira.

Uma função em $H^m(a,b)$ terá derivadas fracas de ordem $k \in \{0,1,2,...,m\}$. Assim, podemos definir um produto interno em $H^m(a,b)$ da seguinte forma.

$$(f,g)_{H^m(a,b)} = \sum_{j=0}^{m} (f^{(j)}, g^{(j)})_{L^2(a,b)}.$$

Repetindo a demonstração do Teorema 110, podemos provar que o espaço $H^m(a,b)$ munido com o produto interno $(\cdot,\cdot)_{H^m(a,b)}$ é um espaço de Hilbert. Da mesma forma, podemos provar por indução que $H^m(a,b) \subset C^{m-1}([a,b])$ e que $f \in H^m(a,b)$ pertence a $C^m([a,b])$ se, e somente se, $f^{(m)}$ for uma função contínua.

3.2. Solução de problemas via método variacional

Vamos agora usar o que aprendemos anteriormente para resolver problemas de contorno em dimensão um. Ao invés de tentar descrever um procedimento geral, daremos diversos exemplos (retirados do livro do Arendt e Urban). Note que a forma de resolução se assemelha muito de um problema para outro.

Problema. **1.** (Laplace Dirichlet) Dado $f \in L^2(a,b)$, mostre que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ que resolve o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \lambda u(x) - u''(x) = f(x),\ x \in]a,b[\\ u(a) = u(b) = 0. \end{aligned}, \tag{3.2.1}$$

em que $\lambda \geq 0$ é uma constante dada.

(Para quem for familiar com a teoria de medida e integração, o mais correto seria dizer que $\lambda u(x) - u''(x) = f(x)$ para quase todo $x \in]a,b[$. A mesma observação vale para os problemas que veremos abaixo).

Solução: Vamos dividir a solução em 3 passos (o(a) leitor(a) pode dividir de outras formas, se assim preferir).

Passo 1. Mostraremos que se u é solução de (3.2.1), então u é solução da formulação fraca do problema, conforme será definido a seguir.

Suponha que exista uma solução $u \in H^2(a,b)$ do problema acima. Multiplicando tudo por $v \in H_0^1(a,b)$ e integrando em $]a,b[$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)v(x)dx &= \lambda \int_a^b u(x)v(x)dx - \int_a^b u''(x)v(x)dx \\ &\overset{(1)}{=} \lambda \int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx - u'(b)v(b) + u'(a)v(a) \\ &\overset{(2)}{=} \lambda \int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Em (1) usamos a integração por partes via Proposição 109. Em (2), usamos que $v \in H_0^1(a,b)$ e, portanto, $v(a) = v(b) = 0$.

Diremos que uma função $w \in H_0^1(a,b)$ é uma *solução fraca do problema* (3.2.1) se para todo $v \in H_0^1(a,b)$ temos a seguinte igualdade:

$$\lambda \int_a^b w(x)v(x)dx + \int_a^b w'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx. \tag{3.2.3}$$

Assim, concluímos que se $H^2(a,b)$ é solução (3.2.1), então u é uma solução fraca do problema (3.2.1). Isto segue de (3.2.2) e do fato de que $u \in H_0^1(a,b)$, já que $H^2(a,b) \subset H^1(a,b)$ e $u(a) = u(b) = 0$.

Passo 2. Mostraremos que existe uma única solução fraca do Problema (3.2.1).

Definiremos $a : H_0^1(a,b) \times H_0^1(a,b) \to \mathbb{R}$ e $F : H_0^1(a,b) \to \mathbb{R}$ por

$$a(u,v) = \lambda \int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx, \quad F(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

Observamos que:

i. A função F é linear e contínua.

A linearidade é muito fácil de verificar. Já a continuidade segue da desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$|F(v)| = |\int_a^b f(x)v(x)dx| = |(f,v)_{L^2(a,b)}| \leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{H_0^1(a,b)}.$$

ii. A função a é bilinear, contínua e coerciva.

Novamente a bilinearidade é fácil de verificar. A continuidade segue da Proposição 92 e de

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &= \left|\lambda \int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx\right| \leq |\lambda||(u,v)_{L^2(a,b)}| + |(u',v')_{L^2(a,b)}| \\ &\leq |\lambda|\|u\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} + \|u'\|_{L^2(a,b)}\|v'\|_{L^2(a,b)} \leq (1+|\lambda|)\|u\|_{H_0^1(a,b)}\|v\|_{H_0^1(a,b)}.\end{aligned}$$

Finalmente a coercividade segue de

$$a(u,u) = \lambda\|u\|^2_{L^2(a,b)} + \|u'\|^2_{L^2(a,b)} \geq \|u'\|^2_{L^2(a,b)} \geq \frac{1}{C^2}\|u\|^2_{H_0^1(a,b)},$$

em que $C > 0$ é a constante do Corolário 117.

Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in H_0^1(a,b)$ tal que

$$a(u,v) = F(v),$$

para todo $v \in H_0^1(a,b)$. Concluímos que existe uma única solução fraca do Problema (3.2.1). Com isto concluímos que se existir uma solução $u \in H^2(a,b)$ do Problema (3.2.1), então a solução será única, já que, como vimos no passo 1, ela também é uma solução do fraca do problema.

Passo 3. Mostraremos que uma solução fraca do Problema (3.2.1) pertence a $H^2(a,b)$ e é de fato uma solução.

Vimos que se a solução fraca u do problema pertence a $H_0^1(a,b)$ e satisfaz (3.2.3). Como $C_c^1(]a,b[) \subset H_0^1(a,b)$, concluímos que para todo $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$, temos

$$\int_a^b u'(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b (\lambda u(x) - f(x))\varphi(x)dx.$$

Como u' e $\lambda u - f$ pertencem a $L^2(a,b)$, concluímos, pela própria definição de derivada fraca, que $u' \in H^1(a,b)$ e $u'' = \lambda u - f$. Assim, $u \in H^2(a,b)$ é uma solução do problema (3.2.1). Note que as condições de contorno são automaticamente satisfeitas, pois $u \in H_0^1(a,b)$.

Observação 119. Pela Proposição (97), a solução u anterior corresponde à função $u \in H_0^1(a,b)$ que minimiza o funcional $J : H_0^1(a,b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(v) = \lambda\frac{1}{2}\int_a^b v(x)^2dx + \frac{1}{2}\int_a^b v'(x)^2dx - \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

Problema. **2.** (Laplace Neumann) Dado $f \in L^2(a,b)$, mostre que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ que resolve o seguinte problema:

$$\begin{array}{c}\lambda u(x) - u''(x) = f(x),\ x \in]a,b[\\ u'(a) = u'(b) = 0.\end{array}, \tag{3.2.4}$$

em que $\lambda > 0$ é uma constante dada.

Solução: Vamos novamente dividir a solução em 3 passos.

Passo 1. Mostraremos que se u é solução de (3.2.4), então u é solução da formulação fraca do problema, conforme será definido a seguir.

Suponha que exista uma solução $u \in H^2(a,b)$ do problema acima. Multiplicando tudo por $v \in H^1(a,b)$ (agora usaremos H^1 ao invés de H_0^1) e integrando em $]a,b[$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)v(x)dx &= \lambda\int_a^b u(x)v(x)dx - \int_a^b u''(x)v(x)dx\\ &\overset{(1)}{=} \lambda\int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx - u'(b)v(b) + u'(a)v(a)\\ &\overset{(2)}{=} \lambda\int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx.\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Em (1) usamos a integração por partes via Proposição 109. Em (2), usamos que $u'(a) = u'(b) = 0$.

Diremos que uma função $w \in H^1(a,b)$ é uma *solução fraca do problema* (3.2.4) se para todo $v \in H^1(a,b)$ temos a seguinte igualdade:

$$\lambda\int_a^b w(x)v(x)dx + \int_a^b w'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx. \tag{3.2.6}$$

Assim, concluímos que se $H^2(a,b)$ é solução (3.2.4), então u é uma solução fraca do problema (3.2.4). Isto segue de (3.2.5) e do fato de que $u \in H^1(a,b)$, já que $H^2(a,b) \subset H^1(a,b)$.

Passo 2. Mostraremos que existe uma única solução fraca do Problema (3.2.4).

Definiremos $a : H^1(a,b) \times H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ e $F : H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ por

$$a(u,v) = \lambda\int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx, \quad F(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

Observamos que:

i. A função F é linear e contínua.

A linearidade é muito fácil de verificar. Já a continuidade segue da desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$|F(v)| = |\int_a^b f(x)v(x)dx| = |(f,v)_{L^2(a,b)}| \leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{H^1(a,b)}.$$

ii. A função a é bilinear, contínua e coerciva.

Novamente a bilinearidade é fácil de verificar. A continuidade segue da Proposição 92 e de

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &= \left|\lambda\int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx\right| \leq |\lambda||(u,v)_{L^2(a,b)}| + |(u',v')_{L^2(a,b)}|\\ &\leq |\lambda|\|u\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} + \|u'\|_{L^2(a,b)}\|v'\|_{L^2(a,b)} \leq (1+|\lambda|)\|u\|_{H_0^1(a,b)}\|v\|_{H_0^1(a,b)}.\end{aligned}$$

Finalmente a coercividade segue de

$$a(u,u) = \lambda\|u\|^2_{L^2(a,b)} + \|u'\|^2_{L^2(a,b)} \geq \min\{1,\lambda\}(\|u\|^2_{L^2(a,b)} + \|u'\|^2_{L^2(a,b)}) = \min\{1,\lambda\}\|u\|^2_{H^1(a,b)}.$$

Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in H^1(a,b)$ tal que

$$a(u,v) = F(v),$$

para todo $v \in H^1(a,b)$. Concluímos que existe uma única solução fraca do Problema (3.2.4). Com isto concluímos que se existir uma solução $u \in H^2(a,b)$ do Problema (3.2.4), então a solução será única, já que, como vimos no passo 1, ela também é uma solução do fraca do problema.

Passo 3. Mostraremos que uma solução fraca do Problema (3.2.4) pertence a $H^2(a,b)$ e é de fato uma solução.

Vimos que se a solução fraca u do problema pertence a $H^1(a,b)$ e satisfaz (3.2.6). Como $C_c^1(]a,b[) \subset H^1(a,b)$, concluímos que para todo $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$, temos

$$\int_a^b u'(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b (\lambda u(x) - f(x))\varphi(x)dx.$$

Como u' e $\lambda u - f$ pertencem a $L^2(a,b)$, concluímos, pela própria definição de derivada fraca, que $u' \in H^1(a,b)$ e $u'' = \lambda u - f$. Em particular, $u \in H^2(a,b)$.

Para verificar as condições de contorno, observe que para todo $v \in H^1(a,b)$, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(x)v'(x)dx = -\int_a^b (\lambda u(x) - f(x))v(x)dx &\overset{(1)}{=} -\int_a^b u''(x)v(x)dx \\ &\overset{(2)}{=} \int_a^b u'(x)v'(x)dx - u'(b)v(b) + u'(a)v(a),\end{aligned}$$

em que usamos em (1) que $u'' = \lambda u - f$ e em (2) que $u' \in H^1(a,b)$ e, portanto, podemos integrar tudo por partes pela Proposição 109. Concluímos que

$$u'(b)v(b) = u'(a)v(a),$$

para todo $v \in H^1(a,b)$. Escolhendo $v(x) = 1 - (x-a)/(b-a)$, concluímos que $v(a) = 1$ e $v(b) = 0$. Logo $u'(a) = 0$. Escolhendo $v(x) = 1 + (x-b)/(b-a)$, temos $v(b) = 1$ e $v(a) = 0$. Logo $u'(b) = 0$. Assim, u satisfaz as condições de contorno do Problema (3.2.4).

Observação 120. Pela Proposição (97), a solução u anterior corresponde à função $u \in H^1(a,b)$ que minimiza o funcional $J : H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(v) = \lambda\frac{1}{2}\int_a^b v(x)^2dx + \frac{1}{2}\int_a^b v'(x)^2dx - \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

Para o terceiro problema, precisaremos de um lema.

Lema 121. *Sejam $\alpha, \beta \geq 0$ e $\varepsilon > 0$. Logo $\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\beta^2$.*

Demonstração. Basta observar que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\beta - \sqrt{2\varepsilon}\alpha\right)^2 \geq 0.$$

Assim,

$$\frac{\beta^2}{2\varepsilon} - 2\alpha\beta + 2\varepsilon\alpha^2 \geq 0 \iff \frac{\beta^2}{2\varepsilon} + 2\varepsilon\alpha^2 \geq 2\alpha\beta \iff \alpha\beta \leq \frac{\beta^2}{4\varepsilon} + \varepsilon\alpha^2.$$

□

Problema. **3.** (Não simétrico Dirichlet) Dado $f \in L^2(a,b)$, mostre que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ que resolve o seguinte problema:

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = f(x),\ x \in]a,b[\\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{3.2.7}$$

em que $p \in C^1([a,b])$, $q, r \in C([a,b])$ e existem constantes reais α e β tais que $0 < \beta < \alpha$, $p(x) \geq \alpha$ e $q(x)^2 \leq 4\beta r(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Solução:

Passo 1. Mostraremos que se u é solução de (3.2.7), então u é solução da formulação fraca do problema, conforme será definido a seguir.

Suponha que exista uma solução $u \in H^2(a,b)$ do problema acima. Multiplicando tudo por $v \in H_0^1(a,b)$ e integrando em $]a,b[$, obtemos
(3.2.8)

$$\int_a^b f(x)v(x)dx = -\int_a^b (p(x)u'(x))'v(x)dx + \int_a^b q(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b r(x)u(x)v(x)dx$$

$$\overset{(1)}{=} \int_a^b p(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b r(x)u(x)v(x)dx - p(b)u'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a)$$

$$\overset{(2)}{=} \int_a^b p(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b r(x)u(x)v(x)dx.$$

Em (1) usamos a integração por partes via Proposição 109. Em (2), usamos que $v \in H_0^1(a,b)$.

Diremos que uma função $w \in H_0^1(a,b)$ é uma *solução fraca do problema* (3.2.7) se para todo $v \in H_0^1(a,b)$ temos a seguinte igualdade:

$$\int_a^b p(x)w'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)w'(x)v(x)dx + \int_a^b r(x)w(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx. \tag{3.2.9}$$

Assim, concluímos que se $H^2(a,b)$ é solução (3.2.7), então u é uma solução fraca do problema (3.2.7). Isto segue de (3.2.8) e do fato de que $u \in H_0^1(a,b)$, já que $H^2(a,b) \subset H^1(a,b)$ e $u(a) = u(b) = 0$.

Passo 2. Mostraremos que existe uma única solução fraca do Problema (3.2.7).

Definiremos $a : H_0^1(a,b) \times H_0^1(a,b) \to \mathbb{R}$ e $F : H_0^1(a,b) \to \mathbb{R}$ por

$$a(u,v) = \int_a^b p(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b r(x)u(x)v(x)dx, \quad F(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

Observamos que:

i. A função F é linear e contínua.

A linearidade é muito fácil de verificar. Já a continuidade segue da desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$|F(v)| = |\int_a^b f(x)v(x)dx| = |(f,v)_{L^2(a,b)}| \le \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} \le \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{H_0^1(a,b)}.$$

ii. A função a é bilinear, contínua e coerciva.

Novamente a bilinearidade é fácil de verificar. A continuidade segue da Proposição 92 e de

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &= \left|\int_a^b p(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b r(x)u(x)v(x)dx\right| \\ &= \|p\|_{L^\infty(a,b)}\|u'\|_{L^2(a,b)}\|v'\|_{L^2(a,b)} + \|q\|_{L^\infty(a,b)}\|u'\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} + \|r\|_{L^\infty(a,b)}\|u\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} \\ &\le \left(\|p\|_{L^\infty(a,b)} + \|q\|_{L^\infty(a,b)} + \|r\|_{L^\infty(a,b)}\right)\|u\|_{H^1(a,b)}\|v\|_{H^1(a,b)}\end{aligned}$$

Para provar coercividade, observamos inicialmente que, pelo Lema 121, temos

$$|q(x)u'(x)u(x)| \le \frac{1}{4\beta}q(x)^2u(x)^2 + \beta u'(x)^2. \tag{3.2.10}$$

Assim,

$$\begin{aligned}a(u,u) &= \int_a^b p(x)u'(x)u'(x)dx + \int_a^b q(x)u'(x)u(x)dx + \int_a^b r(x)u(x)u(x)dx \\ &\overset{(1)}{\ge} \alpha\int_a^b u'(x)u'(x)dx - \int_a^b \frac{1}{4\beta}q(x)^2u(x)^2 - \int_a^b \beta u'(x)^2dx + \int_a^b r(x)u(x)^2dx \\ &= (\alpha-\beta)\int_a^b u'(x)^2dx + \int_a^b \left(r(x) - \frac{1}{4\beta}q(x)^2\right)u(x)^2 \overset{(2)}{\ge} (\alpha-\beta)\|u'\|^2_{L^2(a,b)} \overset{(3)}{\ge} \frac{(\alpha-\beta)}{C^2}\|u\|^2_{H_0^1(a,b)}.\end{aligned}$$

Em (1) usamos que $p(x) \ge \alpha$, $quu' \ge -|quu'|$ e (3.2.10) . Em (2) usamos que $4\beta r(x) \ge \frac{1}{4\beta}q(x)^2$. Em (3) usamos a constante $C > 0$ do Corolário 117.

Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in H_0^1(a,b)$ tal que

$$a(u,v) = F(v),$$

para todo $v \in H_0^1(a,b)$. Concluímos que existe uma única solução fraca do Problema (3.2.7). Com isto concluímos que se existir uma solução $u \in H^2(a,b)$ do Problema (3.2.7), então a solução será única, já que, como vimos no passo 1, ela também é uma solução do fraca do problema.

Passo 3. Mostraremos que uma solução fraca do Problema (3.2.7) pertence a $H^2(a,b)$ e é de fato uma solução.

Vimos que se a solução fraca u do problema pertence a $H_0^1(a,b)$ e satisfaz (3.2.9). Como $C_c^1(]a,b[) \subset H_0^1(a,b)$, concluímos que para todo $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$, temos

$$\int_a^b p(x)u'(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b \left(q(x)u'(x) + r(x)u(x) - f(x)\right)\varphi(x)dx.$$

Como p é limitada (pois é contínua num compacto) e $u' \in L^2(a,b)$, então $pu' \in L^2(a,b)$. Da mesma forma, $qu' + ru - f \in L^2(a,b)$. Pela própria definição de derivada fraca, concluímos que $pu' \in H^1(a,b)$ e $(pu')' = qu' + ru - f$. Note que como $\frac{1}{p}$ é limitada, pois$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{\alpha}$, então $u' = \frac{1}{p}pu \in H^1(a,b)$. Assim, $u \in H^2(a,b)$ é uma solução do problema (3.2.7). Note que as condições de contorno são automaticamente satisfeitas, pois $u \in H_0^1(a,b)$.

PROPOSIÇÃO 122. *O subespaço $H_0^1(a,b) \cap H^2(a,b)$ é fechado em $H^2(a,b)$ e o operador linear $A : H^2(a,b) \cap H_0^1(a,b) \to L^2(a,b)$ definido como*

$$Au = -(pu')' + qu' + ru$$

é contínuo, bijetor e com inversa contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $L_0 : H^2(0,1) \to \mathbb{R}$ e $L_1 : H^2(0,1) \to \mathbb{R}$ dados por

$$L_0 u = u(a), \quad L_1 u = u(b).$$

Observando que

$$|L_0 u| = |u(a)| \leq \|u\|_{L^\infty(a,b)} \leq C_1 \|u\|_{H^1(a,b)} \leq C_2 \|u\|_{H^2(a,b)},$$

concluímos que L_0 é contínuo. Com o mesmo argumento, podemos provar que L_1 é contínuo. Desta forma, como $H_0^1(a,b) \cap H^2(a,b)$ é a intersecção dos núcleos de L_0 e L_1 (que são subespaços fechados), concluímos que $H_0^1(a,b) \cap H^2(a,b)$ também é um subespaço fechado.

Agora vamos mostrar as propriedades de A.

A é contínua.

Basta observar que

$$\begin{aligned}
\|Au\|_{L^2(a,b)} &= \|-(pu')' + qu' + ru\|_{L^2(a,b)} \leq \|-p'u' - pu'' + qu' + ru\|_{L^2(a,b)} \\
&\leq \|p'\|_{L^\infty(a,b)}\|u'\|_{L^2(a,b)} + \|p\|_{L^\infty(a,b)}\|u''\|_{L^2(a,b)} + \|q\|_{L^\infty(a,b)}\|u'\|_{L^2(a,b)} + \|r\|_{L^\infty(a,b)}\|u\|_{L^2(a,b)} \\
&\leq \left(\|p'\|_{L^\infty(a,b)} + \|p\|_{L^\infty(a,b)} + \|q\|_{L^\infty(a,b)} + \|r\|_{L^\infty(a,b)}\right)\|u\|_{H^2(a,b)}.
\end{aligned}$$

A é injetora.

Se $Au = 0$, então vimos que existe uma única solução do problema

$$\begin{aligned}
-(p(x)u'(x))' + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = 0,\ x \in]a,b[\\
u(a) = u(b) = 0.
\end{aligned}$$

Como a função 0 é uma solução, concluímos que $u = 0$.

A é sobrejetora.

Dado $f \in L^2(a,b)$, vimos que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ que resolver

$$\begin{aligned}
-(p(x)u'(x))' + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = f(x),\ x \in]a,b[\\
u(a) = u(b) = 0.
\end{aligned}$$

Logo $u \in H^2(a,b) \cap H_0^1(a,b)$ e $Au = f$.

A tem inversa contínua.

Primeiramente, observamos que

$$\|u\|^2_{H^1_0(a,b)} \leq Ca(u,u) = CF(u) \leq C\|u\|_{L^2(a,b)}\|f\|_{L^2(a,b)} \leq C\|u\|_{H^1_0(a,b)}\|f\|_{L^2(a,b)}.$$

Logo, $\|u\|_{H^1(a,b)} \leq C\|f\|_{L^2(a,b)}$.

Assim,

$$\|u''\|_{L^2(a,b)} = \|\frac{1}{p}pu''\|_{L^2(a,b)} = \| -\frac{p'}{p}u' + \frac{q}{p}u' + \frac{r}{p}u - \frac{f}{p}\|_{L^2(a,b)}$$
$$\leq \|\frac{p'}{p}\|_{L^\infty(a,b)}\|u'\|_{L^2(a,b)} + \|\frac{q}{p}\|_{L^\infty(a,b)}\|u'\|_{L^2(a,b)} + \|\frac{r}{p}\|_{L^\infty(a,b)}\|u\|_{L^2(a,b)} + \|\frac{1}{p}\|_{L^\infty(a,b)}\|f\|_{L^2(a,b)}$$
$$\leq C\|f\|_{L^2(a,b)}.$$

Portanto, $\|u\|_{H^2(a,b)} \leq C\|f\|_{L^2(a,b)}$. □

3.3. Método dos elementos finitos

Nessa seção, vamos mostrar como é possível usar os resultados e os métodos vistos na seção anterior podem ser usados para obter estimativas de aproximações numéricas das equações estudadas.

Vamos restringir ao seguinte problema:

$$\begin{aligned} -(a(x)u'(x))' + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

em que $a \in C^1([0,1])$, $c \in C([0,1])$, $a(x) \geq a_0 > 0$ e $c(x) \geq 0$, para todo $x \in [0,1]$, e $f \in L_2(0,1)$.

Lembramos que pela seção passada que a solução $u \in H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$ do problema acima é também uma solução fraca, ou seja, satisfaz

$$a(u,\varphi) = (u,\varphi), \quad \forall \varphi \in H^1_0(0,1),$$

em que $a : H^1_0(0,1) \times H^1_0(0,1) \to \mathbb{R}$ é definido como

$$a(u,v) = \int_\Omega (a(x)u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))\,dx. \tag{3.3.2}$$

Proposição 123. *A forma bilinear $a : H^1_0(0,1) \times H^1_0(0,1) \to \mathbb{R}$ definida em (3.3.2) é um produto interno.*

Demonstração. A linearidade na primeira variável e a simetria são imediatas. Como a e c são não negativas, então $a(u,u) \geq 0$ para todo $u \in H^1_0(0,1)$. Por fim, se $a(u,u) = 0$, então devemos ter

$$\int_\Omega |u'(x)|^2 dx \leq \frac{1}{a_0}\int_\Omega a(x)u'(x)^2 dx \leq \frac{1}{a_0}\int_\Omega \left(a(x)u'(x)^2 + c(x)u(x)^2\right)dx = a(u,u) = 0.$$

Pela desigualdade de Poincaré, concluímos que $\int_\Omega u(x)^2dx = 0$. Portanto, $u = 0$. □

Iremos denotar a norma associada a forma a por $\|.\|_a$. Assim, para $u \in H^1(a,b)$, temos

$$\|u\|_a = \sqrt{a(u,u)}.$$

Para aproximar o problema numericamente, vamos definir um subespaço finito $S_h \subset H^1_0(a,b)$ e achar uma aproximação nesse espaço.

Vamos fixar uma partição de $[0,1]$ dada por $h = \frac{1}{M}$ e $x_j = jh$, com $j \in \{0,1,...,M\}$. Definiremos $K_j = [x_{j-1}, x_j]$, para todo $j \in \{1,...,M\}$. Nosso espaço S_h será definido como

$$S_h = \{v \in C([0,1]);\, v(0) = v(1) = 0 \,\text{e}\, v \,\text{é linear em cada intervalo}\, K_j\}.$$

Desta maneira, se $v \in S_h$, então o gráfico de v em K_j é a reta que liga $(x_{j-1}, v(x_{j-1}))$ a $(x_j, v(x_j))$, ou seja,

$$v(x) = \frac{1}{h}\left((x_j - x)v(x_{j-1}) + (x - x_{j-1})v(x_j)\right), \,\text{se}\, x \in K_j. \tag{3.3.3}$$

Vemos, assim que v é unicamente definido pelos pontos x_1, ..., x_{M-1}, lembrando que $v(x_0) = v(0) = 0 = v(1) = v(x_M)$.

Vamos agora definir uma base para o espaço S_h.

Seja $B = \{\Phi_1, ..., \Phi_{M-1}\}$, em que $\Phi_j : I \to \mathbb{R}$, para $j \in \{1, ..., M-1\}$ é definido como

$$\Phi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in K_j = [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{1}{h}(x_{j+1} - x), & x \in K_{j+1} = [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x \notin K_j \cup K_{j+1} = [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases}. \tag{3.3.4}$$

Assim, pela definição de Φ_j e por (3.3.3), vemos facilmente que

$$v(x) = \sum_{j=1}^{M-1} v(x_j)\Phi_j(x).$$

Concluímos desta maneira que Φ_j gera o espaço S_h. Agora, observe que pela Definição (3.3.3) vemos que $\Phi_j(x_i) = \delta_{ij}$. Assim, se

$$\sum_{j=1}^{M-1} a_j\Phi_j(x) = 0$$

para todo $x \in I$, então para $x = x_i$ e $i \in \{1, ..., M-1\}$, então

$$\sum_{j=1}^{M-1} a_j\Phi_j(x_i) = 0 \implies \sum_{j=1}^{M-1} a_j\delta_{ij} = 0 \implies a_i = 0.$$

Isto mostra que B é um conjunto linearmente independente. Concluímos que B é uma base de S_h.

Quanto às derivadas dos elementos de S_h, vamos definir as seguintes funções $\{\Phi'_1, ..., \Phi'_{M-1}\}$ da seguinte forma

$$\Phi'_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x \in K_j = [x_{j-1}, x_j] \\ -\frac{1}{h}, & x \in K_{j+1} = [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x \notin K_j \cup K_{j+1} = [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases}. \tag{3.3.5}$$

Note que uma simples integração nos mostra que $\Phi_j(x) = \int_0^x \Phi'_j(s)ds$. Assim, como $\Phi'_j \in L_2(I)$, concluímos que $\Phi_j \in H_0^1(I)$ para todo $j \in \{1, ..., M-1\}$ e Φ'_j é a derivada fraca de Φ_j pelo Teorema (104). Resumindo nossos resultados, o que provamos até agora foi o seguinte resultado.

Proposição 124. *O espaço S_h é um subespaço de $H_0^1(I)$ de dimensão $M-1$. O conjunto $B = \{\Phi_1, ..., \Phi_M\}$ definido em (3.3.4) forma uma base de S_h e suas derivadas fracas são dadas por (3.3.5).*

Para obter uma solução aproximada de (3.3.1), vamos inicialmente estudar o seguinte problema.

Problema 125. Ache uma função $u_h \in S_h$ que satisfaça $a(u_h, \chi) = (f, \chi)$ para todo $\chi \in S_h$.

Nosso objetivo será mostrar que u_h existe, é única e converge de alguma forma para a única solução u de (3.3.1) quando $h \to 0$. Essa estratégia de substituir o espaço $H_0^1(I)$ por um espaço de dimensão finita S_h chama-se de método de Galerkin. Os intervalos K_j e as funções de S_h restritas a K_j são os chamados elementos finitos.

Para demonstrar que u_h existe e é única, vamos começar observando que, por linearidade, $a(u_h, \chi) = (f, \chi)$ para todo $\chi \in S_h$ ocorre se, e somente se, $a(u_h, \Phi_j) = (f, \Phi_j)$ para todo $j \in \{1, ..., M-1\}$. Se $u_h = \sum_{i=1}^{M-1} a_i\Phi_i$, então para todo $j \in \{1, ..., M-1\}$, temos

$$\sum_{i=1}^{M-1} a_i a(\Phi_i, \Phi_j) = (f, \Phi_j).$$

Como $a(\Phi_i, \Phi_j) = a(\Phi_j, \Phi_i)$, como podemos facilmente ver em (3.3.2), concluímos que $(a_1, ..., a_{M-1})$ deve ser solução do sistema linear abaixo

$$\begin{pmatrix} a(\Phi_1, \Phi_1) & ... & a(\Phi_1, \Phi_{M-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\Phi_{M-1}, \Phi_1) & \dots & a(\Phi_{M-1}, \Phi_{M-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \Phi_1) \\ \vdots \\ (f, \Phi_{M-1}) \end{pmatrix}.$$

Para mostrar que o sistema acima tem solução única, basta mostrar que a matriz $(a(\Phi_i, \Phi_j))_{ij}$ é inversível. Suponha que $(a_1, ..., a_{M-1})$ seja tal que

$$\sum_{i=1}^{M-1} a_i a(\Phi_i, \Phi_j) = 0. \tag{3.3.6}$$

Logo multiplicando por a_j e somando os termos j, temos

$$\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{M-1} a_i a_j a(\Phi_i, \Phi_j) = 0 \implies a(\sum_{i=1}^{M-1} a_i \Phi_i, \sum_{j=1}^{M-1} a_j \Phi_j) = 0. \tag{3.3.7}$$

Pela Proposição (123), concluímos que $u = 0$. Assim, (3.3.7) implica que $\sum_{i=1}^{M-1} a_i \Phi_i = 0$. Como $\{\Phi_j : j \in \{1, ..., M-1\}\}$ é um conjunto linearmente independente, concluímos que $a_j = 0$ para todo j. Assim, o problema (3.3.6) tem como única solução a solução nula. Portanto, a matriz $(a(\Phi_i, \Phi_j))_{ij}$ é inversível e existe uma única solução u_h do Problema (125).

Agora vamos mostrar em que sentido u_h se aproxima de u quando $h \to 0$. Para isto, vamos começar definindo $I_h : H_0^1(I) \to S_h$ pela seguinte expressão

$$I_h(v) = \sum_{j=1}^{M-1} v(x_j)\Phi_j.$$

Para o próximo lema, usaremos que, pela desigualdade de Schwarz, para todo $f \in L^2(a, b)$, vale

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right|^2 &\leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^2 \leq \left(\sqrt{\int_a^b 1^2 dx}\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}\right)^2 \\ &= (b-a)\int_a^b |f(x)|^2\, dx.\end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 126. *Para cada $j \in \{1, ..., M-1\}$, existe uma constante $C_j > 0$ tal que*

$$\|(I_h v - v)'\|_{L^2(K_j)} \leq h\|v''\|_{L^2(K_j)},$$

para todo $v \in H^2(0, 1)$.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente, observamos que para cada $x \in K_j$, a função $I_h v$ é dada por

$$I_h v(x) = v(x_{j-1}) + \frac{x - x_{j-1}}{h}(v(x_j) - v(x_{j-1})).$$

Logo

$$\frac{d}{dx} I_h v(x) = h^{-1}(v(x_j) - v(x_{j-1})) = h^{-1}\int_{K_j} v'(y)dy.$$

Como $h^{-1}\int_{K_j} dy = 1$, concluímos que

$$\begin{aligned}(I_h v - v)'(x) &= h^{-1}\int_{K_j} v'(y)dy - \left(h^{-1}\int_{K_j} dy\right) v'(x) \\ &= h^{-1}\int_{K_j} (v'(y) - v'(x))dy = h^{-1}\int_{K_j}\left(\int_x^y v''(z)dz\right) dy.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{K_j} |(I_h v - v)'(x)|^2 dx = h^{-2} \int_{K_j} \left| \int_{K_j} \left(\int_x^y v''(z) dz \right) dy \right|^2 dx$$
$$= h^{-2} \int_{K_j} h \left(\int_{K_j} \left| \int_x^y v''(z) dz \right|^2 dy \right) dx \leq h^{-1} \int_{K_j} \int_{K_j} |y - x| \int_x^y |v''(z)|^2 \, dz dy dx$$
$$\leq h^{-1} \left(\int_{K_j} \int_{K_j} |y - x| dy dx \right) \left(\int_{K_j} |v''(z)|^2 \, dz \right) \leq h^{-1} \left(\int_{K_j} \int_{K_j} h dy dx \right) \left(\int_{K_j} |v''(z)|^2 \, dz \right)$$
$$\leq h^2 \left(\int_{K_j} |v''(z)|^2 \, dz \right).$$

Isto encerra a demonstração. □

Corolário 127. *Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $v \in H^2(I)$, temos*

$$\|(I_h v - v)'\|_{L^2(0,1)} \leq h \|v''\|_{L^2(0,1)}.$$

Demonstração. Basta escrever a integral como soma de integrais em intervalos menores. Assim,

$$\|(I_h v - v)'\|^2_{L^2(I)} = \int_0^1 |(I_h v - v)'(x)|^2 dx = \sum_{j=0}^{M-1} \int_{K_j} |(I_h v - v)'(x)|^2 dx$$
$$\leq h^2 \sum_{j=0}^{M-1} \int_{K_j} |v''(x)|^2 dx = h^2 \int_0^1 |v''(x)|^2 dx = h^2 \|v''\|^2_{L^2(0,1)}.$$

□

Proposição 128. *Dado $f \in L^2(0,1)$, sejam $u \in H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$ e $u_h \in H^1_0(0,1)$ as únicas funções tais que*

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^1_0(0,1),$$
$$a(u_h, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h. \tag{3.3.8}$$

Logo $\|u - u_h\|_a = \min_{\chi \in S_h} \|\chi - u\|_a$.

Demonstração. Usando $\varphi = \chi \in S_h$ e subtraindo as equações (3.3.8), vemos que

$$a(u - u_h, \chi) = 0, \quad \forall \chi \in S_h. \tag{3.3.9}$$

Assim,

$$\|u - u_h\|^2_a = a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - \chi + \chi - u_h)$$
$$= a(u - u_h, u - \chi) + a(u - u_h, \chi - u_h)$$
$$\overset{(1)}{=} a(u - u_h, u - \chi) \overset{(2)}{\leq} \|u - u_h\|_a \|u - \chi\|_a.$$

Em (1) usamos que $\chi - u_h \in S_h$ e (3.3.9). Em (2) usamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz.

Concluímos que

$$\|u - u_h\|_a \leq \|u - \chi\|_a,$$

para todo $\chi \in S_h$. Portanto $\|u - u_h\|_a = \min_{\chi \in S_h} \|u - \chi\|_a$. □

Estamos finalmente em condições de provar as estimativas de erro para a nossa aproximação.

Lema 129. *Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $u \in H^1_0(0,1)$, temos*

$$\frac{1}{C} \|u'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_a \leq C \|u'\|_{L^2(0,1)}.$$

Demonstração. Basta observar que

$$\|u'\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 u'(x)^2 dx \leq \frac{1}{a_0}\int_0^1 a(x)u'(x)^2 dx$$
$$\leq \frac{1}{a_0}\int_0^1 \left(a(x)u'(x)^2 + c(x)u(x)^2\right) dx \leq \frac{1}{a_0}\|u\|_a^2$$

e que

$$\|u\|_a^2 = \int_0^1 \left(a(x)u'(x)^2 + c(x)u(x)^2\right) dx$$
$$\leq \|a\|_{L^\infty(0,1)}\|u'\|^2_{L^2(0,1)} + \|c\|_{L^\infty(0,1)}\|u\|^2_{L^2(0,1)} \leq C\|u'\|^2_{L^2(0,1)},$$

em que usamos a desigualdade de Poincaré, Proposição 116, na última desigualdade. □

Teorema 130. *Dado $f \in L^2(0,1)$, sejam $u \in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$ e $u_h \in H_0^1(0,1)$ as únicas funções tais que*

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) &= (f,\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(0,1), \\ a(u_h,\chi) &= (f,\chi), \quad \forall \chi \in S_h. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Logo existe $C > 0$ independente de S_h tal que

1. $\|u' - u_h'\|_{L^2(0,1)} \leq Ch\|u''\|_{L^2(0,1)}$.
2. $\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2\|u''\|_{L^2(0,1)}$.

Concluímos, pelas desigualdades acima que u_h converge para u tanto em $L^2(0,1)$ como em $H^1(0,1)$. A convergência em $L^2(0,1)$ é mais rápida (de ordem $O(h^2)$) do que a convergência das derivadas (de ordem $O(h)$). Não temos convergência em $H^2(0,1)$, já que as funções u_h sequer pertencem a este espaço.

Demonstração. 1. Segue de 129, vemos que

$$\|u' - u_h'\|_{L^2(0,1)} \overset{(1)}{\leq} C\|u-u_h\|_a \overset{(2)}{=} C\min_{\chi\in S_h}\|u-\chi\|_a \overset{(3)}{\leq} C\|u - I_h u\|_a$$
$$\overset{(4)}{\leq} C\|(u-I_h u)'\|_{L^2(0,1)} \overset{(5)}{\leq} Ch\|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

Em que usamos o Lema 129 em (1), a Proposição 128 em (2), o fato de que $I_h u \in S_h$ em (3), o Lema 129 em (4) e o Corolário 127 em (5).

2. Consideremos $A : H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1) \to L^2(0,1)$ o operador associado a forma $a : H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ definida em (3.3.2). Seja $\phi \in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$ tal que $A\phi = u - u_h$, em que $Au = -(au')' + cu$. Assim, ϕ também é solução de

$$a(\phi,\varphi) = (u-u_h,\varphi), \quad \forall\varphi\in H_0^1(0,1) \tag{3.3.11}$$

e, como A é uma bijeção contínua com inversa contínua, ϕ satisfaz

$$\|\phi\|_{H^2(0,1)} = \|A^{-1}A\phi\|_{H^2(0,1)} \leq C\|A\phi\|_{L^2(0,1)} = C\|u-u_h\|_{L^2(0,1)}. \tag{3.3.12}$$

Desta forma, temos

$$\|u-u_h\|^2_{L^2(0,1)} = (u-u_h,u-u_h) \overset{(1)}{=} a(\phi,u-u_h) = a(\phi - I_h\phi + I_h\phi, u-u_h)$$
$$= a(\phi - I_h\phi, u-u_h) + a(I_h\phi, u-u_h) \overset{(2)}{=} a(\phi - I_h\phi, u-u_h)$$
$$\leq \|\phi - I_h\phi\|_a\|u-u_h\|_a \overset{(3)}{\leq} C\|(\phi-I_h\phi)'\|_{L^2(0,1)}\|(u-u_h)'\|_{L^2(0,1)}$$
$$\overset{(4)}{\leq} Ch^2\|\phi\|_{H^2(0,1)}\|u''\|_{L^2(0,1)} \overset{(5)}{\leq} Ch^2\|u-u_h\|_{L^2(0,1)}\|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

Em (1), colocamos $\varphi = u - u_h$ em (3.3.11). Em (2), usamos que $u - u_h \in S_h$, a simetria de a e a relação (3.3.9). Em (3), usamos o Lema 129. Em (4), usamos Corolário 127 e o resultado do item 1. Por fim, em (5), usamos (3.3.12). □

CAPíTULO 4

Espaços de Sobolev e problemas de contorno em dimensão $n \geq 2$

Vamos agora generalizar os resultados do capítulo anterior para dimensões maiores ou iguais a dois. Para tanto, será útil fixar algumas notações.

Vamos começar com a notação de multi-índice. Um multi-índice é um elemento $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, em que $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$. Denotamos $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Dado uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^k, definimos para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$, a derivada $\partial_x^\alpha f$ por

$$\partial_x^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}(x).$$

Por exemplo, se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\alpha = (1, 2)$, então

$$\partial_x^\alpha f(x_1, x_2) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(x).$$

A notação de multi-índice também é útil para definir polinômios. Dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, definimos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}.$$

Novamente, se $\alpha = (1, 2)$, então $x^\alpha = x_1 x_2^2$.

Além da notação de multi-índice, é importante definir algumas classes de funções. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $m \in \mathbb{N}_0$. Lembramos que $f \in C^m(\Omega)$ se, e somente se, todas as derivadas $\partial_x^\alpha f : \Omega \to \mathbb{R}$ existem e são contínuas para $|\alpha| \leq m$.

Vamos usar nas seções seguintes a notação $C^m(\overline{\Omega})$ para denotar o subconjunto de $C^m(\Omega)$ das funções f tais que, para todo $|\alpha| \leq m$, a função $\partial_x^\alpha f$ admite uma única extensão contínua em $\overline{\Omega}$, que continuaremos denotando por $\partial_x f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$.

Desta maneira, dado $f \in C^m(\overline{\Omega})$, poderemos definir $\partial_x^\alpha f(x)$ para $|\alpha| \leq m$ e $x \in \partial\Omega$: é simplesmente o valor da extensão contínua de $\partial_x f$ no ponto $x \in \partial\Omega$.

Para estudar resultados sobre as funções definidas no capítulo, será importante usar as notações de bolas para $x \in \mathbb{R}^n$ e $r \in]0, \infty[$ dadas por

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\},$$
$$\overline{B(x, r)} := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\},$$
$$\partial B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}.$$

Também é importante definir a noção de distância entre dois conjuntos. Se A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, então definimos

$$d(A, B) = \inf\{\|x - y\|_{\mathbb{R}^n} : x \in A, y \in B\}.$$

Note que $d(A, B) = d(B, A)$. Da mesma forma, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, então definimos

$$d(x, A) = d(\{x\}, A) = \inf\{\|x - y\|_{\mathbb{R}^n} : y \in A\}.$$

Lembramos dos cursos de análise em $\mathbb{R}^n$ que se A é fechado, B é compacto e $A \cap B = \emptyset$, então $d(A, B) > 0$. Em particular, se $x \in \mathbb{R}^n$, A é fechado e $x \notin A$, então $d(x, A) > 0$. Além disso, se A é fechado de $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$, então existe $a \in A$ tal que $\|x - a\| = d(x, A)$.

4.1. Teoremas de aproximação em $L^2(\Omega)$

Vamos começar com alguns resultados preparatórios. Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o objetivo desta seção será provar que as funções $C_c^\infty(\Omega)$ são densas em $L^2(\Omega)$ (admitiremos, no entanto, que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$). As técnicas usadas aqui serão também utilizadas para o estudo de aproximação de funções em espaços de Sobolev definidos em abertos de $\mathbb{R}^n$, como veremos mais adiante.

Usaremos alguns resultados de medida e integração. O leitor não precisa se preocupar em buscar as demonstrações desses fatos. Neste curso, apenas aceitaremos os resultados e aplicaremos.

4.1.1. Aproximação da identidade (mollifiers) e aplicações. Começaremos com um lema de cálculo.

Lema 131. *Para todo $j \in \mathbb{N}_0$, existe um polinômio $P_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{d^j}{dt^j} e^{-1/t} = P_j(\frac{1}{t})e^{-1/t}$, para todo $t > 0$.*

Demonstração. Para $j = 0$, basta tomar $P_0(t) = 1$.

Vamos agora provar por indução. Suponha que o resultado seja válido para um certo j. Logo

$$\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}} e^{-1/t} = \frac{d}{dt}(P_j(\frac{1}{t})e^{-1/t}) = \left(-\frac{1}{t^2}P_j'(\frac{1}{t}) + \frac{1}{t^2}P_j(\frac{1}{t})\right) e^{-1/t}.$$

Definindo $P_{j+1}(x) = -x^2 P_j'(x) + x^2 P_j(x)$, concluímos a demonstração. □

Lema 132. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

é uma função C^∞.

Demonstração. Como a função exponencial e a função $t \in]0, \infty[\to 1/t \in]0, \infty[$ são C^∞, então a função f é C^∞ em $]0, \infty[$ e em $] - \infty, 0[$. Assim, basta mostrar que a função f tem derivadas em 0 de qualquer ordem.

Mostraremos por indução que $\frac{d^j f}{dt^j}(0) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Sabemos que isto é verdade para $j = 0$.

Suponha que $\frac{d^j f}{dt^j}(0) = 0$ para algum $j \in \mathbb{N}_0$. Então

$$\frac{d^{j+1} f}{dt^{j+1}}(0)^- = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{d^j f}{dt^j}(h) - 0}{h} = 0,$$

pois $\frac{d^j f}{dt^j}(h) = 0$, se $h < 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d^{j+1} f}{dt^{j+1}}(0)^+ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{d^j f}{dt^j}(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{P_j(\frac{1}{h})e^{-\frac{1}{h}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} P_j(\frac{1}{h}) e^{-\frac{1}{h}} = \lim_{x \to \infty} x P_j(x) e^{-x} = 0. \end{aligned}$$

Concluímos que $\frac{d^{j+1} f}{dt^{j+1}}(0) = 0$. Isto encerra a demonstração. □

Corolário 133. *Seja $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida como*

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \ge 0 \end{cases},$$

em que

$$c = \int_{B(0,1)} e^{-\frac{1}{1-\|y\|^2}} dy \quad e \quad \|x\|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2.$$

Então ρ é de classe C^∞.

Demonstração. Basta observar que $\rho = \frac{1}{c} f(1 - \|x\|^2)$, em que f é a função do Lema 132. □

Definição 134. Para cada $j \in \mathbb{N}$, definimos $\rho_j(x) = j^n \rho(jx)$. Esta sequência também é chamada de *aproximação da unidade*.

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} j^n \rho(jx)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)dy = \frac{1}{c}\int_{B(0,1)} e^{-\frac{1}{1-\|y\|^2}}dy = 1,$$

em que usamos a mudança de variável $y = j^n x$ e a definição da função ρ.

Para aproximar funções, nossa principal ferramenta será a convolução de funções.

Definição 135. Sejam $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos a *convolução de f e g* como a função $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Observe que como

$$f * g(x) = (f(x - \cdot), g(\cdot))_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

ou seja, é produto interno das funções $y \mapsto f(x-y)$ e $y \mapsto g(y)$. Portanto, $f * g$ está bem definida para todo ponto.

Algumas propriedades algébricas da convolução saem diretamente da definição, como veremos a seguir.

Proposição 136. *Sejam $f, g, h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo*
i. $f * g = g * f$.
ii. $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha f * h + \beta g * h$.
iii. $h * (\alpha f + \beta g) = \alpha h * f + \beta h * g$.

Demonstração. i. Segue de

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tilde{y})g(x-\tilde{y})d\tilde{y} \\ &\overset{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy = g * f(x). \end{aligned}$$

Em (1) usamos a mudança de coordenada $\tilde{y} = x - y$. Em (2), mudamos o nome da coordenada de integração de $\tilde{y}$ para y e usamos a propriedade comutativa da multiplicação.

ii. Segue da linearidade da integral, pois

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f(x-y) + \beta g(x-y))h(y)dy \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h(y)dy + \beta \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)h(y)dy = \alpha f * h(x) = \beta g * h(x). \end{aligned}$$

ii. É uma consequência de i e ii, pois

$$h * (\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g) * h = \alpha f * h + \beta g * h = \alpha h * f + \beta h * g.$$

□

Podemos também estimar o suporte da convolução de maneira simples.

Proposição 137. *Seja $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Suponha que existam compactos K_1 e K_2 tais que $f(x) = 0$ se $x \notin K_1$ e $g(x) = 0$ se $x \notin K_2$. Logo $f * g(x) = 0$ se $x \notin K_1 + K_2 = \{x + y : x \in K_1, y \in K_2\}$.*

Demonstração. Sabemos que se $f(x-y)g(y) \neq 0$, então $f(x-y) \neq 0$ e $g(y) \neq 0$. Logo $y \in K_2$ e $x - y \in K_1$. Seja $k_1 = x - y \in K_1$. Logo $x = k_1 + y \in K_1 + K_2$. Assim, se $x \notin K_1 + K_2$, então $f(x-y)g(y) = 0$. Portanto, se $x \notin K_1 + K_2$, temos

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = 0.$$

□

Uma das principais propriedades da convolução é permitir que se passe a derivação para dentro da integral, como veremos a seguir.

PROPOSIÇÃO 138. *Sejam $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Logo $\varphi * f \in C^1(\mathbb{R})$ e, para todo $j \in \{1, ..., n\}$, temos*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * f)(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} * f(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$ vetores que formam a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $h \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que para todo $j \in \{1, ..., n\}$, vale

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi * f(x + he_j) - \varphi * f(x)}{h} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} * f(x).$$

Primeiro observamos que existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(y) = 0$ para $y \notin K$. Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$ fixos, vemos que $x + he_j - y \in K$ se, e somente se, $y \in K_{x,h} := \{x + he_j - w : w \in K\}$. Por fim, observamos que $K_x := \cup_{|h| \le 1} K_{x,h}$ é um compacto. De fato, definindo $\psi : K \times [-h, h] \to \mathbb{R}^n$ por $\psi(w, h) = x + he_j - w$, vemos facilmente que ψ é contínua, pois é composição de somas e multiplicações. Como $K \times [-h, h]$ é compacto e a imagem de um compacto por uma função contínua é um compacto, concluímos que $K_{x,h}$ é um compacto, já que é igual a imagem de ψ.

Usando estes fatos, concluímos que para $|h| \le 1$, temos

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\varphi * f(x + he_j) - \varphi * f(x)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} * f(x) \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\varphi(x + he_j - y) - \varphi(x - y)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x - y) \right| |f(y)| dy \\
&\le \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\varphi(x + he_j - y) - \varphi(x - y)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x - y) \right|^2 dy} \sqrt{\int |f(y)|^2 dy} \\
&\overset{(1)}{\le} \sqrt{\int_{K_x} \left| \frac{\varphi(x + he_j - y) - \varphi(x - y)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x - y) \right|^2 dy} \sqrt{\int |f(y)|^2 dy} \\
&\le \sup_{y \in K_x} \left| \frac{\varphi(x + he_j - y) - \varphi(x - y)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x - y) \right| \sqrt{\int_{K_x} 1 dy} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

em (1), estamos usando que $\varphi(x - y) = 0$ se $x - y \notin K$, e $\varphi(x + he_j - y) = 0$ se $x + he_j - y \notin K$. Isto ocorre se $y \notin K_x$.

Por fim, observamos que

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\varphi(x + he_j - y) - \varphi(x - y)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x - y) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \varphi(x + \theta h e_j - y) d\theta - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x - y) \right| \\
&\le \int_0^1 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x + \theta h e_j - y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x - y) \right| d\theta.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\sup_{y \in K_x} \left| \frac{\varphi(x + he_j - y) - \varphi(x - y)}{h} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x - y) \right| \\
&\le \sup_{y \in K_x} \sup_{|\theta| \le 1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x + \theta h e_j - y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x - y) \right|.
\end{aligned}$$

Como o conjunto $K_x \times [-1, 1]$ é compacto e a função $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ é contínua, e, portanto, uniformemente contínua em compactos, concluímos que o limite acima vai a zero quando $h \to 0$. □

Uma consequência da Proposição 138 é dada pelo corolário seguinte.

COROLÁRIO 139. *Seja* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Logo* $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\partial_x^\alpha(\varphi * f) = \partial_x^\alpha \varphi * f,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue por indução usando a Proposição 138. $\square$

Mostraremos agora algumas aplicações da convolução que usaremos bastante nas próximas seções.

PROPOSIÇÃO 140. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $K \subset \mathbb{R}^n$ *um compacto contido em* Ω. *Logo existe uma função* $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ *tal que* $0 \leq \chi \leq 1$ *e* $\chi(x) = 1$ *para todo* x *num aberto* V *tal que* $K \subset V$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $d = d(K, \Omega^c)$. Como K é compacto, Ω^c é fechado e $K \cap \Omega^c = \emptyset$, então $d(K, \Omega^c) > 0$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{4}{n} < d(K, \Omega^c)$.

Consideremos os conjuntos

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) < \frac{1}{n}\},$$
$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq \frac{2}{n}\},$$
$$K_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq \frac{3}{n}\}.$$

Seja $\chi_{K_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida como $\chi_{K_1}(x) = 1$, se $x \in K_1$, e $\chi_{K_1}(x) = 0$, se $x \notin K_1$. Consideremos $\chi = \rho_n * \chi_{K_1}$, ou seja,

$$\chi = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(x-y)\chi_{K_1}(y)dy = \int_{K_1} \rho_n(x-y)dy.$$

Pela definição acima, como $\rho_n \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_n = 1$, vemos que $0 \leq \chi \leq 1$. Além disso, $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, pelo Corolário 139.

Se $x \in V$, então

$$\chi(x) = \int_{K_1} \rho_n(x-y)dy \overset{(1)}{=} \int_{K_1 \cap B(x,1/n)} \rho_n(x-y)dy$$
$$\overset{(2)}{=} \int_{B(x,1/n)} \rho_n(x-y)dy \overset{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(x-y)dy = 1.$$

Em (1) e em (3) usamos que $y \mapsto \rho_n(x-y)$ se anula fora de $B(x, 1/n)$. Em (2) usamos que $B(x, 1/n) \subset K_1$. Isto pode ser provado da seguinte forma. Se $y \in B(x, 1/n)$, então $\|y - x\| < 1/n$. Como $x \in V$, existe $z \in K$ tal que $\|z - x\| < 1/n$. Assim,

$$d(y, K) \leq \|y - z\| \leq \|y - x\| + \|x - z\| < \frac{2}{n}.$$

Logo $d(y, K) < 2/n$ e $y \in K_1$.

Agora suponha que $x \notin K_2$. Logo

$$\chi(x) = \int_{K_1} \rho_n(x-y)dy = \int_{K_1 \cap B(x,1/n)} \rho_n(x-y)dy = 0,$$

pois $K_1 \cap B(x, 1/n) = \emptyset$. De fato, se $y \in B(x, 1/n) \cap K_1$, então $\|y - x\| < 1/n$ e $d(y, K) \leq \frac{2}{n}$. Como K é um compacto, existe $z \in K$ tal que $\|y - z\| = \frac{2}{n}$. Portanto,

$$d(x, K) \leq \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \frac{3}{n}.$$

Logo $x \in K_2$, o que é um absurdo. Concluímos que χ se anula fora de K_2 e, portanto, $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$. $\square$

Vamos terminar essa seção enunciando e provando um Teorema de Partição da unidade.

TEOREMA 141. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto e $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in\{1,...,N\}}$ uma coleção de abertos de $\mathbb{R}^n$ tais que $K \subset \cup_{j=1}^N U_j$. Logo existem funções $\chi_j \in C_c^\infty(U_j)$, $j \in \{1,...,N\}$, tais que $\sum_{j=1}^N \chi_j(x) = 1$ para todo $x \in K$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $x \in K$, escolhemos $j \in \{1,...,N\}$ tal que $x \in U_j$. Consideremos $r_x > 0$ tal que $\overline{B(x,r_x)} \subset U_j$. Sabemos que $K \subset \cup_{x\in K} B(x, r_x/2)$. Como K é um compacto, podemos achar $x_1, ..., x_m$ em K tais que $K \subset \cup_{j=1}^m B(x_j, r_{x_j}/2)$.

Sejam $\phi_j \in C_c^\infty(B(x_j, r_{x_j}))$ tais que $\phi_j(x) = 1$ para $x \in B(x_j, r_{x_j}/2)$. Assim, basta definir

$$\begin{aligned}
&\psi_1 = \phi_1\\
&\psi_2 = \phi_2(1-\phi_1)\\
&\psi_3 = \phi_3(1-\phi_1)(1-\phi_2)\\
&\quad\vdots\\
&\psi_j = \phi_j \prod_{i=1}^{j-1}(1-\phi_i).
\end{aligned}$$

Observamos que

$$\psi_1 + \psi_2 = \phi_1 + (1-\phi_1)\phi_2 = 1 - (1-\phi_1) + \phi_2(1-\phi_1) = 1 - (1-\phi_2)(1-\phi_1).$$

Por indução, podemos provar que

$$\sum_{j=1}^k \psi_j = 1 - \prod_{i=1}^k (1-\phi_i).$$

De fato, se $\sum_{j=1}^{k-1} \psi_j = 1 - \prod_{i=1}^{k-1}(1-\phi_i)$, então

$$\sum_{j=1}^k \psi_j = \phi_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-\phi_i) + 1 - \prod_{i=1}^{k-1}(1-\phi_i) = 1 + \prod_{i=1}^{k}(1-\phi_i).$$

Assim, se $x \in K$, temos que $x \in B(x_j, r_{x_j}/2)$ para algum $j \in \{1,...,m\}$. Logo $1 - \phi_j(x) = 0$. Portanto,

$$\sum_{j=1}^k \psi_j(x) = 1 - \prod_{i=1}^k (1-\phi_i(x)) = 1 - 0 = 1.$$

Por fim, as funções χ_j podem ser definidas da seguinte forma: χ_1 é a soma de todos os ϕ_i com suporte em U_1. χ_2 é a soma de todos os ϕ_i que sobraram e que têm suporte em U_2. A função χ_3 é a soma de todos os ϕ_i que não aparecem nem em χ_1 nem em χ_2 e que têm suporte em U_3, e assim por diante. Note que estamos adimitindo que alguns χ_j possam ser iguais a zero, caso não tenha sobrado nenhum ϕ_i com suporte em U_j. □

4.1.2. Aplicações de Mollifiers e suas consequências para aproximações de funções em $L^2(\Omega)$. Estamos agora em condições de provar teoremas de aproximação para funções definidas em abertos Ω de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIÇÃO 142. *Seja $u \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Logo existe uma sequência de funções $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

1) Existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $u(x) = 0$ e $u_j(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e $j \in \mathbb{N}$.

2) $\lim_{j\to\infty} \|u - u_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Lembramos que $\|u - u_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x) - u_j(x)|$, pois u e u_j são contínuas.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos definir $u_j := \rho_j * u$, para $j \in \mathbb{N}$, em que ρ_j são as funções da Definição 134.

Afirmação 1: Existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $u(x) = u_j(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e $j \in \mathbb{N}$.

Como $u \in C_c(\mathbb{R}^n)$, existe um compacto $K_u \subset \mathbb{R}^n$ tal que $u(x) = 0$ se $x \notin K_u$. Como $\rho_j(x) = 0$ para $x \notin B(0,1)$ e para todo $j \in \mathbb{N}$, então $u_j(x) = 0$ se $x \notin K_u + B(0,1)$. Como K_u e $B(0,1)$ são limitados, então $K_u + B(0,1)$ também é limitado. Assim, basta escolher $K := \overline{K_u + B(0,1)}$ e concluímos que K é compacto, pois é fechado e limitado, e $u(x) = u_j(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e $j \in \mathbb{N}$.

Afirmação 2: $\lim_{j\to\infty} \|u - u_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Basta observar que

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_j(x)| &= \left| u(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)u(y)dy \right| \\
&\overset{(1)}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)u(x)dy - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)u(y)dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)(u(x)-u(y))dy \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)|u(x)-u(y)|dy \\
&\overset{(2)}{=} \sup_{y \in B(x,\frac{1}{j})} |u(x)-u(y)|,
\end{aligned}$$

em que usamos em (1) e em (2) que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(y)dy = 1$.

Como u é contínua a tem suporte compacto, então u é uniformemente contínua. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $|y_1 - y_2| < \delta$, então $|u(y_1) - u(y_2)| < \varepsilon$.

Consideremos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \delta$. Assim, se $j > N$, temos que $\frac{1}{j} < \frac{1}{N} < \delta$. Portanto,

$$|u(x) - u_j(x)| \le \sup_{y \in B(x,\frac{1}{j})} |u(x)-u(y)| < \varepsilon.$$

Como isto vale para todo $x \in \mathbb{R}^n$, concluímos que $\|u_j - u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ para todo $j > N$. Isto mostra que o limite da afirmação 2 é válido. □

PROPOSIÇÃO 143. *Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo existe uma sequência de funções $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

1) $\|u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

2) $\lim_{j\to\infty} \|u - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos definir $u_j := \rho_j * u$, para $j \in \mathbb{N}$.

Afirmação 1: $\|u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Basta observar que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u_j(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} | \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)u(y)dy|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho_j(x-y)^{\frac{1}{2}} \rho_j(x-y)^{\frac{1}{2}} u(y)| dy \right)^2 dx \\
&\overset{(1)}{\le} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)|u(y)|^2 dy \right) dx \\
&\overset{(2)}{\le} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)|u(y)|^2 dy \right) dx \\
&\overset{(3)}{\le} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)dx \right) |u(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^2 dy.
\end{aligned}$$

Em (1) usamos Cauchy-Schwartz, isto é, $(\int fg)^2 \le \int f^2 \int g^2$. Em (2), usamos que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(y)dy = 1$. Em (3) usamos Fubini, isto é, trocamos a ordem de integração.

Afirmação 2: $\lim_{j\to\infty} \|u - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Já vimos que as funções $C_c(\mathbb{R}^n)$ são densas em $L^2(\mathbb{R}^n)$ (não provamos este resultado. É um resultado de medida e integração). Logo, dado $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$, existe $v \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pela Proposição 142, podemos encontrar uma sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $v_j(x) = v(x) = 0$ se $x \notin K$ e $j \in \mathbb{N}$, e tal que

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que se $j > N$, então

$$\|v_j - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\int_K 1dx}}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\|v_j - v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |v_j(x) - v(x)|^2 dx = \int_K |v_j(x) - v(x)|^2 dx\\ &\le \|v_j - v\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_K 1dx \le \frac{\varepsilon^2}{4}.\end{aligned}$$

Concluímos que se $j > N$, então

$$\begin{aligned}\|u - v_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\le \|u - v + v - v_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &\le \|u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|v - v_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Dado agora qulquer aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para aproximar uma função $u \in L^2(\Omega)$ por uma função C^∞ com suporte compacto, precisamos primeiro escrever Ω como uma união adequada de compactos.

Proposição 144. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Logo existem conjuntos K_j, $j \in \mathbb{N}$, com a seguinte propriedade:*
i. K_j são compactos e contidos em Ω.
ii. $\cup_{j=1}^\infty K_j = \Omega$.
iii. K_j está contido no interior de K_{j+1}.

Demonstração. Vamos definir os seguintes conjuntos

$$K_j = \{x \in \Omega \cap \overline{B(0,j)} : d(x, \Omega^c) \ge 1/j\}.$$

Afirmação 1: Os conjuntos K_j são compactos e contidos em Ω.

Observe que cada K_j é limitado e fechado, pois K_j é intersecção de dois conjuntos fechados, já que

$$K_j = \overline{B(0,j)} \cap \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) \ge 1/j\}.$$

Assim, K_j é compacto e, pela definição, está contido em Ω.

Afirmação 2: $\cup_{j=1}^\infty K_j = \Omega$.

Seja $x \in \Omega$. Logo $d(x, \Omega^c) > 0$, pois Ω^c é um fechado. Basta então achar $J \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{J} < d(x, \Omega^c)$ e $\|x\| \le J$. Assim, veremos que $x \in K_J$.

Afirmação 3: K_j está contido no interior de K_{j+1}.

Note que o conjunto

$$V_{j+1} = \{x \in \Omega \cap B(0, j+1) : d(x, \Omega^c) > \frac{1}{j+1}\}$$

é um aberto, pois é intersecção de dois abertos, já que

$$V_{j+1} = B(0, j+1) \cap \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) > \frac{1}{j+1}\}.$$

Além disso, pela sua definição é claro que $K_j \subset V_{j+1} \subset K_{j+1}$. Como o interior de K_{j+1} é o maior aberto contido em K_{j+1}, concluímos que V_j está contido no interior de K_{j+1} e, portanto, K_j está contido no interior de K_{j+1}. $\square$

COROLÁRIO 145. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $K \subset \Omega$ um compacto. Logo existe um aberto $V \subset \Omega$ tal que $K \subset V$ e $\overline{V} \subset \Omega$ é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos denotar por $\overset{\circ}{K}_j$ o interior de K_j. Como $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1} \subset K_{j+1}$, vemos que $\cup_{j=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_{j+1} = \Omega$. Assim,

$$K \subset \cup_{j=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_j.$$

Como K é compacto, existe uma subcobertura finita tal que

$$K \subset \overset{\circ}{K}_{j_1} \cup \overset{\circ}{K}_{j_2} \cup ... \cup \overset{\circ}{K}_{j_N}.$$

Seja $J = \max\{j_1, ..., j_N\}$ e $V = \overset{\circ}{K}_J = \overset{\circ}{K}_{j_1} \cup \overset{\circ}{K}_{j_2} \cup ... \cup \overset{\circ}{K}_{j_N}$. Logo V tem todas as propriedades que queremos. $\square$

TEOREMA 146. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in L^2(\Omega)$. Logo existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tal que*

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de compactos com as propriedades da Proposição 144. Consideremos $\chi_j \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tal que $0 \le \chi_j \le 1$ e $\chi_j(x) = 1$ em K_j. Definamos também a função $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ por

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Seja $u_j = \chi_j \rho_j * \tilde{u}$. Logo $u_j \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} &= \|\chi_j\rho_j * \tilde{u} - \chi_j\tilde{u} + \chi_j\tilde{u} - u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \|\chi_j(\rho_j * \tilde{u} - \tilde{u})\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi_j\tilde{u} - u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \|\rho_j * \tilde{u} - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi_j\tilde{u} - u\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos que $0 \le \chi \le 1$. Logo

$$\|\chi_j(\rho_j * \tilde{u} - \tilde{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_j(x)(\rho_j * \tilde{u} - \tilde{u})(x)|^2 dx$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} |\rho_j * \tilde{u}(x) - \tilde{u}(x)|^2 dx \le \|\rho_j * \tilde{u} - \tilde{u}\|_{L(\mathbb{R}^n)}.$$

Já provamos na Proposição 143 que

$$\lim_{j\to\infty} \|\rho_j * \tilde{u} - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Agora basta observar que

$$\|\chi_j\tilde{u} - u\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |(\chi_j(x) - 1)|^2 |u(x)|^2 dx$$

converge a zero quando $j \to \infty$. Isto segue do Teorema da convergência dominada, já que

$$\lim_{j\to\infty} |(\chi_j(x) - 1)|^2 |u(x)|^2 = 0,$$

$$|(\chi_j(x) - 1)|^2 |u(x)|^2 \le |u(x)|^2,$$

$$\text{e} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx < \infty.$$

$\square$

4.2. Espaço $H^1(\Omega)$

Começaremos agora o estudo de espaços de Sobolev em abertos de $\mathbb{R}^n$. Nosso objetivo é demonstrar as principais propriedades do espaço $H^1(\Omega)$ com detalhes e aplicá-las para a demonstração de existência e unicidade de soluções fracas de problemas de contorno.

Ao final, definiremos os espaços $H^m(\Omega)$, para $m \geq 1$, e apenas enunciaremos os principais resultados. Eles podem ser provados através de adaptações dos resultados provados para $H^1(\Omega)$.

Para motivar a definição da classe de funções $H^1(\Omega)$, começaremos com a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 147. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $f \in C^1(\Omega)$ *e* $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. *Então*

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\varphi(x)dx,$$

para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

DEMONSTRAÇÃO. Apenas para facilitar a notação, provaremos somente para $j = n$. Usaremos também a notação $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Seja $K \subset \Omega$ um compacto tal que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ uma função que é igual a 1 num aberto que contenha K. Como tanto a função χf como a função $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ têm suporte compacto, podemos estendê-las a funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ fazendo com que elas sejam iguais a zero fora de Ω.

Seja $R > 0$ tal que as funções χf e φ se anulem fora de $[-R, R]^n = [-R, R] \times ... \times [-R, R]$, n vezes. Logo

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)dx = \int_\Omega \chi(x)f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)dx \\
&= \int_{[-R,R]^n} \chi(x)f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)dx = \int_{[-R,R]^{n-1}} \left(\int_{-R}^R \chi(x)f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)dx_n\right)dx' \\
&\overset{(1)}{=} \int_{[-R,R]^{n-1}} \left(\chi(x',R)f(x',R)\varphi(x',R) - \chi(x',-R)f(x',-R)\varphi(x',-R)\right)dx' \\
&\quad - \int_{[-R,R]^{n-1}} \int_{-R}^R \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\chi(x)f(x)\right)\varphi(x)dx_n\right)dx' \\
&= -\int_\Omega \left(\chi(x)\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \frac{\partial \chi}{\partial x_n}(x)f(x)\right)\varphi(x)dx \\
&\overset{(2)}{=} -\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\varphi(x)dx\right).
\end{aligned}$$

Em (1) usamos integração por partes em x_n e em (2) usamos que $\chi(x) = 1$ para x num aberto que contém o suporte de φ. $\square$

Baseando-se na Proposição 147, podemos definir derivadas fracas para funções $L^2(\Omega)$ de maneira muito parecido ao que fizemos em um intervalo em $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 148. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f \in L^2(\Omega)$. Dizemos que f *tem derivada fraca* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ para algum $j \in \{1, ..., n\}$ se existir uma função $g_j \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx = -\int_\Omega g_j(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Neste caso, denotamos g_j por $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

OBSERVAÇÃO 149. Neste curso, as derivadas fracas serão sempre funções em $L^2(\Omega)$. Em outras referências, outras classes de funções também são consideradas.

Exemplo 150. Seja $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$. Definamos a função $u : B(0,1) \to \mathbb{R}$ por $u(x) = \|x\|^{-\alpha}$. Se $\alpha < 1/2$, então $u \in H^1(B(0,1))$ e suas derivadas fracas são iguais a $\frac{\partial u}{\partial x_j} = -\frac{\alpha x_j}{\|x\|^{2+\alpha}}$, $j \in \{1,2,3\}$.

Inicialmente observamos que, usando coordenadas polares, temos

$$\int_{B(0,1)} u(x)^2 dx = 4\pi \int_0^1 r^{2-2\alpha} dr.$$

Logo $u \in L^2(B(0,1))$ já que $2 - 2\alpha > -1$, pois $\alpha < 1/2$.

Para calcular a derivada fraca, observamos que se $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$, então

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,1)} \|x\|^{-\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \|x\|^{-\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \nabla \cdot (\|x\|^{-\alpha}\varphi(x), 0, 0) dx - \int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_1}(\|x\|^{-\alpha})\varphi(x) dx \right) \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\int_{\partial B(0,\varepsilon)} (\|x\|^{-\alpha}\varphi(x), 0, 0) \cdot \frac{x}{\varepsilon} dS(x) + \alpha \int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{x_1}{\|x\|^{\alpha+2}} \varphi(x) dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{x_1}{\varepsilon^\alpha} \varphi(x) dS(x) + \alpha \int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{x_1}{\|x\|^{\alpha+2}} \varphi(x) dx \right)
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Em (1), usamos o teorema da divergência, o fato de que φ se anula em $\partial B(0,1)$ e que $-\frac{x}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3)$ é a normal que aponta para fora de $\partial B(0,\varepsilon)$.

Note que $|x_1| \leq \varepsilon$ se $x \in \partial B(0,\varepsilon)$. Logo

$$\left| -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{x_1}{\varepsilon^\alpha} \varphi(x) dS(x) \right| \leq \varepsilon^{-\alpha} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} dS(x) = 4\pi\varepsilon^{2-\alpha} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Como $-\alpha + 2 > 0$, pois $\alpha < 1/2$ concluímos que a integral acima converge para zero quando ε vai a zero. Por outro lado,

$$\int_{B(0,1)} \left| \frac{x_1}{\|x\|^{\alpha+2}} \varphi(x) \right| dx \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{B(0,1)} \|x\|^{-\alpha-1} dx = 4\pi \int_0^1 r^{2-\alpha-1} dr < \infty,$$

já que $2 - \alpha - 1 > 1/2 > -1$. Portanto,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{x_1}{\|x\|^{\alpha+2}} \varphi(x) dx = \int_{B(0,1)} \frac{x_1}{\|x\|^{\alpha+2}} \varphi(x) dx.$$

Desta forma, tomando o limite $\varepsilon \to 0$ em (4.2.1), concluímos que

$$\int_{B(0,1)} \|x\|^{-\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) dx = \alpha \int_{B(0,1)} \frac{x_1}{\|x\|^{\alpha+2}} \varphi(x) dx. \tag{4.2.2}$$

Observando que $|x_1| \leq \|x\|$, temos

$$\int_{B(0,1)} \left| \frac{x_1}{\|x\|^{\alpha+2}} \right|^2 dx \leq \int_{B(0,1)} \|x\|^{-2\alpha-2} dx = 4\pi \int_0^1 r^{-2\alpha-2} r^2 dr = 4\pi \int_0^1 r^{-2\alpha} dr < \infty,$$

pois $-2\alpha > -1$, já que $\alpha < 1/2$. Concluímos, assim, que $x \mapsto \alpha \frac{x_1}{\|x\|^{\alpha+2}} \in L^2(B(0,1))$. Por (4.2.2), concluímos que $\|x\|^{-\alpha}$ tem derivada fraca em x_1 e que $\frac{\partial}{\partial x_1}(\|x\|^{-\alpha}) = -\alpha \frac{x_1}{\|x\|^{\alpha+2}}$.

As demais derivadas podem ser calculadas da mesma maneira.

Vamos agora definir a classe $H^1(\Omega)$.

Definição 151. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. O *espaço de Sobolev* $H^1(\Omega)$ é o conjunto das funções $u \in L^2(\Omega)$ que possuem derivadas fracas $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

Um ponto crucial da teoria é o fato de que $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, como será provado a seguir.

PROPOSIÇÃO 152. *O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno*

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega uv dx + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos provar por partes.

Afirmação 1: O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço vetorial com produto interno.

Como $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, então basta mostrar que $H^1(\Omega)$ é um subespaço de $L^2(\Omega)$. Para tanto, devemos mostrar que se $u, v \in H^1(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha u + \beta v \in H^1(\Omega)$.

Como $L^2(\Omega)$ é um espaço vetorial, então $\alpha u + \beta v \in L^2(\Omega)$. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $j \in \{1, ..., n\}$. Então

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\alpha u(x) + \beta v(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx &= \alpha \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx + \beta \int_\Omega v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ &= -\alpha \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi(x) dx - \beta \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j}\varphi(x) dx = -\int_\Omega \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x_j} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) \varphi(x) dx.\end{aligned}$$

Assim, $\alpha u + \beta v$ tem derivada fraca e

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha u(x) + \beta v(x)) = \alpha \frac{\partial u}{\partial x_j} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Portanto, $\alpha u + \beta v \in H^1(\Omega)$. A verificação de que $(\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)}$ é um produto interno é simples. Lembramos que duas funções u e v são iguais em $L^2(\Omega)$ (ou de forma mais precisa, estão na mesma classe de equivalência) se

$$\int_\Omega |u - v|^2 dx = 0.$$

Afirmação 2: O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Suponha que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de Cauchy em $H^1(\Omega)$. Pela definição de produto interno, vemos que

$$\|u_j - u_k\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{l=1}^n \|\frac{\partial u_j}{\partial x_l} - \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u_j - u_k\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Assim, é fácil de concluir que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(\frac{\partial u_j}{\partial x_l})_{j\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $L^2(\Omega)$, para todo $l \in \{1, ..., n\}$. Como $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, então existem funções u e u_l, para todo $l \in \{1, ..., n\}$ tais que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ e $\lim_{j\to\infty} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} = u_l$ em $L^2(\Omega)$.

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então

$$(u_j, \frac{\partial \varphi}{\partial x_l})_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\varphi dx = -(\frac{\partial u_j}{\partial x_l}, \varphi)_{L^2(\Omega)}.$$

Tomando o limite $j \to \infty$, concluímos que

$$(u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_l})_{L^2(\Omega)} = -(u_l, \varphi)_{L^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} dx = -\int_\Omega u_l \varphi dx.$$

Isto implica que $u \in H^1(\Omega)$ e que $\frac{\partial u}{\partial x_l} = u_l$. □

4.2.1. Teoremas de aproximação e extensão em $H^1(\Omega)$.. O objetivo dessa seção é mostrar como podemos aproximar funções dos espaços de Sobolev por funções de classe C^∞ e como podemos estender essas funções de Ω a $\mathbb{R}^n$.

Primeiramente vamos estudar resultados que valem para abertos arbitrários. Logo em seguida, restringiremos nossa atenção aos abertos de classe C^1, para os quais os resultados de extensão também podem ser provados.

4.2.1.1. *Aproximações em abertos.* Nesta primeira seção, não assumiremos nenhum resultado de regularidade da fronteira de um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Inicialmente, provaremos um resultado de aproximação. Em seguida, aplicaremos resultado de aproximação no estudo da composição e mudanças de coordenadas com funções H^1.

TEOREMA 153. *(Aproximação sem hipótese de regularidade na fronteira) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in H^1(\Omega)$. Então existe uma sequência de funções (u_j) em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfazem as seguintes propriedades:*

i. $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

ii. $\lim_{j\to\infty} \|\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(U)} = 0$, *para qualquer $k \in \{1, ..., n\}$ e qualquer aberto $U \subset \Omega$ tal que $\overline{U}$ é um compacto em Ω.*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos os compactos

$$K_j = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{j}\} \cap \overline{B(0,j)}$$

como na Proposição (144).

Vimos na Proposição (140) que existem funções $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tais que $\phi_j(x) = 1$ para todo x contido num aberto que contém K_j.

Vamos definir uma função $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ por $\tilde{u}(x) = u(x)$ para $x \in \Omega$ e $\tilde{u}(x) = 0$ para $x \notin \Omega$. Usando as funções ρ_j da Definição (134), definimos $u_j = \phi_j(\rho_j * \tilde{u})$. Pela Proposição (146), sabemos que $u_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\lim_{j\to\infty} \|u_j - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$. Portanto, $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$ e o Item i está provado.

Agora consideremos um aberto $U \subset \Omega$ tal que $\overline{U}$ é compacto em Ω. Como $\overline{U}$ é compacto, $\partial\Omega$ é fechado e $\overline{U} \cap \partial\Omega = \emptyset$, então sabemos que $d(\overline{U}, \partial\Omega) > 0$. Além disso, $\overline{U}$ é limitado, por ser compacto. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n_0}$ e $\|x\| \leq n_0$ para todo $x \in \overline{U}$. Logo $\overline{U} \subset K_{n_0}$. Portanto, se $j > n_0$, temos

$$\phi_j(x)(\rho_j * \tilde{u})(x) = \rho_j * \tilde{u}(x), \quad \forall x \in U.$$

Assim, se $j > n_0$ e $x \in U$, então

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_j * \tilde{u})(x) = \frac{\partial \rho_j}{\partial x_k} * \tilde{u}(x) \overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(y) \frac{\partial \rho_j}{\partial x_k}(x-y)dy \\ &= \int_\Omega u(y) \frac{\partial \rho_j}{\partial x_k}(x-y)dy = -\int_\Omega u(y) \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\rho_j(x-y)\right) dy \overset{(2)}{=} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y_k}(y)\rho_j(x-y)dy. \end{aligned}$$

Em (1), usamos a Proposição (139). Em (2), usamos que se $x \in U$ e $j > n_0$, então $\text{supp}\rho_j(x - .) \subset x + \overline{B(0, \frac{1}{j})} \subset \Omega$, pois afinal $d(\overline{U}, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n_0}$. Logo $y \in \Omega \mapsto \rho_j(x-y) \in C_c^\infty(\Omega)$. Portanto, (2) segue da definição de derivada fraca em $L^2(\Omega)$.

Por fim, seja $\tilde{u}_k(x) = \frac{\partial u}{\partial y_k}(x)$, se $x \in \Omega$, e $\tilde{u}_k(x) = 0$, se $x \notin \Omega$. Assim, para $x \in U$ e $j > n_0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\phi_j(x)\rho_j * \tilde{u}(x)\right) &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho_j * \tilde{u}(x)\right) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y_k}(y)\rho_j(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_k(y)\rho_j(x-y)dy = \rho_j * \tilde{u}_k(x). \end{aligned}$$

Concluímos que

$$\begin{aligned} &\lim_{j\to\infty} \|\frac{\partial}{\partial x_k}\phi_j(\rho_j * \tilde{u}) - \frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(U)} = \lim_{j\to\infty} \|\rho_j * \tilde{u}_k - \tilde{u}_k\|_{L^2(U)} \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \|\rho_j * \tilde{u}_k - \tilde{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0. \end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos a Proposição (143). □

Vamos aplicar o Teorema (153) no estudo de composição de uma função C^1 por uma função H^1.

PROPOSIÇÃO 154. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $M > 0$ uma constante e $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que $f(0) = 0$ e $|f'(s)| \leq M$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Então $f \circ u \in H^1(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f \circ u)(x) = f' \circ u(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}(x), \quad \forall k \in \{1, ..., n\} \quad e \quad \forall x \in \Omega.$$

DEMONSTRAÇÃO. *Afirmação 1: As funções $f \circ u$ e $f' \circ u\frac{\partial u}{\partial x_k}$ pertencem a $L^2(\Omega)$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$.*

Note que $|f(t)| = |\int_0^t f'(s)ds| \leq \int_0^t |f'(s)|ds \leq Mt$. Assim,

$$\int_\Omega |f \circ u(x)|^2 dx \leq M^2 \int_\Omega |u(x)|^2 dx = M^2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo $f \circ u$ pertence a $L^2(\Omega)$.

Além disso, vemos que

$$\int_\Omega |f' \circ u(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)|^2 dx \leq M^2 \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)|^2 dx \leq M^2 \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Portanto, $f' \circ u\frac{\partial u}{\partial x_k}$ pertence a $L^2(\Omega)$.

Afirmação 2: A derivada fraca $\frac{\partial}{\partial x_k}(f \circ u)$ é igual a $f' \circ u\frac{\partial u}{\partial x_k}$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$.

Para demonstrar este fato, devemos mostrar que, para toda função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $k \in \{1, ..., n\}$, temos

$$\int_\Omega f \circ u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)dx = -\int_\Omega f' \circ u(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\varphi(x)dx. \tag{4.2.3}$$

Vamos então fixar uma função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ arbitrária e uma sequência (u_j) em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ como no Teorema (153). Por um resultado de medida e integração podemos, tomando uma subsequência se necessário, supor que $\lim_{j\to\infty} u_j(x) = u(x)$ (para quase todo $x \in \Omega$).

Inicialmente, observamos que

$$\int_\Omega |f \circ u_j(x) - f \circ u(x)|^2 dx = \int_\Omega |\int_{u_j(x)}^{u(x)} f'(s)ds|^2 dx$$
$$\leq \int_\Omega |\int_{u_j(x)}^{u(x)} |f'(s)|ds|^2 dx \leq M^2 \int_\Omega |u(x) - u_j(x)|^2 dx = M^2 \|u - u_j\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo $\lim_{j\to\infty} \|f \circ u_j - f \circ u\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Pelo Corolário (145), existe um aberto $U \subset \Omega$ tal que $\overline{U}$ é compacto e supp$\varphi \subset U$. Note que

$$\begin{aligned} &\|f' \circ u_j\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - f' \circ u\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(U)} \\ &\leq \|f' \circ u_j(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k})\|_{L^2(U)} + \|(f' \circ u_j - f' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(U)}. \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Observamos que

$$0 \leq \int_U |f' \circ u_j(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k})|^2 dx \leq M^2 \int_U |\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}|^2 dx.$$

Pelo teorema do confronto e o Teorema (153), concluímos que $\lim_{j\to\infty} \|f' \circ u_j(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k})\|_{L^2(U)} = 0$.

Note também que

$$\lim_{j\to\infty} |(f' \circ u_j(x) - f' \circ u(x))\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)|^2 = 0,$$

para quase todo $x \in U$ e

$$|(f' \circ u_j - f' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_k}|^2 \leq 4M^2 |\frac{\partial u}{\partial x_k}|^2.$$

Logo, pelo Teorema da convergência dominada, $\lim_{j\to\infty} \|f' \circ u_j\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - f' \circ u\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Assim, (4.2.4) nos diz que

$$\lim_{j\to\infty} \|f' \circ u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - f' \circ u \frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(U)} = 0.$$

Como $u_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^1(U)$, sabemos que

$$\int_U f \circ u_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)dx = -\int_U f' \circ u_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\varphi(x)dx,$$

pela Proposição (147), ou seja,

$$(f \circ u_j, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k})_{L^2(U)} = -(f' \circ u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \varphi)_{L^2(U)}.$$

Tomando o limite $j \to \infty$, vemos que

$$(f \circ u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k})_{L^2(U)} = -(f' \circ u \frac{\partial u}{\partial x_k}, \varphi)_{L^2(U)}.$$

Como $\varphi(x) = 0$ para $x \notin U$, concluímos que (4.2.3) vale. □

Podemos agora fazer mudanças de variáveis no espaço $H^1(\Omega)$ usando a Proposição (154).

PROPOSIÇÃO 155. *Sejam Ω_1 e Ω_2 abertos de $\mathbb{R}^n$ e $F : \Omega_2 \to \Omega_1$, $F(y) = (F_1(y), ..., F_n(y))$, um difeomorfismo de classe C^1 tal que $\sup_{x\in\Omega_1} |\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial x_j}(x)| < \infty$ e $\sup_{y\in\Omega_2} |\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y)| < \infty$, para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$. Aqui, denotamos $F^{-1}(x) = (F_1^{-1}(x), ..., F_n^{-1}(x))$.*
Se $u \in H^1(\Omega_1)$, então $u \circ F \in H^1(\Omega_2)$ e

$$\frac{\partial}{\partial y_k} u \circ F(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(F(y)) \frac{\partial F}{\partial y_j}(y).$$

Lembramos que um difeomorfismo de classe C^k entre dois abertos é uma bijeção, cuja função e sua inversa são diferenciáveis e de classe C^k.

DEMONSTRAÇÃO. *Afirmação 1: As funções $u \circ F$ e $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \circ F \frac{\partial F}{\partial y_j}$ pertencem a $L^2(\Omega)$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$.*
Observemos que

$$\int_{\Omega_2} |u \circ F(y)|^2 dy = \int_{\Omega_1} |u(x)|^2 |\det(DF^{-1}(x))| dx \le \left(\sup_{x\in\Omega_1} |\det(DF^{-1}(x))|\right) \int_{\Omega_1} |u(x)|^2 dx,$$

em que $DF^{-1}(x) = (\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial x_j}(x))_{i,j}$ é a matriz Jacobiana de F^{-1}. O determinante é limitado, pois todas as componentes da matriz $DF^{-1}(x)$ o são.
Da mesma forma,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(F(y)) \frac{\partial F}{\partial y_j}(y)|^2 dy &= \int_{\Omega_1} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial F}{\partial y_j}(F^{-1}(x))|^2 |\det(DF^{-1}(x))| dx \\ &\le \left(\sup_{x\in\Omega_1} |\det(DF^{-1}(x)) \frac{\partial F}{\partial y_j}(F^{-1}(x))^2|\right) \int_{\Omega_1} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

Novamente, o determinante e $\frac{\partial F}{\partial y_j}(F^{-1}(x))$ são limitados.
Afirmação 2: A derivada fraca $\frac{\partial}{\partial y_k}(u \circ F)$ é igual a $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(F(y)) \frac{\partial F}{\partial y_j}(y)$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$.
Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_2)$. Pelo Corolário (145), existe um aberto $V \subset \Omega_2$ tal que supp$\varphi \subset V$ e $\overline{V} \subset \Omega_2$. Pelo Teorema (153), existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega_1)} = 0$ e $\lim_{j\to\infty} \|\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(F(V))} = 0$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$. Como $u_j \circ F \in C^1(\Omega_2)$, podemos usar o Teorema (153) para concluir que

$$\int_{\Omega_2} u_j(F(y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}(y) dy = -\int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial y_k}(u_j(F(y)))\varphi(y) dy = -\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(F(y)) \frac{\partial F_i}{\partial y_k}(y)\varphi(y) dy.$$

Observando que

$$\int_{\Omega_2} |u_j(F(y)) - u(F(y))|^2 dy = \int_{\Omega_1} |u_j(x) - u(x)|^2 |\det DF^{-1}(x)| dx$$
$$\leq \sup_{x\in\Omega_1} |\det DF^{-1}(x)| \|u_j - u\|_{L^2(\Omega_1)}$$

e

$$\int_V |\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(F(y)) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(F(y))|^2 dy = \int_{F(V)} |\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^2 |\det DF^{-1}(x)| dx$$
$$\leq \sup_{x\in\Omega_1} |\det DF^{-1}(x)| \|\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2(F(V))},$$

concluímos, tomando o limite $j \to \infty$, que

$$\int_{\Omega_2} u(F(y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}(y) dy = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(F(y)) \frac{\partial F_i}{\partial y_k}(y) \varphi(y) dy.$$

$\square$

4.2.1.2. *Aproximações e extensões em abertos com fronteira de classe C^1.* Na seção anterior, consideramos abertos de $\mathbb{R}^n$ sem nenhuma hipótese de regularidade da fronteira. Vamos agora considerar abertos de classe C^k, $k \geq 1$, a fim de obter primeiramente um teorema de extensão e depois resultado melhor de aproximação.

Para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, vamos usar a notação $x' = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \in \mathbb{R}$. Logo $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Vamos também usar a seguinte nomenclatura (tirada do livro de Brézis):

- $\mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$,
- $Q = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x'\|_{\mathbb{R}^{n-1}} < 1 \text{ e } |x_n| < 1\}$,
- $Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n) \in Q : x_n > 0\}$,
- $Q_- = \{(x', x_n) \in Q : x_n < 0\}$,
- $Q_0 = Q \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = \{(x', 0) \in Q\}$.

Definição 156. Dizemos que um *aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *tem fronteira de classe* C^1 (ou simplesmente é um *aberto de classe* C^1) se para todo $x \in \partial\Omega$, existir um aberto U que contém x e um difeomorfismo $H : Q \to U$ de classe C^1 com as seguintes propriedades.
i. $H(Q_+) = U \cap \Omega$.
ii. $H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$.

Observação 157. Podemos, sem perda de generalidade, assumir que as derivadas $\frac{\partial H_i}{\partial y_j}$ e $\frac{\partial H_i^{-1}}{\partial x_j}$ são limitadas para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$, em que $H(y) = (H_1(y), ..., H_n(y))$ e $H^{-1}(x) = (H_1^{-1}(x), ..., H_n^{-1}(x))$.

Nosso objetivo será provar um teorema de extensão que permitirá que, sob certas condições, uma função $u \in H^1(\Omega)$ possa se estendida a uma função em $H^1(\mathbb{R}^n)$. Demonstraremos o teorema por partes: Primeiro provaremos o resultado no semiplano (ou numa parte dele) e depois, usando partição da unidade, estenderemos o resultado para um aberto limitado qualquer de classe C^1.

Vamos começar estendendo funções de Q_+ a funções em Q.

Proposição 158. *Seja $u \in H^1(Q_+)$. Vamos definir $u^* : Q \to \mathbb{R}$ por*

$$u^*(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), x_n > 0 \\ u(x', -x_n), x_n < 0 \end{cases}.$$

Então a função u^* pertence a $H^1(Q)$. Além disso, para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$, temos

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x', x_n) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n), x_n > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x', -x_n), x_n < 0 \end{cases} \quad e \quad \frac{\partial u^*}{\partial x_n}(x', x_n) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n), x_n > 0 \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x', -x_n), x_n < 0 \end{cases}.$$

Em particular, $\|u^*\|_{L^2(Q)} = \sqrt{2}\|u\|_{L^2(Q_+)}$ *e* $\|u^*\|_{H^1(Q)} = \sqrt{2}\|u\|_{H^1(Q_+)}$.

Demonstração. Observe que as funções $\frac{\partial u^*}{\partial x_i}$ pertencem a $L^2(Q)$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. De fato, se $i \in \{1, ..., n-1\}$, temos

$$\begin{aligned}\int_Q |\frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x', x_n)|^2 dx &= \int_{Q_+} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n)|^2 dx + \int_{Q_-} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x', -x_n)|^2 dx \\ &= 2\int_{Q_+} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n)|^2 dx.\end{aligned}$$

De forma similar, temos $\|\frac{\partial u^*}{\partial x_n}\|_{L^2(Q)} = \sqrt{2}\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\|_{L^2(Q_+)}$.

Afirmação 1: Demonstração da fórmula para derivadas fracas em x_i, $i \in \{1, ..., n-1\}$.

Seja $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le \eta \le 1$, $\eta(t) = 0$, se $t < 1/2$, e $\eta(t) = 1$, se $t > 1$. A função η pode ser construída da seguinte maneira. Fixamos uma função $\tilde{\eta} \in C_c^\infty(]1/2, 1[)$ não nula e maior ou igual a zero em todos os pontos, cuja existência pode ser provada usando, por exemplo, a Proposição 140. Definimos

$$\eta(t) = \frac{\int_0^t \tilde{\eta}(s)ds}{\int_{1/2}^1 \tilde{\eta}(s)ds}.$$

Logo η tem as propriedades que queremos. Definimos também $\eta_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\eta_k(t) = \eta(kt)$, para $k \in \mathbb{N}$. Logo $\eta_k(t) = 0$, se $t < \frac{1}{2k}$, e $\eta_k(t) = 1$, se $t > \frac{1}{k}$.

Seja $\varphi \in C_c^\infty(Q)$. Observamos inicialmente que

$$\begin{aligned}\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_Q u^*(x', x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_n) dx \\ &= \int_{Q_+} u(x', x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_n) dx + \int_{Q_-} u(x', -x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_n) dx \\ &= \int_{Q_+} u(x', x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_n) dx + \int_{Q_+} u(x', x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', -x_n) dx \\ &= \int_{Q_+} u(x', x_n) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_n) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', -x_n)\right) dx \\ &= \int_{Q_+} u(x', x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n)\right) dx.\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Vamos definir $\psi \in C^\infty(Q_+)$ por

$$\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n).$$

Note que $(x', x_n) \in Q_+ \mapsto \eta_k(x_n)\psi(x', x_n) \in C_c^\infty(Q_+)$. Portanto, como $u \in H^1(Q_+)$, temos

$$\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi \eta_k dx = -\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi \eta_k) dx = -\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \eta_k dx. \tag{4.2.6}$$

Tomando o limite $k \to \infty$, vemos que η_k converge pontualmente para 1 e permanece limitada. Logo

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = \lim_{k \to \infty} \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \eta_k dx \overset{(1)}{=} -\lim_{k \to \infty} \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi \eta_k dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi dx, \tag{4.2.7}$$

em que usamos (4.2.6) na igualdade (1).

Por fim, observamos que

$$\begin{aligned}\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\psi dx &= \int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x',x_n)\varphi(x',x_n)dx + \int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x',x_n)\varphi(x',-x_n)dx\\ &= \int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x',x_n)\varphi(x',x_n)dx + \int_{Q_-}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x',-x_n)\varphi(x',x_n)dx\\ &= \int_{Q}\frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x',x_n)\varphi(x',x_n)dx.\end{aligned}\tag{4.2.8}$$

Assim, (4.2.5), (4.2.7) e (4.2.8) implicam que

$$\int_Q u^*\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = -\int_Q \frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x',x_n)\varphi(x',x_n)dx.$$

Afirmação 2: Demonstração da fórmula para derivadas fracas em x_n.

Usando um argumento similar ao anterior, vemos que

$$\begin{aligned}&\int_Q u^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx = \int_Q u^*(x',x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x',x_n)dx\\ &= \int_{Q_+} u(x',x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x',x_n)dx + \int_{Q_-} u(x',-x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x',x_n)dx\\ &= \int_{Q_+} u(x',x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x',x_n)dx + \int_{Q_+} u(x',x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x',-x_n)dx\\ &= \int_{Q_+} u(x',x_n)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x',x_n) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x',-x_n)\right)dx\\ &\overset{(1)}{=} \int_{Q_+} u(x',x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\varphi(x',x_n)-\varphi(x',-x_n)\right)dx.\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

Em (1), usamos que $\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\varphi(x',-x_n)\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x',-x_n)$.

Definimos $\psi\in C^\infty(Q_+)$ por

$$\psi(x',x_n) = \varphi(x',x_n)-\varphi(x',-x_n).\tag{4.2.10}$$

Novamente, temos que $(x',x_n)\in Q_+\mapsto \eta_k(x_n)\psi(x',x_n)$ tem suporte compacto em Q_+. Portanto, pertence a $C_c^\infty(Q_+)$ e

$$\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_n}\psi\eta_k dx = -\int_{Q_+} u\frac{\partial}{\partial x_n}(\psi\eta_k)dx = -\int_{Q_+} u\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\eta_k dx - \int_{Q_+} u\psi\frac{\partial \eta_k}{\partial x_n}dx.\tag{4.2.11}$$

Tomando o limite $k\to\infty$, concluímos que η_k converge pontualmente para 1 e permanece limitada. Além disso, como $\psi(x',0)=0$ pela definição dada em (4.2.10), temos

$$\begin{aligned}&\left|\int_{Q_+} u\psi\frac{\partial\eta_k}{\partial x_n}dx\right| = \left|\int_{Q_+} u(x',x_n)\psi(x',x_n)\frac{\partial\eta_k}{\partial x_n}(x_n)dx\right|\\ &= \left|\int_{Q_+} u(x',x_n)\left(\int_0^1\frac{d}{d\theta}(\psi(x',\theta x_n))d\theta\right)\frac{\partial}{\partial x_n}(\eta(kx_n))dx\right|\\ &= \left|\int_{Q_+} u(x',x_n)\left(\int_0^1\frac{\partial\psi}{\partial x_n}(x',\theta x_n)d\theta\right)\left(kx_n\frac{\partial\eta}{\partial x_n}(kx_n)\right)dx\right|\\ &= \sup_{x\in Q_+}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right|\sup_{x_n\in\mathbb{R}}\left|x_n\frac{\partial\eta}{\partial x_n}(x_n)\right|\int_{|x'|<1}\int_0^{\frac{1}{k}}|u(x',x_n)|\,dx'dx_n.\end{aligned}\tag{4.2.12}$$

Para a última igualdade acima, lembramos que $\eta(kx_n)=0$ se $x_n>\frac{1}{k}$. A última integral vai a zero quando $k\to\infty$. Logo

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx &\overset{(1)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \eta_k dx \\
&\overset{(2)}{=} \lim_{k\to\infty} \left(\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \eta_k dx + \int_{Q_+} u\psi \frac{\partial \eta_k}{\partial x_n} dx \right) \\
&\overset{(3)}{=} - \lim_{k\to\infty} \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi \eta_k dx = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi dx.
\end{aligned} \tag{4.2.13}
$$

Em (1), usamos que η_k converge pontualmente para 1 e permanece uniformemente limitada. Em (2), usamos que (4.2.12) vai a zero para $k \to \infty$. Por fim, em (3), usamos (4.2.11).

Observamos que

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \psi dx &= \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n)\varphi(x', x_n) dx - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n)\varphi(x', -x_n) dx \\
&= \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n)\varphi(x', x_n) dx - \int_{Q_-} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', -x_n)\varphi(x', x_n) dx \\
&= \int_{Q} \frac{\partial u^*}{\partial x_n}(x', x_n)\varphi(x', x_n) dx.
\end{aligned} \tag{4.2.14}
$$

Por (4.2.9), (4.2.13) e (4.2.14), concluímos que

$$
\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx = - \int_Q \frac{\partial u^*}{\partial x_n}(x', x_n)\varphi(x', x_n) dx.
$$

□

Na próxima proposição, mostramos que se $u \in H^1(\Omega)$ tem suporte compacto, podemos estender facilmente para uma função em $H^1(\mathbb{R}^n)$ simplesmente tomando a extensão como sendo zero fora de Ω.

Proposição 159. *Seja $u \in H^1(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ um conjunto compacto. Suponha que $u(x) = 0$ para todo $x \notin K$. Então $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e a função $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como*

$$
\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}
$$

pertence a $H^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} = v_j$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$, em que

$$
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j}(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}.
$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \backslash K)$. Logo

$$
\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \varphi\right)_{L^2(\Omega\backslash K)} = \int_{\Omega\backslash K} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\varphi(x) dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\varphi(x) dx = - \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) dx = 0,
$$

pois $u\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0$, já que u se anula fora de K e φ se anula em K. Como $C_c^\infty(\Omega\backslash K)$ é denso em $L^2(\Omega\backslash K)$, então $\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$ em $\Omega\backslash K$.

Agora vamos mostrar que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j}(x) = v_j$. Seja $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ uma função que é igual a 1 em uma vizinhança de K. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx &\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\tilde{u}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx = \int_\Omega \chi(x)u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx \\
&= \int_\Omega u(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(\chi\varphi)(x)dx - \int_\Omega u(x)\frac{\partial \chi}{\partial x_j}(x)\varphi(x)dx \\
&\overset{(2)}{=} -\int_\Omega \left(\chi(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial \chi}{\partial x_j}(x)u(x)\right)\varphi(x)dx \\
&\overset{(3)}{=} -\int_\Omega \chi(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\varphi(x)dx \overset{(4)}{=} -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\varphi(x)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} v_j(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Em (1) usamos $\chi\tilde{u} = \tilde{u}$. Em (2), usamos que $\varphi\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Em (3), usamos que χ é igual a um num aberto que contém K e, portanto, suas derivadas são iguais a zero nesse mesmo aberto. Em (4), usamos que $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ só difere de zero em K, o que implica $\chi\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$. $\square$

Agora estamos em condições de provar nosso teorema de extensão.

Teorema 160. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 ou $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Então existe uma função linear e contínua $\mathcal{E} : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{E}(u)|_\Omega = u$.*

Note que o teorema acima assume a existência de uma função de extensão $\mathcal{E}$, mas não sua unicidade.

Demonstração. Inicialmente observamos que a Proposição 158 pode ser facilmente adaptada provar o Teorema no caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Basta colocar $\mathbb{R}^n_+$ no lugar de Q_+ e $\mathbb{R}^n$ no lugar de Q. Assim, nos resta considerar o caso de um aberto limitado de classe C^1.

Para cada $x \in \partial\Omega$, consideremos um difeomorfismo $H_x : Q \to U_x$ como na definição de aberto de classe C^1. Podemos supor, sem perda de generalidade que as derivadas de H_x e de H_x^{-1} são limitadas. Como $\overline{\Omega} \subset \Omega \cup (\cup_{x\in\partial\Omega} U_x)$ e $\overline{\Omega}$ é um compacto, concluímos que

$$\overline{\Omega} \subset \Omega \cup U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_N}.$$

De acordo com o Teorema 141, existem funções C^∞ denotadas por $(\psi_j)_{j=1}^{N+1}$ tais que $\mathrm{supp}(\psi_j) \subset U_{x_j}$, para cada $j \in \{1, ..., N\}$, $\mathrm{supp}(\psi_{N+1}) \subset \Omega$ e $\sum_{j=1}^{N+1} \psi_j(x) = 1$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Sabemos que $u \circ H_{x_j} \in H^1(Q_+)$, pela Proposição 155. Logo existe uma extensão $v_j \in H^1(Q)$ de $u \circ H_{x_j}$. Pela Proposição 155, $v_j \circ H_{x_j}^{-1} \in H^1(U_{x_j})$. Seja $\psi_j v_j \circ H_{x_j}^{-1} \in H^1(U_{x_j})$. Como esta função de anula fora do suporte de ψ_j, que é compacto, podemos estender esta função para um elemento em $H^1(\mathbb{R}^n)$ pela Proposição 159 (basta definir a função como zero fora de U_{x_j}). Da mesma forma, podemos estender $\psi_{N+1}u$ para um elemento em $H^1(\mathbb{R}^n)$. Vamos continuar denotando essas funções em $H^1(\mathbb{R}^n)$ por $\psi_j v_j \circ H_{x_j}^{-1}$ e $\psi_{N+1}u$. Seja

$$\mathcal{E}(u) = \sum_{j=1}^N \psi_j v_j \circ H_{x_j}^{-1} + \psi_{N+1}u.$$

Assim, se $x \in \Omega$, temos

$$\mathcal{E}(u)(x) = \sum_{j=1}^N \psi_j v_j \circ H_{x_j}^{-1}(x) + \psi_{N+1}u(x) = \sum_{j=1}^{N+1} \psi_j u(x) + \psi_{N+1}u(x) = u(x).$$

Como as extensões, multiplicações por funções de suporte compacto e composições são todas operações lineares e contínuas, concluímos que $\mathcal{E}$ também é linear e contínua. $\square$

Teorema 161. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 ou o conjunto $\mathbb{R}^n_+$. Se $u \in H^1(\Omega)$, então existe uma sequência de funções $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{E}(u) \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Veremos logo a seguir na Proposição 164 que existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - \mathcal{E}(u)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = 0$. Logo

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \lim_{j\to\infty} \|u_j - \mathcal{E}(u)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

□

4.2.2. Espaços $H_0^1(\Omega)$. Assim como no caso em uma dimensão, os espaços $H_0^1(\Omega)$ são muito úteis no estudo do problema de Dirichlet. Para dimensões maiores do que um, podemos defini-los da seguinte forma.

Definição 162. O *espaço* $H_0^1(\Omega)$ é o fecho do conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$, ou seja, $u \in H_0^1(\Omega)$ se, e somente se, existir uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$. O produto interno e a norma de $H_0^1(\Omega)$ são os mesmo de $H^1(\Omega)$.

Observação 163. Cuidado! Observe a diferença: Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ for um aberto limitado de classe C^1 e $u \in H^1(\Omega)$, então existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^1(\Omega)}$, pelo Teorema 161. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então os elementos desta sequência devem pertencer a $C_c^\infty(\Omega)$, ou seja, as funções não só têm suportes compactos, como os suportes também devem estar contido em Ω.

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, o espaço $H_0^1(\mathbb{R}^n)$ coincide com $H^1(\mathbb{R}^n)$, conforme a proposição abaixo nos mostra.

Proposição 164. *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = 0$. Em particular, $H^1(\mathbb{R}^n) = H_0^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Consideremos a função $\varphi_j = \rho_j * u$, em que ρ_j é dado na Definição 134. Logo $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$, pela Proposição 143. Além disso, vimos que $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} = \frac{\partial \rho_j}{\partial x_l} * u$, pela Corolário 139. Porém,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_j}{\partial x_l} * u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \rho_j}{\partial x_l}(x-y)u(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\rho_j(x-y)\right)u(y)dy \\ &\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)\frac{\partial u}{\partial y_l}(y)dy = \rho_j * \frac{\partial u}{\partial y_l}(x).\end{aligned}$$

Em (1) usamos que $y \mapsto \rho_j(x-y) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Novamente, pela Proposição 143, concluímos que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} = \lim_{j\to\infty} \frac{\partial \rho_j}{\partial x_l} * u = \lim_{j\to\infty} \rho_j * \frac{\partial u}{\partial x_l} = \frac{\partial u}{\partial x_l},$$

em que o limite é tomado em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como tanto a sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ como suas derivadas convergem em $L^2(\mathbb{R}^n)$, concluímos que a sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a u em $H^1(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \lim_{j\to\infty}\left(\|\varphi_j - u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{l=1}^n \|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} - \frac{\partial u}{\partial x_l}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) = 0.$$

Seja agora $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função tal que $0 \leq \eta \leq 1$, que se anula fora de $B(0,2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 2\}$ e que é igual a 1 na bola $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Definimos $\eta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ por $\eta_k(x) = \eta(x/k)$. Logo η_k se anula fora de $B(0,2k)$ e é igual a 1 em $B(0,k)$.

Como $|(1-\eta_k(x))\varphi_j(x)| \leq |\varphi_j(x)|$ e $\lim_{k\to\infty} |(1-\eta_k(x))\varphi_j(x)| = 0$, então, pelo teorema da convergência dominada, temos

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_j - \eta_k\varphi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |(1-\eta_k(x))\varphi_j(x)|^2 dx = 0. \tag{4.2.15}$$

Note também que, para qualquer $l \in \{1, ..., n\}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(\eta_k\varphi_j) = \frac{\partial \eta_k}{\partial x_l}\varphi_j + \eta_k\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}. \tag{4.2.16}$$

Pelo mesmo argumento visto acima, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty}\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_l}-\eta_k\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_l}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=0. \tag{4.2.17}$$

Por fim, vemos que $\frac{\partial\eta_k}{\partial x_l}=\frac{1}{k}\frac{\partial\eta}{\partial x_l}(\frac{x}{k})$. Note que[1]

$$\|\frac{\partial\eta_k}{\partial x_l}\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|\frac{1}{k}\frac{\partial\eta}{\partial x_l}(\frac{x}{k})\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq\frac{1}{k}\|\frac{\partial\eta}{\partial x_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Logo

$$\lim_{k\to\infty}\|\frac{\partial\eta_k}{\partial x_l}\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=0. \tag{4.2.18}$$

De (4.2.16), (4.2.17) e (4.2.18), concluímos que

$$\lim_{k\to\infty}\|\frac{\partial}{\partial x_l}(\eta_k\varphi_j)-\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_l}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=0. \tag{4.2.19}$$

De (4.2.15) e (4.2.19), temos

$$\lim_{k\to\infty}\|\varphi_j-\eta_k\varphi_j\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}=0.$$

Desta maneira, para cada $j\in\mathbb{N}$, podemos encontrar $k_j\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_j-\eta_{k_j}\varphi_j\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}<\frac{1}{j}.$$

Neste caso, definindo $u_j=\eta_{k_j}\varphi_j\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, vemos que

$$\|u_j-u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\leq\|u_j-\varphi_j\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}+\|\varphi_j-u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Como as normas do lado direito vão a zero, concluímos que $\lim_{j\to\infty}\|u_j-u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}=0$. □

A situação para $\Omega\neq\mathbb{R}^n$ é um pouco mais complexa. Vamos começar vendo exemplos de funções em $H_0^1(\Omega)$.

PROPOSIÇÃO 165. *Seja $u\in H^1(\Omega)$ e $K\subset\Omega$ um compacto. Se $u(x)=0$ para $x\notin K$, então $u\in H_0^1(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Teorema 153, sabemos que existe $u_j\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty}\|u_j-u\|_{L^2(\Omega)}=0$ e $\lim_{j\to\infty}\|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(V)}=0$, para todo $k\in\{1,...,n\}$ e todo aberto $V\subset\Omega$ tal que $\overline{V}$ é um compacto contido em Ω.

Seja $\chi\in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi(x)=1$ para todo x num aberto que contém K, conforme a Proposição 140. Assim, $\chi u_j\in C_c^\infty(\Omega)$. Basta agora mostrar que $\lim_{j\to\infty}\|\chi u_j-u\|_{H^1(\Omega)}=0$. Para as contas abaixo, observamos que $\chi u=u$.

Primeiramente, vemos que

$$\lim_{j\to\infty}\|\chi u_j-\chi u\|_{L^2(\Omega)}\leq\|\chi\|_{L^\infty(\Omega)}\lim_{j\to\infty}\|u_j-u\|_{L^2(\Omega)}=0.$$

Para as derivadas, seja $V\subset\Omega$ um aberto que contém o suporte de χ e tal que $\overline{V}$ é um compacto contido em Ω. Portanto, se $k\in\{1,...,n\}$, então

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial}{\partial x_k}(\chi u_j)-\frac{\partial}{\partial x_k}(\chi u)\|_{L^2(\Omega)}&=\|\frac{\partial\chi}{\partial x_k}(u_j-u)+\chi\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\|_{L^2(V)}\\&\leq\|\frac{\partial\chi}{\partial x_k}\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_j-u\|_{L^2(\Omega)}+\|\chi\|_{L^\infty(V)}\|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(V)}.\end{aligned}$$

[1]Lembre-se que se $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ for uma função contínua limitada, então

$$\|hf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\sqrt{\int_{\mathbb{R}^n}|h(x)f(x)|^2dx}\leq\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|h(x)|\sqrt{\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2dx}=\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Agora é fácil de concluir que

$$\lim_{j\to\infty} \|\frac{\partial}{\partial x_k}(\chi u_j) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\chi u)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

□

Gostaríamos de interpretar $H_0^1(\Omega)$ como sendo o conjunto de funções em $H^1(\Omega)$ que se anulam na fronteira. Esta interpretação não é tão fácil como parece. Para tanto, precisamos inicialmente do seguinte lema.

LEMA 166. *Existe uma função $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $G(t) = 0$, se $|t| < 1$, e $G(t) = t$, se $|t| > 2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com suporte em $[-2, 2]$ e tal que $\chi(t) = 1$ se $t \in [-1, 1]$. Logo $G(t) = (1 - \chi(t))t$ satisfaz as propriedades que procuramos. □

A função G definida no lema acima é tal que $G'(t) = 1$ se $t \geq 2$ e $G'(t) = -1$ se $t \leq -2$. Portanto, G' é uma função limitada.

PROPOSIÇÃO 167. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Se $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, então $u \in H_0^1(\Omega)$. Por outro lado, se Ω for de classe C^1 e $u \in H_0^1(\Omega)$, então $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.*

DEMONSTRAÇÃO. *Afirmação 1: Se $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, então $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Seja $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $G(t) = 0$, se $|t| < 1$, e $G(t) = t$, se $|t| > 2$. Definimos $G_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $G_j(t) = \frac{1}{j}G(jt)$. Logo $G_j(t) = 0$, se $|t| < \frac{1}{j}$, e $G_j(t) = t$, se $|t| > \frac{2}{j}$. Note que G_j tem derivada limitada, pois $G_j'(t) = G'(jt)$ e G' é limitada.

Pela Proposição 154, a função $G_j \circ u : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $H^1(\Omega)$. Como $\overline{\Omega}$ é fechado e limitado, então também é compacto. Portanto, u é uniformemente contínuo e existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - y| < \delta$, então

$$|u(x) - u(y)| < \frac{1}{j}.$$

Se $d(x, \partial\Omega) < \delta$, então existe $y \in \partial\Omega$ tal que $\|x - y\| < \delta$. Como $u(y) = 0$ para $y \in \partial\Omega$, concluímos que

$$|u(x)| = |u(x) - u(y)| < \frac{1}{j}.$$

Logo $G_j \circ u(x) = 0$. Desta forma, $G_j \circ u$ pertence a $H^1(\Omega)$ e se anula fora do compacto $K := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq \delta\}$. Pela Proposição 165, $G_j \circ u \in H_0^1(\Omega)$.

Como $H_0^1(\Omega)$ é fechado, pois é o fecho de um conjunto, basta mostrar que $\lim_{j\to\infty} \|G_j \circ u - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$ para concluir que $u \in H_0^1(\Omega)$.

Para a convergência em L^2, observamos que

$$\lim_{j\to\infty} \|G_j \circ u - u\|^2_{L^2(\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |G_j \circ u(x) - u(x)|^2 dx = 0, \tag{4.2.20}$$

pois $\lim_{j\to\infty} G_j \circ u(x) = u(x)$, já que $\lim_{j\to\infty} G_j(t) = t$ e $|G_j \circ u(x)| = |u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty}$, se $|u(x)| > \frac{2}{j}$, e $|G_j \circ u(x)| \leq \frac{1}{j} \sup_{x\in[-2,2]} |G(x)|$, se $|u(x)| \leq \frac{2}{j}$. Assim, $G_j \circ u$ é uniformemente limitada e (4.2.20) segue do teorema da convergência dominada.

Por fim, se $k \in \{1, ..., n\}$, então, derivando pela Proposição 154, obtemos

$$\lim_{j\to\infty} \|\frac{\partial}{\partial x_k} G_j \circ u - \frac{\partial u}{\partial x_k}\|^2_{L^2(\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |G_j'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)|^2 dx = 0$$
$$= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |G'(ju(x)) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)|^2 dx = 0,$$

pois $\lim_{j\to\infty} G'(ju(x)) = 1$ se $u(x) \neq 0$. Usamos novamente o teorema da convergência dominada.

Afirmação 2: Se $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e Ω é de classe C^1, então $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.

Vamos primeiro provar que se $u \in H_0^1(Q_+) \cap C(\overline{Q}_+)$, então $u(x', 0) = 0$, para todo $\|x'\| < 1$.

Seja $(u_j) \in C_c^\infty(Q_+)$ uma sequência tal que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^1(Q_+)} = 0$. Como u_j tem suporte compacto, então $u_j(x', 0) = 0$. Portanto, para $(x', x_n) \in Q_+$, temos

$$u_j(x', x_n) = \int_0^{x_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', t)dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\int_{|x'|<1} \left(\int_0^\varepsilon |u_j(x', x_n)|dx_n\right) dx' \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{|x'|<1} \left(\int_0^\varepsilon \left(\int_0^{x_n} \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', t)\right| dt\right) dx_n\right) dx' \\
&\le \frac{1}{\varepsilon}\int_{|x'|<1} \left(\int_0^\varepsilon \left(\int_0^{\varepsilon} \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', t)\right| dt\right) dx_n\right) dx' \qquad (4.2.21)\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{|x'|<1} \left(\int_0^\varepsilon \left(\int_0^{\varepsilon} \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', t)\right| dx_n\right) dt\right) dx' = \int_{|x'|<1} \left(\int_0^\varepsilon \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', t)\right| dt\right) dx'.
\end{aligned}$$

Para tomar o limite $j \to \infty$ na expressão acima, note que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{|x'|<1}\int_0^\varepsilon |u_j(x', x_n)|dx'dx_n - \int_{|x'|<1}\int_0^\varepsilon |u(x', x_n)|dx'dx_n\right| \\
&\le \int_{|x'|<1}\int_0^\varepsilon \left||u_j(x', x_n)| - |u(x', x_n)|\right| dx'dx_n \\
&\le \int_{|x'|<1}\int_0^\varepsilon |u_j(x', x_n) - u(x', x_n)| \, dx'dx_n \\
&\le \sqrt{\int_{|x'|<1}\int_0^\varepsilon dx'dx_n}\sqrt{\int_{|x'|<1}\int_0^\varepsilon |u_j(x', x_n) - u(x', x_n)|^2 \, dx'dx_n}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{j\to\infty}\int_{|x'|<1}\int_0^\varepsilon |u_j(x', x_n)|dx'dx_n = \int_{|x'|<1}\int_0^\varepsilon |u(x', x_n)|dx'dx_n.$$

Da mesma forma, prova-se que

$$\lim_{j\to\infty}\int_{|x'|<1} \left(\int_0^\varepsilon \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', t)\right| dt\right) dx' = \int_{|x'|<1} \left(\int_0^\varepsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right| dt\right) dx'.$$

Portanto, tomando o limite $j \to \infty$ em (4.2.21), obtemos

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{|x'|<1}\int_0^\varepsilon |u(x', x_n)|dx'dx_n \le \int_{|x'|<1}\int_0^\varepsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right| dtdx'.$$

Como u é contínua, podemos tomar o limite $\varepsilon \to 0$ na expressão acima para obter

$$\int_{|x'|<1} |u(x', 0)|dx' \le 0,$$

ou seja, $u(x', 0) = 0$.

O caso geral segue através do uso de partição da unidade e localização, isto é, difeomorfimos do tipo $H : Q \to U$ que definem os abertos de classe C^1. □

Exemplo 168. Consideremos um aberto Ω limitado de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$. Logo a função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = 1$ é uma função que pertence a $H^1(\Omega)$, porém não pertence a $H_0^1(\Omega)$. De fato, é uma função contínua que não se anula na fronteira. Em particular, vemos que $H^1(\Omega) \neq H_0^1(\Omega)$.

Observação 169. Vimos anteriormente que $H^1(a, b) \subset C([a, b])$. Assim, usando os mesmos argumentos anteriores, podemos provar que $u \in H^1(a, b)$ é o limite de uma sequência de funções em $C_c^\infty(]a, b[)$ se, e somente se, $u(a) = u(b) = 0$. Portanto a nova definição de $H_0^1(\Omega)$ coincide com a anterior no caso unidimensional.

Vamos finalizar com a importante desigualdade de Poincaré. Ela é fundamental para o estudo do problema de Dirichlet.

PROPOSIÇÃO 170. *(Desigualdade de Poincaré). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega u^2(x)dx \leq C \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

DEMONSTRAÇÃO. Como Ω é limitado, existem $a < b$ tais que, se $x = (x', x_n) \in \Omega$, então $x_n \in]a, b[$. Assim, se $u \in C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} |u(x', x_n)|^2 &= \left| \int_a^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', s) ds \right|^2 \leq \int_a^{x_n} 1^2 ds \int_a^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', s)^2 ds \\ &= (x_n - a) \int_a^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', s)^2 ds \leq (x_n - a) \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', s)^2 ds. \end{aligned}$$

Integrando em x_n, obtemos

$$\int_a^b |u(x', x_n)|^2 dx_n \leq \int_a^b (x_n - a) \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', s)^2 ds dx_n = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', s)^2 ds.$$

Por fim, integrando em x', temos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x', x_n)|^2 dx_n \right) dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_a^b |u(x', x_n)|^2 dx_n \right) dx' \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_a^b \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', s)^2 ds \right) dx' = \frac{(b-a)^2}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n)^2 dx \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx. \end{aligned}$$

$\square$

OBSERVAÇÃO 171. Observe que a demonstração acima nos mostra que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é tal que $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$ implica que $x_j \in [a, b]$ para algum $j \in \{1, ..., n\}$ (Ω está contido numa faixa no eixo x_j), então

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)^2 dx.$$

4.3. Aplicação: Existência de soluções fracas usando espaços $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$

Nesta seção usaremos os espaços de Sobolev para demonstrar a existência e unicidade de uma solução fraca para os problemas de Dirichlet e Neumann em um sentido análogo ao que fizemos na Seção 3.2, quando tratamos de problemas variacionais em uma dimensão.

Nossa abordagem seguirá os seguintes passos:

- Definimos o que é uma solução clássica, usando espaços $C^2(\overline{\Omega})$.
- Definimos soluções fracas em um espaço de Sobolev apropriado e provamos que uma solução clássica tem que ser uma solução fraca.
- Usamos o que aprendemos de análise funcional (em particular, o Teorema de Lax-Milgram) para provar a existência e unicidade de soluções fracas. Concluímos, assim, que, se uma solução clássica existir, então ela é única, pois é igual a única solução fraca.
- Mostramos por fim que, se a solução fraca estiver em $C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica.

Uma pergunta que surge naturalmente na nossa abordagem é: Quando é que uma solução fraca está em $C^2(\overline{\Omega})$ afinal? Isto será abordado apenas nas seções posteriores quando enunciarmos resultados de regularidade.

4.3.1. Problema de Dirichlet. Começaremos com o problema de Dirichlet. Para tanto, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $\lambda \geq 0$ e $f \in L^2(\Omega)$. Gostaríamos de achar um função u que resolva o problema abaixo:

$$\begin{aligned} \lambda u(x) - \Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Precisaremos deixar claro o que entendemos como solução do problema. Vamos ver dois tipos de solução: a solução clássica e a solução fraca. Abaixo, definimos a solução clássica.

Definição 172. Dizemos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma *solução clássica do problema de Dirichlet* se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e u satisfazer a Equação (4.3.1).

Observe que, para que u seja uma solução clássica, precisamos que f seja uma função contínua (isto é uma condição necessária, mas não suficiente!). Vamos supor que a Equação (4.3.1) admita uma solução clássica $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Logo se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\lambda \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx - \int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Usando a Proposição 147, temos

$$\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x)\varphi(x)dx = -\sum_{k=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx.$$

Logo

$$\lambda \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx. \tag{4.3.2}$$

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$. Sabemos que existe uma sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_c^\infty(\Omega)$ que converge para v em $H^1(\Omega)$. Logo φ_j e $\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}$ convergem para v e $\frac{\partial v}{\partial x_k}$ em $L^2(\Omega)$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$. A Equação (4.3.2) implica que

$$\lambda(u, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}, \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k})_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi_j)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{4.3.3}$$

pela definição de produto interno em $L^2(\Omega)$. Portanto, tomando o limite para $j \to \infty$ em (4.3.3), concluímos que

$$\lambda \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.3.4}$$

Como $u \in C^2(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega})$ e $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, concluímos que $u \in H_0^1(\Omega)$, pela Proposição 167. Isto motiva a definição de solução fraca dada abaixo.

Definição 173. Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma *solução fraca do problema de Dirichlet (4.3.1)* se $u \in H_0^1(\Omega)$ e u satisfaz $a(u, v) = F(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, em que $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são dados por

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \lambda \int_\Omega uvdx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdx, \\ F(v) &= \int_\Omega fvdx. \end{aligned}$$

Por (4.3.4), vemos que toda solução clássica é uma solução fraca. Note que, ao contrário da solução clássica, não precisamos que f seja contínua para que a solução fraca exista. De fato, o seguinte teorema é válido.

Teorema 174. *Para toda $f \in L^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca de (4.3.1).*

DEMONSTRAÇÃO. Basta provar que $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma função bilinear, contínua e coerciva e que $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma função linear contínua. O resultado seguirá de Lax-Milgram, Teorema 94.

Afirmação 1: A função F é linear e contínua.

A linearidade é simples. Para a continuidade, basta ver que

$$|F(v)| = |\int_\Omega fv dx| \leq \sqrt{\int_\Omega f^2 dx}\sqrt{\int_\Omega v^2 dx} = \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Afirmação 2: A função a é bilinear, contínua e coerciva.

A bilinearidade é simples. Para a continuidade, observamos que

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |\lambda||\int_\Omega uv dx| + \sum_{k=1}^n |\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k} dx| \\
&\leq |\lambda|\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial v}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq |\lambda|\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \sum_{k=1}^n \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq (n + |\lambda|)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para provar coercividade, consideremos primeiro o caso em que $\lambda > 0$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
|a(u,u)| &= \lambda\int_\Omega u^2 dx + \sum_{k=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}^2 dx \\
&\geq \min\{1,\lambda\}\left(\int_\Omega u^2 dx + \sum_{k=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}^2 dx\right) = \min\{1,\lambda\}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Consideremos agora o caso em que $\lambda = 0$. Neste caso, usando a constante $C > 0$ da desigualdade de Poincaré visto na Proposição 170, vemos que

$$\begin{aligned}
|a(u,u)| &= \sum_{k=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2C}\int_\Omega |u|^2 dx \\
&\geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2C}\right\}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx\right) = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2C}\right\}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Assim, a é coerciva. □

Como as soluções fracas são únicas e como toda solução clássica é uma solução fraca, então, caso exista uma solução clássica, ela deve ser única. Afinal ela será a igual a única solução fraca do problema.

Mas quando é que uma solução fraca é uma solução clássica? Já vimos que f deve ser ao menos contínua. Abaixo, vamos mostrar que se u é uma solução fraca que pertence a $C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica.

TEOREMA 175. *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca de (4.3.1). Se Ω tem fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e $u \in C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelas hipóteses, $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega}) \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Como Ω tem fronteira de classe C^1, então, pela Proposição (167), vimos que $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Portanto, a condição de contorno já está satisfeita.

Consideremos $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como $C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, temos

$$\lambda\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Usando novamente a Proposição 147, concluímos que

$$\int_\Omega (\lambda u(x) - \Delta u(x))\, \varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,$$

ou seja,

$$(\lambda u - \Delta u - f, \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, concluímos que $\lambda u - \Delta u = f$. □

4.3.2. Problema de Neumann. Vamos agora repetir os argumentos da seção anterior para estudar o problema de Neumann. Para tanto, consideremos um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1, $\lambda > 0$ e $f \in L^2(\Omega)$. Note que aqui consideraremos apenas o caso $\lambda > 0$. O caso $\lambda = 0$ é mais complicado e será proposto na lista de exercícios para entregar.

Gostaríamos de achar um função u que resolva o problema abaixo:

$$\begin{aligned} \lambda u(x) - \Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

em que $n(x) = (n_1(x), ..., n_n(x))$ é o vetor normal que aponta para fora de Ω em $x \in \partial\Omega$. Lembramos que

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = (\nabla u(x), n(x))_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) n_j(x),$$

para $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Definição 176. Dizemos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma *solução clássica do problema de Neumann (4.3.5)* se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e u satisfazer a Equação (4.3.5).

Novamente, uma condição necessária para que u seja uma solução clássica é que f seja uma função contínua. Vamos supor que a Equação (4.3.5) admita uma solução clássica $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Logo, se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\lambda \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx - \int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Observe que estamos usando aqui $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. No problema de Dirichlet, havíamos usado $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Usando o teorema da divergência (ele é válido, pois Ω é limitado de classe C^1), vemos que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx &= -\int_\Omega (\nabla\cdot(\varphi\nabla u(x)) - \nabla\varphi(x)\cdot\nabla u(x))\, dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} \varphi(\nabla u(x), n(x))_{\mathbb{R}^n} dS(x) + \int_\Omega \nabla\varphi(x)\cdot\nabla u(x)dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} \varphi\frac{\partial u}{\partial n}(x)dS(x) + \int_\Omega \nabla\varphi(x)\cdot\nabla u(x)dx = \int_\Omega \nabla\varphi(x)\cdot\nabla u(x)dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{4.3.6}$$

Seja $v \in H^1(\Omega)$. Sabemos que existe uma sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que converge para v em $H^1(\Omega)$, pelo Teorema 161. Logo φ_j e $\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}$ convergem para v e $\frac{\partial v}{\partial x_k}$ em $L^2(\Omega)$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$. A Equação (4.3.6) implica que

$$\lambda(u, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1} (\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}, \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k})_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi_j)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.3.7}$$

Tomando o limite para $j \to \infty$ em (4.3.7), concluímos que

$$\lambda \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{4.3.8}$$

Como $u \in C^2(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega})$, concluímos que $u \in H^1(\Omega)$. Isto motiva a definição de solução fraca dada abaixo.

Definição 177. Dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ é uma *solução fraca do problema de Neumann (4.3.5)* se $u \in H^1(\Omega)$ e u satisfaz $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H^1(\Omega)$, em que $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são dados por

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \lambda \int_\Omega uvdx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdx, \\ F(v) &= \int_\Omega fvdx. \end{aligned}$$

Por (4.3.8), vemos que toda solução clássica é uma solução fraca. Note que, ao contrário da solução clássica, não precisamos que f seja contínua para que a solução fraca exista. De fato, o seguinte teorema é válido.

Teorema 178. *Para toda $f \in L^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca de (4.3.5).*

Demonstração. A prova é uma repetição do que foi feito no caso Dirichlet. Escreveremos aqui a prova completa para facilitar o leitor.

Basta provar que $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma função bilinear, contínua e coerciva e que $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma função linear contínua. O resultado seguirá de Lax-Milgram, Teorema 94.

Afirmação 1: A função F é linear e contínua.

A linearidade é simples. Para a continuidade, basta ver que

$$|F(v)| = |\int_\Omega fvdx| \leq \sqrt{\int_\Omega f^2dx}\sqrt{\int_\Omega v^2dx} = \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Afirmação 2: A função a é bilinear, contínua e coerciva.

A bilinearidade é simples. Para a continuidade, observamos que

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= |\lambda||\int_\Omega uvdx| + \sum_{k=1}^n |\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}dx| \\ &\leq |\lambda|\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial v}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |\lambda|\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \sum_{k=1}^n \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (n + |\lambda|)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Para provar coercividade, basta observar que

$$\begin{aligned} |a(u,u)| &= \lambda \int_\Omega u^2dx + \sum_{k=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}^2 dx \\ &\geq \min\{1,\lambda\} \left(\int_\Omega u^2dx + \sum_{k=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}^2 dx \right) = \min\{1,\lambda\}\|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Assim, a é coerciva. □

Como as soluções fracas são únicas e como toda solução clássica é uma solução fraca, então, caso exista uma solução clássica, ela deve ser única. Afinal ela será a igual a única solução fraca do problema.

Mas quando é que uma solução fraca é uma solução clássica? Já vimos que f deve ser ao menos contínua. Abaixo, vamos mostrar que, se u é uma solução fraca que pertence a $C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica.

TEOREMA 179. *Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca de (4.3.5) e $u \in C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica. (Como em toda essa subseção, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e de classe C^1).*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pelo teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx &= \lambda\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx \\ &= \lambda\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx - \int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x)\varphi(x)dx.\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Neste caso, temos

$$\int_\Omega (\lambda u(x) - \Delta u(x))\,\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Portanto,

$$(\lambda u - \Delta u - f, \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, concluímos que $\lambda u - \Delta u = f$. Aplicando este resultado a (4.3.9), concluímos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx &= \lambda\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx - \int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x)\varphi(x)dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{4.3.10}$$

Suponha que $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$. Como $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então existe $\delta > 0$ e uma constante $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\frac{\partial u}{\partial n}(x) > \varepsilon_0$ para todo $x \in \partial\Omega$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$. Seja $\chi \in C_c^\infty(B(x_0,\delta))$ uma função tal que $\chi \geq 0$ e $\chi(x) = 1$ para todo $x \in B(x_0, \delta/2)$. Assim,

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x)\chi(x)dx \geq \int_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta/2)}\frac{\partial u}{\partial n}(x)dx \geq \varepsilon_0\int_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta/2)}dx > 0,$$

pois $\int_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta/2)}dx$ é a área (não nula) do pedaço da superfície $\partial\Omega \cap B(x_0,\delta/2)$. No entanto, por (4.3.10), deveríamos ter $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x)\chi(x)dx = 0$. Isto é um absurdo. Logo $\frac{\partial u}{\partial n}(x)$ não pode ser positivo para nenhum $x \in \partial\Omega$. Usando o mesmo raciocínio, $\frac{\partial u}{\partial n}(x)$ não pode ser negativo para nenhum $x \in \partial\Omega$. Concluímos, assim, que $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. □

4.4. Caracterização dos espaços $H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ usando transformada de Fourier

Uma ferramenta bastante útil no estudo dos espaços de Sobolev é a transformada de Fourier. Para conseguir utilizá-la de maneira adequada, precisaremos trabalhar com espaços de funções com valores complexos.

Assim, consideraremos nessa seção espaços de Sobolev com valores em $\mathbb{C}$. A definição, dada abaixo, é a mesma que a dada para o caso real, porém todas as funções têm valores em $\mathbb{C}$. Em particular, toda função no espaço de Sobolev real pertence ao espaço de Sobolev complexo.

DEFINIÇÃO 180. Seja $k \in \{1, ..., n\}$. Dizemos que $u \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ *tem derivada fraca* $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ se existir $v \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}).$$

Neste caso, denotamos v por $\frac{\partial u}{\partial x_k}$. O conjunto $H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ consiste de todas as funções $u \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ que possuem derivadas fracas $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ para todo $k \in \{1,...,n\}$. É um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(f,g)_{H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\overline{\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)}dx.$$

Assim como no caso real e usando a mesma demonstração, podemos provar que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Vamos agora caracterizar esses espaços usando a transformada de Fourier.

TEOREMA 181. *As seguintes propriedade são válidas:*
i. Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Logo $u \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ se, e somente se, $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto (1+\|\xi\|^2)^{1/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.
ii. O produto interno de $H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ pode ser escrito como

$$(u,v)_{H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}(1+\|\xi\|^2)d\xi.$$

DEMONSTRAÇÃO. *Afirmação 1: Se $u \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, então $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto (1+\|\xi\|^2)^{1/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.*
Suponha que $u \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ tal que $\lim_{j\to\infty}\|u_j - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = 0$. Como a transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ é unitária, concluímos que

$$\lim_{j\to\infty}\|\mathcal{F}u_j - \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \lim_{j\to\infty}\|u_j - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = 0,$$
$$\lim_{j\to\infty}\|\mathcal{F}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \lim_{j\to\infty}\|\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = 0, \quad \forall k \in \{1,...,n\}.$$

As funções $x \mapsto e^{-ix\cdot\xi} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ satisfazem as hipóteses da Proposição 147. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_k}(e^{-ix\cdot\xi})u_j(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n}(-i\xi_k)e^{-ix\cdot\xi}u_j(x)dx = i\xi_k\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}u_j(x)dx = i\xi_k\hat{u}_j(\xi).\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Lembramos que $\hat{u}$ é apenas outra notação para $\mathcal{F}u$.

Como $\hat{u}_j$ converge a $\hat{u}$ em $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, então, passando para uma subsequência se necessário, podemos supor que $\hat{u}_j$ converge para $\hat{u}$ pontualmente (para quase todo ponto)[2]. Assim, concluímos que $\xi \mapsto i\xi_k\hat{u}_j(\xi)$ também converge pontualmente para $\xi \mapsto i\xi\hat{u}(\xi)$ (para quase todo ponto).

Como $\xi \mapsto i\xi_k\hat{u}_j(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)(\xi)$ converge para $\mathcal{F}u$ em $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, então podemos, novamente passando para uma subsequência se necessário, concluir que $\xi \mapsto i\xi_k\hat{u}_j(\xi)$ também converge pontualmente para $\mathcal{F}u$ (para quase todo ponto). Portanto, $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)(\xi) = i\xi_k\hat{u}(\xi)$, para quase todo ponto.

[2]Dizer que $\hat{u}_j$ converge para $\hat{u}$ pontualmente para quase todo ponto quer dizer que existe um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\lim_{j\to\infty}\hat{u}_j(\xi) = \hat{u}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash S$ e $\int_S dx = 0$, ou seja, o volume da região onde não há convergência é zero. (Para quem conhece medida e integração, lembramos que devemos supor também que o conjunto S deve ser mensurável).

A demonstração de "se $\hat{u}_j$ converge a $\hat{u}$ em $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, então existe uma subsequência $(\hat{u}_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para $\hat{u}$ pontualmente para quase todo ponto" pode ser encontrado no Rudin (Real and Complex Analysis), por exemplo. É um resultado conhecido de medida e integração.

Como $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ pertence a $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, então $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$ também pertence a $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Logo $\xi \mapsto i\xi_k\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)(\xi)$ pertence a $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\left|(1+\|\xi\|^2)^{1/2}\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n}(1+\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi_j\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^2 dx \\
&= \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} + \sum_{j=1}^{n}\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} < \infty.
\end{aligned}$$

Em (1) usamos que $\mathcal{F}$ é unitária.

Logo $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto (1+\|\xi\|^2)^{1/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

Afirmação 2: Se $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto (1+\|\xi\|^2)^{1/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, então $u \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

Suponha que $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto (1+|\xi|^2)^{1/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Como $|\xi_k| \leq (1+|\xi|^2)^{1/2}$ para todo $k \in \{1,...,n\}$, então $i\xi_k\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Vamos definir $v_k = \mathcal{F}^{-1}(i\xi_k\hat{u}) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Assim, se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi = \overline{\varphi}$, então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)dx \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_k}(x)}dx &\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}u(\xi)\overline{\mathcal{F}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)(\xi)}d\xi \overset{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(\xi)\overline{i\xi_k\hat{\psi}(\xi)}d\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} i\xi_k\hat{u}_j(\xi)\overline{\hat{\psi}(\xi)}d\xi \overset{(3)}{=} -\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}^{-1}(i\xi_k\hat{u}_j)(x)\overline{\mathcal{F}^{-1}(\hat{\psi})(x)}dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} v_k(x)\overline{\psi(x)}dx = -\int_{\mathbb{R}^n} v_k(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Em (1) e em (3) usamos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ são unitárias, respectivamente. Em (2), usamos o mesmo argumento que em (4.4.1). Concluímos que a derivada fraca $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ existe e é igual a v_k. Portanto, $u \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

Afirmação 3: $(u,v)_{H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}(1+\|\xi\|^2)d\xi$, para todo $u,v \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

Basta observar que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|\xi\|^2)\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}d\xi + \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{i\xi_j u}(\xi)\overline{\widehat{i\xi_j v}(\xi)}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v(x)}dx + \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)}dx.
\end{aligned}$$

Em que usamos que a transformada de Fourier é unitária na última igualdade. □

4.5. Espaços $H^m(\Omega)$

Vimos nas seções anteriores as definições e os principais resultados sobre os espaços $H^1(\Omega)$, além de importantes aplicações para o estudo de soluções de problemas de contorno elípticos.

Nessa seção, definiremos os espaços $H^m(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Para facilitar, denotaremos $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$. Depois iremos enunciar os principais resultados, sem prová-los.

Como aplicação, vamos enunciar o teorema de regularidade para o problema de Dirichlet e dar uma condição suficiente, mas não necessária, para que uma solução fraca seja uma solução clássica.

Definição 182. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. O espaço de Sobolev $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, é o conjunto de todas as funções $u \in H^1(\Omega)$ tais que $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in H^{m-1}(\Omega)$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

Pela definição acima, dada $u \in H^m(\Omega)$, podemos derivá-la até m vezes no sentido fraco. Portanto, $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(...\frac{\partial u}{\partial x_{i_k}}\right)\right)$ para $0 \leq k \leq m$ e $i_j \in \{1, ..., n\}$ para todo $j \in \{1, ..., k\}$, está bem definida: Se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(...\frac{\partial u}{\partial x_{i_k}}\right)\right)\varphi dx = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(...\frac{\partial u}{\partial x_{i_k}}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_1}}dx$$
$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_{i_3}}\left(...\frac{\partial u}{\partial x_{i_k}}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}dx = ... = (-1)^k \int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_k}...\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}dx.$$

Como $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, então as derivadas de φ comutam. Assim, se $\pi : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., k\}$ for uma comutação (ou seja, uma função bijetora), então

$$(-1)^k \int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_k}...\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}dx = (-1)^k \int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_{\pi(k)}}...\partial x_{i_{\pi(2)}}\partial x_{i_{\pi(1)}}}dx$$
$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(1)}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{\pi(2)}}}\left(...\frac{\partial u}{\partial x_{i_{\pi(k)}}}\right)\right)\varphi dx.$$

Concluímos, assim, que a ordem da derivação fraca não importa. Isto é análogo ao que ocorre com derivadas clássicas em $C^m(\Omega)$. Tal como nas derivadas clássicas, podemos usar a notação:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(...\frac{\partial u}{\partial x_{i_k}}\right)\right)$$

para as derivadas fracas de ordem mais alta.

Como a ordem de derivação não é importante nos espaços $H^m(\Omega)$, a notação de multiíndice costuma ser muito útil. Para $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, com $|\alpha| \leq m$, e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, vemos, usando o mesmo argumento anterior, que

$$\int_\Omega \partial_x^\alpha u \varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u \partial_x^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Resumindo, podemos dar a seguinte caracterização de espaços $H^m(\Omega)$.

Proposição 183. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dizemos que $u \in H^m(\Omega)$ se, e somente se, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| \leq m$, existir $u_\alpha \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u \partial_x^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{4.5.1}$$

Neste caso, $\partial_x^\alpha u = u_\alpha$.

Demonstração. Vimos que se $u \in H^m(\Omega)$, então $\partial_x^\alpha u$ satisfaz (4.5.1). Por outro lado, se existir $u_\alpha \in L^2(\Omega)$ que satisfaz (4.5.1) para todo $|\alpha| \leq m$, então u tem todas as derivadas fracas de ordem menor ou igual a m. Portanto $u \in H^m(\Omega)$. □

Como o conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, existe no máximo uma função u_α que satisfaz (4.5.1) para cada $|\alpha| \leq m$. Portanto, as derivadas de ordem mais alta também são unicamente definidas (para quase todo ponto, como sempre).

Um ponto fundamental da teoria é a completude do espaço $H^m(\Omega)$, como visto abaixo.

Teorema 184. *O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m}\int_\Omega \partial_x^\alpha u(x)\partial_x^\alpha v(x)dx.$$

As seguintes propriedades dos espaços $H^m(\Omega)$ podem ser demonstradas com argumentos análogos aos usados para o espaço $H^1(\Omega)$.

PROPOSIÇÃO 185. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^∞. Logo*
1) (Extensão) Existe uma transformação linear contínua $\mathcal{E} : H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{E}(u)(x) = u(x)$, para todo $x \in \Omega$.
2) (Aproximação) Dado $u \in H^m(\Omega)$, existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^m(\Omega)} = 0$.

Em $\mathbb{R}^n$ também temos o seguinte resultado de aproximação.

PROPOSIÇÃO 186. *Seja $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = 0$.*

Os resultados e definições acima podem ser trivialmente generalizados para funções com valores complexos[3]. Para tais espaços, podemos usar a transformada de Fourier para caracterizá-los da seguinte forma.

TEOREMA 187. *Seja $k \in \mathbb{N}_0$.*
i. Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, então $u \in H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ se, e somente se, $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto (1+|\xi|^2)^{k/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.
ii. A seguinte função define um produto interno em $H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$:

$$(u,v)_k = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}(1+\|\xi\|^2)^k d\xi.$$

iii. Existe $C > 0$ tal que $\frac{1}{C}\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \le \|u\|_k \le C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}$, para todo $u \in H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, em que

$$\|u\|_k^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2(1+\|\xi\|^2)^k d\xi,$$

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}^2 = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial_x^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}^2.$$

Novamente, a demonstração do teorema acima segue os passos da caracterização de $H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ via transformada de Fourier. O Teorema 187 nos motiva definir os espaços $H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, para todo $s \in [0,\infty[$.

DEFINIÇÃO 188. Seja $s \ge 0$. Dizemos que $u \in H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ se $u \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ e $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

Pode-se mostrar que $H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ também é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$(u,v)_s = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}(1+\|\xi\|^2)^s d\xi.$$

A norma é denotada como $\|u\|_s = \sqrt{(u,u)_s}$. Note que, se $t > s \ge 0$ e $u \in H^t(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, então

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2(1+\|\xi\|^2)^s d\xi \le \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2(1+\|\xi\|^2)^t d\xi = \|u\|_t^2.$$

Logo $u \in H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ e a inclusão $i : H^t(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \to H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ é contínua.

Usando a teoria das distribuições também é possível estender a definição de $H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ para $s < 0$, mas não o faremos aqui no curso.

Até este momento, quase não provamos nada nesta seção. Apenas enunciamos os principais resultados, que, como já dissemos anteriormente, podem ser provados de maneira semelhante aos resultados vistos para H^1.

Vamos finalizar, demonstrando dois novos teoremas que são úteis para aplicações: O teorema do traço e o teorema de inclusão de Sobolev.

[3]Neste caso, o produto interno é dado por

$$(u,v)_{H^m(\Omega;\mathbb{C})} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \partial_x^\alpha u(x)\overline{\partial_x^\alpha v(x)}dx.$$

Vamos começar com o teorema do traço.

Teorema 189. *(Teorema do traço) Existe uma única transformação linear contínua* $\gamma : H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \to H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1};\mathbb{C})$ *tal que*

$$\gamma\varphi(x') = \varphi(x',0), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

A função traço γ nada mais é do que a extensão da função de restrição de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$.

Demonstração. Vamos usar três notações: $\mathcal{F}_{x_n}$ para a transformada de Fourier em x_n, $\mathcal{F}_{x'}$ para a transformada de Fourier em x' e $\mathcal{F}$ para a transformada de Fourier em $x=(x',x_n)$. Assim, para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, temos

$$\mathcal{F}_{x_n}\varphi(x',\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n\xi_n}\varphi(x',x_n)dx_n, \quad \mathcal{F}_{x_n}^{-1}\varphi(x',x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_n\xi_n}\varphi(x',\xi_n)d\xi_n,$$

$$\mathcal{F}_{x'}\varphi(\xi',x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix'\cdot\xi'}\varphi(x',x_n)dx', \quad \mathcal{F}_{x'}^{-1}\varphi(x',x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix'\cdot\xi'}\varphi(\xi',x_n)d\xi',$$

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx, \quad \mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi.$$

Note que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{x'}\mathcal{F}_{x_n}$. Para cada $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, a função $x_n \mapsto \varphi(x',x_n)$ pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Usando a transformada de Fourier na variável x_n, obtemos

$$\varphi(x',x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_n\xi_n}\mathcal{F}_{x_n}\varphi(x',\xi_n)d\xi_n.$$

Assim,

$$\varphi(x',0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_{x_n}\varphi(x',\xi_n)d\xi_n.$$

Seja $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1};\mathbb{C})$ definida como $g(x') = \varphi(x',0)$. Logo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{x'}g(\xi') &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix'\cdot\xi'}g(x')dx' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix'\cdot\xi'}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_{x_n}\varphi(x',\xi_n)d\xi_n\right)dx' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix'\cdot\xi'}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n\xi_n}\varphi(x',x_n)dx_n d\xi_n dx' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix'\cdot\xi'}e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx\right)d\xi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\varphi(\xi',\xi_n)d\xi_n.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\mathcal{F}_{x'}g(\xi')|^2(1+\|\xi'\|^2)^{1/2}d\xi' = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\varphi(\xi',\xi_n)d\xi_n\right|^2(1+\|\xi'\|^2)^{1/2}d\xi' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\varphi(\xi',\xi_n)(1+\|\xi\|^2)^{1/2}(1+\|\xi\|^2)^{-1/2}d\xi_n\right|^2(1+\|\xi'\|^2)^{1/2}d\xi' \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}\varphi(\xi',\xi_n)|^2(1+\|\xi\|^2)d\xi_n\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+\|\xi\|^2)^{-1}d\xi_n\right)(1+\|\xi'\|^2)^{1/2}\right]d\xi'.
\end{aligned}$$

Agora observe que

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+\|\xi\|^2)^{-1}d\xi_n = \int_{-\infty}^{\infty}(1+\|\xi'\|^2+\xi_n^2)^{-1}d\xi_n$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{1+\|\xi'\|^2}}\right)^2\right)^{-1}\frac{d\xi_n}{(1+\|\xi'\|^2)}$$
$$= \frac{1}{(1+\|\xi'\|^2)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+y^2)}dy = \frac{\pi}{(1+\|\xi'\|^2)^{1/2}}.$$

Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|g\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}\varphi(\xi)|^2(1+\|\xi\|^2)d\xi' = C\|\varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n)$, obtemos o resultado do Teorema 66. □

COROLÁRIO 190. *Seja $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou Ω um aberto limitado de classe C^1. Logo existe uma única transformação linear contínua $\gamma_\Omega : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ tal que, para todo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos*

$$\gamma_\Omega(u|_\Omega)(x) = u(x), \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Note que se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $u|_\Omega \in H^1(\Omega)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\gamma : H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \to H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1};\mathbb{C})$ e a inclusão $i : H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1};\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}^{n-1};\mathbb{C})$ são contínuas, então $i\circ\gamma : H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}^{n-1};\mathbb{C})$ é contínua. Denotaremos por $i\circ\gamma$ simplesmente por γ. Restringindo γ a funções com valores reais, concluímos que $\gamma : H^1(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ é contínua.

Para provar o teorema para $\mathbb{R}^n_+$, fixamos inicialmente um operador de extensão $\mathcal{E} : H^1(\mathbb{R}^n_+) \to H^1(\mathbb{R}^n)$. Assim, a função procurada é dada por $\gamma_{\mathbb{R}^n_+} = \gamma\circ\mathcal{E}$.

Para provar o teorema para Ω, procedemos da seguinte maneira. Para cada $x \in \partial\Omega$, consideremos um difeomorfismo $H_x : Q \to U_x$ como na definição de aberto de classe C^1. Podemos supor, sem perda de generalidade, que as derivadas de H_x e de H_x^{-1} são limitadas. Como $\overline{\Omega} \subset \Omega\cup(\cup_{x\in\partial\Omega}U_x)$ e $\overline{\Omega}$ é um compacto, concluímos que

$$\overline{\Omega} \subset \Omega\cup U_{x_1}\cup\ldots\cup U_{x_N}.$$

De acordo com o Teorema 141, existem funções C^∞ denotadas por $(\psi_j)_{j=1}^{N+1}$ tais que $\mathrm{supp}(\psi_j) \subset U_{x_j}$, para cada $j \in \{1,\ldots,N\}$, $\mathrm{supp}(\psi_{N+1}) \subset \Omega$ e $\sum_{j=1}^{N+1}\psi_j(x) = 1$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Em particular, $\sum_{j=1}^{N}\psi_j(x) = 1$ para todo $x \in \partial\Omega$.

Sabemos que $u\circ H_{x_j} \in H^1(Q_+)$, pela Proposição 155. Logo existe uma extensão $v_j \in H^1(Q)$ de $u\circ H_{x_j}$. Usando a Proposição 165, concluímos que $\psi_j\circ H_{x_j}v_j \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Assim, podemos definir

$$\gamma_\Omega u(x) = \sum_{j=1}^{N}\gamma(\psi_j\circ H_{x_j}v_j)(H_{x_j}^{-1}(x)), \quad x \in \partial\Omega.$$

Note que se $x \in \Omega$ e $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $H_{x_j}^{-1}(x) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ e

$$\gamma_\Omega u(x) = \sum_{j=1}^{N}\gamma(\psi_j\circ H_{x_j}v_j)(H_{x_j}^{-1}(x)) = \sum_{j=1}^{N}\psi_j\circ H_{x_j}(H_{x_j}^{-1}(x))u\circ H_{x_j}(H_{x_j}^{-1}(x))$$
$$= \sum_{j=1}^{N}\psi_j(x)u(x) = u(x).$$

□

Para o teorema de imersão de Sobolev, vamos inicialmente definir a classe de funções $C_b^m(\mathbb{R}^n)$.

Definição 191. Seja $m \in \mathbb{N}_0$. O espaço $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ consiste em todas as funções em $C^m(\mathbb{R}^n)$, cujas derivadas de ordem menor ou igual a m são todas limitadas. Para este espaço, definimos a norma $u \in C_b^m(\mathbb{R}^n) \mapsto \|u\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n)} \in [0,\infty[$ por

$$\|u\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial_x^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Vamos precisar da seguinte proposição.

Proposição 192. *Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C_b^m(\mathbb{R}^n)$, ou seja, uma sequência para a qual, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $j,k > N$, então $\|u_j - u_k\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Logo existe $u \in C_b^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n)} = 0$.*

Não daremos a demonstração da Proposição 192, porém ela pode ser feita usando os resultados do capitulo V.6 do Curso de Análise, volume 2, do Elon Lages Lima.

A definição e as propriedades de $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ se estendem para funções com valores complexos também, que será denotado por $C_b^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

Teorema 193. *(Teorema de imersão de Sobolev) Seja $m \in \mathbb{N}_0$ e $s \in \mathbb{R}$ tais que $s > m + \frac{n}{2}$. Então $H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \subset C_b^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.*

Demonstração. Primeiramente observamos que, usando derivação por partes, se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, então

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_x^\alpha u}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \partial_x^\alpha u(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha (e^{-ix\cdot\xi}) u(x)dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi)^\alpha e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi).\end{aligned}$$

Além disso, observamos que, se $t > n/2$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+\|\xi\|^2)^{-t} d\xi \leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dS(x) \int_0^\infty (1+r^2)^{-t} r^{n-1} dr < \infty,$$

pois $-2t + n - 1 < -1$.

Assim, se $|\alpha| \leq m$ e $t > n/2$ for tal que $s = m + t$, então

$$\begin{aligned}|\partial_x^\alpha u(x)| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \widehat{\partial_x^\alpha u}(\xi) d\xi \right| = \left| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) d\xi \right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha||\widehat{u}(\xi)| d\xi \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|\xi\|^2)^{(m+t)/2} (1+\|\xi\|^2)^{-t/2} |\widehat{u}(\xi)| d\xi \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (1+\|\xi\|^2)^{m+t} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (1+\|\xi\|^2)^{-t} d\xi} \\ &\leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}, \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}).$$

Consideremos agora $u \in H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Pela Proposição 186, existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ que converge para $u \in H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Logo $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Portanto, também é uma sequência de Cauchy em $C_b^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, pois

$$\|u_j - u_k\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \leq C \|u_j - u_k\|_{H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}.$$

Assim, $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge em $C_b^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, pela Proposição 192, ou seja, existe $v \in C_b^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j - v\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}.$$

Por fim, se provarmos que $u = v$, então concluiremos que $u \in C_b^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Para tanto, seja $R > 0$ e $\chi \in C_c^\infty(B(0,2R))$ tal que $0 \le \chi \le 1$ e $\chi(x) = 1$ para todo $x \in B(0,R)$. Seja $|B(0,2R)| = \int_{B(0,2R)} dx$. Portanto,

$$\begin{aligned}\|\chi u_j - \chi v\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \|\chi u_j - \chi v\|_{L^2(B(0,2R);\mathbb{C})} &= \sqrt{\int_{B(0,2R)} |\chi(u_j - v)|^2 dx} \\ &\le |B(0,2R)| \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_j - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \\ &\le |B(0,2R)| \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_j - v\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\|\chi u_j - \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \sqrt{\int_{B(0,2R)} |\chi(u_j - u)|^2 dx} \le \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_j - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}.$$

Assim, vemos que χu_j converge tanto para χu quanto para χv em $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Logo $\chi u = \chi v$, pela unicidade do limite.

Como $\chi(x) = 1$ para $x \in B(0,R)$, então $u(x) = v(x)$. Porém R é arbitrário, o que implica que $u = v$. □

Corolário 194. *Sejam Ω um aberto limitado de classe C^∞, s e $m \in \mathbb{N}_0$ tais que $s > m + \frac{n}{2}$. Então $H^s(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{E} : H^s(\Omega) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ uma extensão contínua, como na Proposição 185. Logo $\mathcal{E}(u) \in H^s(\mathbb{R}^n) \subset C_b^m(\mathbb{R})$. Portanto, $u|_\Omega = \mathcal{E}(u)|_\Omega \in C^m(\overline{\Omega})$. □

Vamos terminar essa seção com uma aplicação. Para tanto, vamos enunciar o seguinte teorema, cuja longa demonstração pode ser encontrada no Brezis e no Evans.

Teorema 195. *(Teorema de Regularidade para Problema de Dirichlet) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^∞. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema de Dirichlet, ou seja, u é tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, se $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$.

Usando este teorema podemos obter o seguinte resultado.

Corolário 196. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^∞. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema de Dirichlet, ou seja, u é tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Se $f \in H^m(\Omega)$ e $m > \frac{n}{2}$, então $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e u é uma solução clássica, ou seja, u satisfaz

$$\begin{aligned}-\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

Demonstração. Basta observar que se $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$, pelo Teorema 195. Como $m + 2 > 2 + n/2$, concluímos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$, pelo Corolário 194. Porém já vimos que se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução fraca e Ω é um aberto de classe C^1, então u é uma solução clássica. □

Note que pelo critério acima, se $\Omega \subset \mathbb{R}$, então basta que f pertença a C^1 para termos uma solução clássica. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $n = 2$ e 3, então basta que f pertença a C^2. Estes resultados somente são suficientes, mas não necessários para a obtenção de soluções clássicas. Em uma dimensão, por exemplo, basta que f seja contínua para que a solução seja de classe C^2.

CAPíTULO 5

Equações do calor e da onda em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

5.1. Operadores compactos

Para entendermos o que são operadores compactos, vamos antes dar (ou recordar) algumas definições.

Definição 197. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert. Dizemos que um conjunto $K \subset H$ é um *conjunto compacto* se para toda sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ contida em K, existe uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente e $\lim_{k\to\infty} u_{j_k} \in K$. O conjunto K é dito *pré-compacto* se o seu fecho $\overline{K}$ for compacto.

Diversas propriedades desses espaços podem ser provadas da mesma maneira como fazemos em cursos de análise real.

Proposição 198. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert. Então*
a) Se $K \subset H$ é compacto, então K é fechado.
b) Um conjunto $K \subset H$ é pré-compacto se, e somente se, para toda sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em K existe uma subsequência convergente (não necessariamente para um elemento em K!).

Demonstração. a) Seja $u \in \overline{K}$. Logo existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos contidos em K tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$. Como K é compacto, a sequência admite uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que é convergente e converge para um elemento em K. No entanto, como $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, concluímos que $\lim_{k\to\infty} u_{j_k} = u$ e, portanto, $u \in K$.

Mostramos que $\overline{K} \subset K$, o que implica que $K = \overline{K}$ e K é fechado.

b) ($\Longrightarrow$)

Seja $K \subset H$ um conjunto pré-compacto. Por definição, $\overline{K}$ é compacto. Portanto, se $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos em $K \subset \overline{K}$, então existe uma subsequência convergente em $\overline{K}$.

($\Longleftarrow$)

Agora vamos supor que toda sequência em K tenha uma subsequência convergente em H. Vamos mostrar que $\overline{K}$ é um conjunto compacto. Para tanto, suponha que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência em $\overline{K}$. Pela definição de K, para cada u_j, existe $v_j \in K$ tal que $\|u_j - v_j\|_H < 1/j$. Consideremos então a sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em K. Ela admite uma subsequência $(v_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente em $\overline{K}$, por hipótese. Seja $u = \lim_{k\to\infty} v_{j_k} \in \overline{K}$. Vamos mostrar que $u = \lim_{k\to\infty} u_{j_k}$. De fato, basta observar que

$$\|u - u_{j_k}\| = \|u - v_{j_k} + v_{j_k} - u_{j_k}\| \leq \|u - v_{j_k}\| + \|v_{j_k} - u_{j_k}\|.$$

Como os dois últimos termos do lado direito acima vão a zero, concluímos que $\lim_{k\to\infty} u_{j_k} = u$ e, portanto, $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. □

Agora estamos em condições de definir um operador compacto.

Definição 199. Dado um operador $T : H \to H$ linear e contínuo, dizemos que T é um *operador compacto* se, dado um conjunto $B \subset H$ limitado, o conjunto $T(B) = \{Tx : x \in B\}$ é um conjunto pré-compacto.

Vamos denotar o conjunto dos operadores compactos de H em H por $\mathcal{K}(H)$. Fica a cargo do leitor provar que $\mathcal{K}(H)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(H)$.

Uma caracterização dos operadores compactos é dada da seguinte maneira.

Proposição 200. *Um operador linear contínuo $T : H \to H$ é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, existir uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$)

Vamos supor que T seja um operador compacto.

Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Assim, o conjunto $B = \{u_j : j \in \mathbb{N}\}$ é limitado. Como T é compacta, então T leva o conjunto B em um subconjunto pré-compacto. A sequência $(Tu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tem, portanto, uma subsequência convergente, já que pertence a $T(B)$. Concluímos que existe uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente.

($\Longleftarrow$)

Vamos agora supor que para toda sequência limitada $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, existir uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Seja B um conjunto limitado de H e $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $T(B)$. Logo $v_j = Tu_j$, em que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em B. Assim, pela nossa hipótese, existe uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Portanto, $(v_{j_k})_{k\in\mathbb{N}} = (Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge e $T(B)$ é pré-compacto. Concluímos que T é um operador compacto. $\square$

Proposição 201. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert. Logo todo operador linear contínuo é compacto se, e somente se, H tem dimensão finita.*

Demonstração. *Afirmação 1: Se H tem dimensão finita, então todo operador é compacto.*

Suponha que H tenha dimensão finita. Vamos fixar $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de H. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Logo existem α_{jk} tais que $u_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} e_k$. Como $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitado, então existe $M > 0$ tal que $\|u_j\|^2 \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|^2 = \|u_j\|^2 < \infty.$$

Portanto, a sequência $((\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, ..., \alpha_{jn}))_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}^n$. Portanto, existe uma subsequência $(\alpha_{j_l 1}, \alpha_{j_l 2}, ..., \alpha_{j_l n})_{l\in\mathbb{N}}$ convergente em $\mathbb{R}^n$. Seja

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) := \lim_{l\to\infty} (\alpha_{j_l 1}, \alpha_{j_l 2}, ..., \alpha_{j_l n})$$

e definamos $u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Vamos mostrar que $\lim_{l\to\infty} u_{j_l} = u$. De fato,

$$\lim_{l\to\infty} \|u - u_{j_l}\| = \lim_{l\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{j_l k}) e_k\| = \lim_{l\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \alpha_{j_l k}|^2} = 0.$$

Agora, como T é contínuo, concluímos que $(Tu_{j_l})_{l\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Afirmação 2: Se todo operador linear contínuo é compacto, então H tem dimensão finita.

Como a identidade é contínua, então a identidade é um operador compacto, pela hipótese acima. Se H tem dimensão infinita, então existe um conjunto $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ infinito e ortonormal. Consideremos a sequência $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Note que $I(e_j) = e_j$ e a sequência $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada. Porém não tem nenhuma subsequência convergente. De fato, se $(e_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ for uma subsequência de $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$, então

$$\begin{aligned}\|e_{j_k} - e_{j_{k+1}}\| &= \sqrt{(e_{j_k} - e_{j_{k+1}}, e_{j_k} - e_{j_{k+1}})} = \sqrt{(e_{j_k}, e_{j_k}) - 2(e_{j_k}, e_{j_{k+1}}) + (e_{j_{k+1}}, e_{j_{k+1}})} \\ &= \sqrt{\|e_{j_k}\| + \|e_{j_{k+1}}\|} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Logo a subsequência não pode ser de Cauchy. Assim, ela não converge. Concluímos que se todo operador contínuo for compacto, então H tem dimensão finita. $\square$

Como corolário da demonstração acima, temos o seguinte resultado.

Corolário 202. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert. A identidade $I : H \to H$ é um operador compacto se, e somente se, H é um espaço de dimensão finita.*

Um último resultado que usaremos bastante é o seguinte.

PROPOSIÇÃO 203. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert, $T : H \to H$ um operador compacto e $F \subset H$ um subespaço fechado de H. Se $T(F) \subset F$, então a restrição de T ao espaço de Hilbert F, ou seja, $T : F \to F$, define um operador compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$uma sequência limitada em F. Logo existe uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge em H, pois T é compacto. Como $Tu_{j_k} \in F$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e F é fechado, concluímos que a subsequência $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para um elemento de F. Portanto, $T : F \to F$ é compacto, pela Proposição 200. $\square$

5.1.1. Operadores compactos e autoadjuntos. Entre os operadores compactos, destacaremos aqueles que também são autoadjuntos.

DEFINIÇÃO 204. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador limitado. Dizemos que $u \in H\backslash\{0\}$ é um *autovetor* e λ é um *autovalor* se $Tu = \lambda u$. Neste caso, dizemos que λ é autovalor associado a u e vice-versa.

Se H for um espaço de funções, como $L^2(\Omega)$, é comum chamar os autovetores de *autofunções*. Note que $u \in H\backslash\{0\}$ é um autovetor associado a λ se, e somente se, $u \in N(T - \lambda I)$ e $u \neq 0$.

Nosso principal objetivo é provar aqui um resultado análogo ao teorema espectral que conhecemos de álgebra linear. Queremos mostrar que, quando H for separável e $T : H \to H$ for autoadjunto e compacto, então existe uma base de H formada apenas de autovetores de T.

Vamos lembrar aqui de algumas propriedades dos autovalores e autovetores de operadores autoadjuntos.

PROPOSIÇÃO 205. *Sejam $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert, $T : H \to H$ um operador autoadjunto. Sejam $u, v \in H$ dois vetores não nulos tais que $Tu = \lambda u$ e $Tv = \mu v$. Se $\lambda \neq \mu$, então u é ortogonal a v.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que
$$\mu(u, v) = (\mu u, v) = (Tu, v) = (u, Tv) = (u, \lambda v) = \lambda(u, v).$$
Logo $(\lambda - \mu)(u, v) = 0$ e, portanto, $(u, v) = 0$. $\square$

PROPOSIÇÃO 206. *Sejam $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador compacto e autoadjunto. Se $\lambda \neq 0$ é um autovalor de T, então $N(T - \lambda)$ tem dimensão finita.*

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que $F := N(T - \lambda)$ é um espaço de Hilbert, por ser fechado. Note que $\frac{1}{\lambda}T$ quando restrito a F é igual a identidade (observe que $u \in F$ se, e somente se, $Tu - \lambda u = 0$, ou seja, se $\frac{1}{\lambda}Tu = u$). Em particular, $\frac{1}{\lambda}T$ leva elementos de F em elementos em F. Pela Proposição 203, $\frac{1}{\lambda}T : F \to F$ é compacto. Portanto, a identidade $I : F \to F$ é compacta. Logo F tem dimensão finita, pelo Corolário 202. $\square$

PROPOSIÇÃO 207. *Sejam $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert, $T : H \to H$ um operador compacto e autoadjunto e Λ o conjunto dos autovalores de T. Logo $\Lambda_R = \{\lambda \in \Lambda : |\lambda| \geq R\}$ é finito para todo $R > 0$. Em particular, Λ é um conjunto enumerável e não possui ponto de acumulação diferente de zero.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que Λ_R seja infinito para algum $R > 0$. Logo podemos encontrar uma sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos distintos em Λ_R. Consideremos uma sequência $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos tais que $\|e_j\| = 1$ e $Te_j = \lambda_j e_j$. Como T é autoadjunto, então o conjunto $\mathcal{C}$ é ortonormal.

Sabemos que T é compacto, por hipótese. Logo existe uma subsequência $(e_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(Te_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. No entanto, $Te_{j_k} = \lambda_{j_k} e_{j_k}$ e
$$\begin{aligned}
\|Te_{j_k} - Te_{j_l}\| = \|\lambda_{j_k} e_{j_k} - \lambda_{j_l} e_{j_l}\| &= \sqrt{(\lambda_{j_k} e_{j_k} - \lambda_{j_l} e_{j_l}, \lambda_{j_k} e_{j_k} - \lambda_{j_l} e_{j_l})} \\
&= \sqrt{|\lambda_{j_k}|^2 (e_{j_k}, e_{j_k}) - 2\lambda_{j_k}\lambda_{j_l}(e_{j_k}, e_{j_l}) + |\lambda_{j_l}|^2 (e_{j_l}, e_{j_l})} \\
&= \sqrt{|\lambda_{j_k}|^2 \|e_{j_k}\| + |\lambda_{j_l}|^2 \|e_{j_l}\|} = \sqrt{|\lambda_{j_k}|^2 + |\lambda_{j_l}|^2} \geq \sqrt{2}R.
\end{aligned}$$

Assim, a subsequência $(Te_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ não é de Cauchy. Portanto não pode convergir. Temos uma contradição e concluímos que Λ_R é finito.

Observando que $\Lambda\backslash\{0\} = \cup_{j\in\mathbb{N}}\Lambda_{1/j}$, concluímos que $\Lambda\backslash\{0\}$ é união enumerável de conjuntos enumeráveis. Logo Λ é enumerável (pode ser finito ou infinito enumerável).

Por fim, se Λ tiver um ponto de acumulação $\lambda_a \neq 0$, então necessariamente haverá infinitos elementos em Λ maiores do que $\frac{|\lambda_a|}{2}$, ou seja, em $\Lambda_{|\lambda_a|/2}$. Mas isto contradiz o que vimos anteriormente. □

Um passo fundamental para provar o teorema espectral é a existência de autovetores. Isto é o conteúdo da próxima proposição.

PROPOSIÇÃO 208. *Seja $(H,(.,.))$ um espaço de Hilbert, cuja dimensão é maior ou igual a 1. Se $T : H \to H$ é um operador compacto e autoadjunto, então $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é autovalor de T, ou seja, existe $y \in H$, $y \neq 0$, tal que $Ty = \|T\|y$ ou $Ty = -\|T\|y$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $\|T\| = 0$, então $T = 0$. Logo todo vetor $u \neq 0$ é um autovetor de T, pois $Tu = 0 = 0u$. Portanto, zero é um autovalor de T e a proposição está provada. Vamos supor então que $\|T\| \neq 0$.

Sabemos que

$$\|T\| = \sup_{u\in H\backslash\{0\}} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{u\in H\backslash\{0\}} \|T\frac{u}{\|u\|}\| = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| = \sup\{\|Tu\| : u \in H, \|u\| = 1\}.$$

Assim, pela definição de supremo, existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em H tal que $\|u_j\| = 1$ e $\lim_{j\to\infty} \|Tu_j\| = \|T\|$. Como $\|T\| > 0$, podemos supor que $\|Tu_j\| > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, sem perda de generalidade.

Pela hipótese, o operador T é compacto e a sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada. Portanto, existe um subsequência $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge em H. Por ser uma subsequência de $(Tu_j)_{j\in\mathbb{N}}$, é claro que

$$\lim_{j\to\infty} \|Tu_{j_k}\| = \lim_{j\to\infty} \|Tu_j\| = \|T\|.$$

Vamos agora estudar a subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Afirmação 1: A subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Note que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|T^2u_{j_k} - \|Tu_{j_k}\|^2u_{j_k}\|^2 \\
&= (T^2u_{j_k} - \|Tu_{j_k}\|^2u_{j_k}, T^2u_{j_k} - \|Tu_{j_k}\|^2u_{j_k}) \\
&= (T^2u_{j_k}, T^2u_{j_k}) - 2(T^2u_{j_k}, \|Tu_{j_k}\|^2u_{j_k}) + (\|Tu_{j_k}\|^2u_{j_k}, \|Tu_{j_k}\|^2u_{j_k}) \\
&\overset{(1)}{=} \|T^2u_{j_k}\|^2 - 2\|Tu_{j_k}\|^2(Tu_{j_k}, Tu_{j_k}) + \|Tu_{j_k}\|^4(u_{j_k}, u_{j_k}) \\
&= \|T^2u_{j_k}\|^2 - \|Tu_{j_k}\|^4 \leq \|T^2\|^2\|u_{j_k}\|^2 - \|Tu_{j_k}\|^4 \overset{(2)}{\leq} \|T\|^4 - \|Tu_{j_k}\|^4.
\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Em (1), usamos que T é autoadjunto. Em (2) usamos que $\|T^2\| \leq \|T\|^2$. De fato, se $v \in H$, então

$$\|T^2v\| = \|T(Tv)\| \leq \|T\|\|Tv\| \leq \|T\|^2\|v\|.$$

Observamos agora que

$$\lim_{k\to\infty} (\|T\|^4 - \|Tu_{j_k}\|^4) = \|T\|^4 - \|T\|^4 = 0.$$

Assim, pelo teorema do confronto e pela desigualdade provada em (5.1.1), concluímos que $\lim_{k\to\infty} T^2u_{j_k} - \|Tu_{j_k}\|^2u_{j_k} = 0$. Como $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge e T é contínua, então $(T^2u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ também converge. Assim,

$$\lim_{k\to\infty} u_{j_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{T^2u_{j_k} - (T^2u_{j_k} - \|Tu_{j_k}\|^2u_{j_k})}{\|Tu_{j_k}\|^2} = \frac{\lim_{k\to\infty} T^2u_{j_k}}{\|T\|^2} \tag{5.1.2}$$

e a subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Afirmação 2: Seja $u = \lim_{k\to\infty} u_{j_k}$. Logo u é um autovetor de T^2 e seu autovalor é $\|T\|^2$.

Como T é contínua, então T^2 também é contínua e $\lim_{k\to\infty} T^2 u_{j_k} = T^2 u$. Portanto, $T^2 u = \|T\|^2 u$ pela Equação (5.1.2). Note que $u \neq 0$, pois

$$\|u\| = \|\lim_{k\to\infty} u_{j_k}\| = \lim_{k\to\infty} \|u_{j_k}\| = 1.$$

Concluímos que u é autovetor de T^2 com autovalor $\|T\|^2$.

Afirmação 3: Sejam $u = \lim_{k\to\infty} u_{j_k}$ e $v = Tu + \|T\|u$. Então ou u é um autovetor de T com autovalor $-\|T\|$ ou v é diferente de zero e é autovetor de T com autovalor $\|T\|$.

Vimos que $T^2 u - \|T\|^2 u = 0$. Portanto,

$$(T - \|T\|)(T + \|T\|)u = T^2 u - \|T\|^2 u = 0.$$

Se $(T + \|T\|)u = 0$, então $Tu = -\|T\|u$ e $-\|T\|$ é um autovalor associado ao autovetor u. Se $v := (T + \|T\|)u \neq 0$, então

$$(T - \|T\|)v = 0 \implies Tv = \|T\|v$$

e $\|T\|$ é o autovalor associado ao autovetor v. □

Estamos agora em condições de provar o teorema principal.

TEOREMA 209. *Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert separável com dimensão maior ou igual a um e $T : H \to H$ um operador compacto e autoadjunto. Logo existe uma base de Hilbert $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ composta apenas de autovetores de T, ou seja, $Te_j = \lambda_j e_j$, para algum $\lambda_j \in \mathbb{R}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\Lambda = \{\lambda_j : j \in \mathbb{I}\}$ o conjunto enumerável de autovalores, isto é, $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Pela Proposição 208, este conjunto é diferente de zero. Para cada $\lambda_j \in \Lambda$, definimos $E_{\lambda_j} = N(T - \lambda_j)$ e encontramos $\mathcal{B}_{\lambda_j}$ uma base de Hilbert do espaço E_{λ_j}. Seja $\mathcal{B} = \cup_{j\in\mathbb{I}} \mathcal{B}_{\lambda_j}$. Este conjunto é ortonormal, pois $\mathcal{B}_{\lambda_j}$ é ortonormal para cada $j \in \mathbb{I}$ e os elementos de $\mathcal{B}_\lambda$ e $\mathcal{B}_\mu$ são ortogonais para $\lambda \neq \mu$, pela Proposição 205.

Pelo Corolário 60, basta mostramos que $\mathcal{B}^\perp = \{0\}$ para concluir que $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert (Lembramos que $\mathcal{B}^\perp = \{u \in H : (u, v) = 0, \forall v \in \mathcal{B}\}$).

Pela Proposição 52, o conjunto $\mathcal{B}^\perp$ é um subespaço fechado de H.

Ele também é invariante pela aplicação T, ou seja, $T(\mathcal{B}^\perp) \subset \mathcal{B}^\perp$. De fato, se $u \in \mathcal{B}^\perp$ e $v \in \mathcal{B}$, então $Tv = \lambda_j v$, para algum $\lambda_j \in \Lambda$. Assim,

$$(Tu, v) = (u, Tv) = (u, \lambda_j v) = \lambda_j (u, v) = 0$$

e, portanto, $Tu \in \mathcal{B}^\perp$.

Por fim, se $\mathcal{B}^\perp \neq \{0\}$, então o operador $T : \mathcal{B}^\perp \to \mathcal{B}^\perp$ é compacto e autoadjunto, pela Proposição 203. Assim, pela Proposição 208, concluímos que existe $y \in \mathcal{B}^\perp$, $y \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Ty = \lambda y$. Logo $\lambda \in \Lambda$ e $y \in N(T - \lambda)$. Como y é ortogonal a todo elemento de $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}$, concluímos que $y = 0$, pois $\mathcal{B}_\lambda$ é uma base de $N(T - \lambda)$. Isto é um absurdo. Assim, $\mathcal{B}^\perp = \{0\}$. □

O seguinte corolário será útil para o estudo dos operadores que serão apresentados na próxima seção.

COROLÁRIO 210. *Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e $T : H \to H$ um operador autoadjunto e compacto. Se T só tiver autovalores estritamente positivos (> 0), então existe uma base de Hilbert $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de H formada apenas de autovetores de H e uma sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ contendo infinitos elementos distintos tal que:*

i. $Te_j = \lambda_j e_j$.

ii. Para todo $j \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k = \lambda_j\}$ é finito.

iii. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq ... > 0$.

iv. $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Teorema 209, sabemos que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ formada apenas de autovetores de T. Isto prova i. Se $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tiver apenas finitos elementos distintos λ_1, ..., λ_N, então, pela Proposição 206, o espaço H tem dimensão finita, pois H é gerado pelos elementos de $\mathcal{B} \subset N(T - \lambda_1) \cup ... \cup N(T - \lambda_N)$. Isto é um absurdo, pois estamos supondo que $\dim(H) = \infty$.

O número de elementos do conjunto $\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k = \lambda_j\}$ deve ser finito. De fato, basta observar que

$$\#\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k = \lambda_j\} = \dim N(T - \lambda_j) < \infty,$$

pela Proposição 206. Acima # denota o número de elementos do conjunto em questão.

Pela Proposição 207, $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ não tem ponto de acumulação diferente de zero. Como cada λ_j se repete finitas vezes, podemos ordená-los do maior para o menor. Isto prova iii. Por fim, a sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é não-crescente e limitada. Logo converge. Seu limite deve ser zero, já que esse é o único ponto de acumulação, novamente pela Proposição 207 $\square$

5.1.2. Operadores não limitados. Como vimos anteriormente, é natural definirmos o Laplaciano Δ apenas em subespaços de um espaço de Hilbert. Por exemplo, nos subespaços $H^2(\mathbb{R}^n)$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ ou $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ de $L^2(\Omega)$.

Isso é comum na teoria de equações diferenciais parciais: os operadores lineares que correspondem operadores diferenciais não são contínuos nem estão definidos em todo o espaço de Hilbert. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 211. Dado um espaço de Hilbert H. Um *operador não limitado* $A : \mathcal{D}(A) \to H$ é uma transformação linear definida em um subespaço de H, denotado por $\mathcal{D}(A)$, chamado de *domínio de* A. Dizemos que o operador A é *densamente definido* se $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$.

Note que na definição acima, o operador não limitado pode ou não ser contínuo (isto pode causar alguma confusão entre diferentes referências...). Nas aplicações em EDPs, ele costuma não ser contínuo.

Operadores não limitados podem ser definidos através de uma função bilinear. Para as definições e resultados abaixo, se $V \subset H$ são dois conjuntos, então diremos que uma função $i : V \to H$ é a *função inclusão* se $i(v) = v$, para todo $v \in V$.

Definição 212. Sejam $(H, (.,.)_H)$ e $(V, (.,.)_V)$ dois espaços de Hilbert tais que V é um subespaço denso de H e a inclusão $i : V \to H$ é contínua. Consideremos uma função $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear e contínua. O *operador* $A : \mathcal{D}(A) \to H$ *associado à função* a é definido da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \{u \in V : \exists f \in H \text{ tal que } a(u, v) = (f, v)_H,\ \forall v \in V\}, \\ Au &= f. \end{aligned}$$

Pela definição acima, vemos que A satisfaz $a(u, v) = (Au, v)_H$ para todo $u \in \mathcal{D}(A)$ e $v \in V$.

O operador A está bem definido. De fato, se existirem f e g em H tais que $a(u, v) = (f, v)_H = (g, v)_H$ para todo $v \in V$, então $(f - g, v)_H = 0$ para todo $v \in V$. Como V é denso em H, concluímos que $f = g$.

Além disso, é simples verificar que $\mathcal{D}(A)$ é um espaço vetorial e que A é linear. De fato, se u e w pertencem a $\mathcal{D}(A)$, então $a(u, v) = (Au, v)_H$ e $a(w, v) = (Aw, v)_H$, para todo $v \in V$. Logo

$$a(\alpha u + \beta w, v) = \alpha a(u, v) + \beta a(w, v) = \alpha(Au, v)_H + \beta(Aw, v)_H = (\alpha Au + \beta Aw, v)_H.$$

Assim, pela definição, vemos que $\alpha u + \beta w \in \mathcal{D}(A)$ e $A(\alpha u + \beta w) = \alpha Au + \beta Aw$.

Para nossas aplicações, será importante que a inclusão $i : V \to H$ além de ser contínua, também seja compacta, conforme definiremos abaixo.

Definição 213. Sejam $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ e $(V, (\cdot,\cdot)_V)$ dois espaços de Hilbert tais que $V \subset H$. Dizemos que a *inclusão* $i : V \to H$ *é compacta* se

i. i é contínua, ou seja, existe $C > 0$ tal que $\|v\|_H \leq C\|v\|_V$ para todo $v \in V$.

ii. Toda sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ limitada em V (ou seja, $\sup_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\|_V < \infty$) tem uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente em H (ou seja, existe $u \in H$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|u_{j_k} - u\|_H = 0$).

Note que a definição acima equivale a dizer que os conjuntos limitados de V são pré-compactos em H, ou seja, i leva limitado (em V) em pré-compacto (em H).

A proxima proposição garante que um operador linear contínuo de H em V pode ser considerado um operador compacto em H, quando a inclusão $i : V \to H$ for compacta.

PROPOSIÇÃO 214. Sejam $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ e $(V, (\cdot,\cdot)_V)$ dois espaços de Hilbert tais que $V \subset H$. Se $T : H \to V$ é um operador linear contínuo e a inclusão $i : V \to H$ é compacta, então $i \circ T : H \to H$ é um operador compacto.

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que existem constantes C_1 e $C_2 > 0$ tais que

$$\|i(v)\|_H \le C_1 \|v\|_V \quad \text{e} \quad \|Tu\|_V \le C_2 \|u\|_H,$$

para todo $u \in H$ e $v \in V$, já que T e i são transformações lineares e contínuas. Assim, $i \circ T$ é uma transformação linear tal que

$$\|i \circ Tu\|_H \le C_1 \|Tu\|_V \le C_1 C_2 \|u\|_H.$$

Portanto, $i \circ T$ é contínua.

Agora considere $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em H. Logo existe $C > 0$ tal que $\|u_j\|_H \le C$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\|Tu_j\|_V \le C_2 \|u_j\|_H \le C_2 C, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Assim, $(Tu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em V. Como a inclusão é compacta, existe uma subsequência $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge em H. Concluímos, assim, que $i \circ T : H \to H$ é um operador compacto. □

Muitas vezes denotaremos $i \circ T$ simplesmente por T. Agora vamos ao nosso principal teorema dessa seção.

TEOREMA 215. *Sejam $(H, (.,.)_H)$ e $(V, (.,.)_V)$ dois espaços de Hilbert e uma função $a : V \times V \to \mathbb{R}$ tais que*

(Hipótese 1) H é separável, tem dimensão infinita, V é um subespaço denso de H e a inclusão $i : V \to H$ é compacta.

(Hipótese 2) $a : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma função bilinear, simétrica, contínua e coerciva.

Seja $A : \mathcal{D}(A) \to H$ o operador associado a a. Nessas condições, existe uma base de Hilbert $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de H contida em $\mathcal{D}(A)$ e uma sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números estritamente positivos (ou seja, maiores do que zero) tais que

i. $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$.

ii. $Ae_j = \lambda_j e_j$, *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

iii. $\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 (u, e_j)_H^2 < \infty \right\}$.

Observe acima que, como $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$, a desigualdade $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 (u, e_j)_H^2 < \infty$ já implica $\sum_{j=1}^{\infty} (u, e_j)_H^2 < \infty$.

Para provar esse teorema, vamos provar alguns lemas simples antes.

LEMA 216. *Sejam $(H, (.,.)_H)$ e $(V, (.,.)_V)$ dois espaços de Hilbert tais que V é um subespaço denso de H e a inclusão $i : V \to H$ é contínua. Logo para cada $f \in H$, existe um único $f_V \in V$ tal que*

$$(f, v)_H = (f_V, v)_V,$$

para todo $v \in V$. A função $\mathcal{T} : H \to V$ definida como $\mathcal{T}(f) = f_V$ é uma transformação linear contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Como a inclusão $i : V \to H$ é contínua, existe $C > 0$ tal que $\|v\|_H \le C\|v\|_V$ para todo $v \in V$. Assim, dado $f \in H$, a função $v \in V \mapsto (f, v)_H \in \mathbb{R}$ é linear e contínua (é um funcional linear contínuo de V), pois

$$|(f, v)_H| \le \|f\|_H \|v\|_H \le (C\|f\|_H) \|v\|_V.$$

Pelo Teorema de Riesz, existe um único $f_V \in V$ tal que

$$(f_V, v)_V = (f, v)_H. \tag{5.1.3}$$

Vamos definir $\mathcal{T} : H \to V$ por $\mathcal{T}(f) = f_V$. Assim, $\mathcal{T}$ é uma transformação linear, pois se f e $g \in H$, então, para todo $v \in V$, temos

$$(\alpha f_V + \beta g_V, v)_V = \alpha (f_V, v)_V + \beta (g_V, v)_V = \alpha (f, v)_H + \beta (g, v)_H = (\alpha f + \beta g, v)_H.$$

Logo $\mathcal{T}(\alpha f + \beta g) = \alpha f_V + \beta g_V$.

Por fim, $\mathcal{T}$ é contínua, pois

$$\|f_V\|_V^2 = |(f_V, f_V)_V| \overset{(1)}{=} |(f, f_V)_H| \overset{(2)}{\leq} \|f\|_H \|f_V\|_H \overset{(3)}{\leq} C\|f\|_H \|f_V\|_V.$$

Em (1), usamos (5.1.3) para $v = f_V$. Em (2) usamos Cauchy-Schwartz e em (3) a continuidade da inclusão $i : V \to H$. Logo $\|\mathcal{T} f\|_V = \|f_V\|_V \leq C\|f\|_H$. □

Lema 217. *Sejam $(H, (.,.)_H)$ e $(V, (.,.)_V)$ dois espaços de Hilbert tais que V é um subespaço denso de H e a inclusão $i : V \to H$ é contínua. Consideremos uma função $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear, contínua e coerciva e o operador $A : \mathcal{D}(A) \to H$ associado a a. Logo A é uma aplicação linear bijetora e $A^{-1} = T^{-1} \circ \mathcal{T}$, em que*

i. $\mathcal{T} : H \to V$ é a única transformação linear contínua tal que $(\mathcal{T} f, v)_V = (f, v)_H$, para todo $v \in V$.

ii. $T : V \to V$ é a única transformação linear contínua e bijetora tal que $a(u, v) = (Tu, v)_V$.

A prova de que as transformações lineares $\mathcal{T}$ e T existem foram dadas pelo Lema (216) e pelo Teorema 94 (Teorema de Lax-Milgram).

Demonstração. Vamos mostra que A é injetora. Para tanto, basta observar que se $u \in \mathcal{D}(A)$ é tal que $Au = 0$, então

$$0 = (Au, u)_H = a(u, u) \geq c\|u\|_V^2.$$

Assim, $\|u\|_V = 0$ e, portanto, $u = 0$.

Para mostrar que A é sobrejetora, vamos mostrar que, se $f \in H$, então $u := T^{-1} \circ \mathcal{T} f \in \mathcal{D}(A)$ e $Au = f$. Basta observar que

$$a(u, v) = a(T^{-1}\mathcal{T} f, v) = (TT^{-1}\mathcal{T} f, v)_V = (\mathcal{T} f, v)_V = (f, v)_H, \quad \forall v \in V$$

Assim, $u \in \mathcal{D}(A)$ e $Au = f$. □

Estamos enfim em condições de provar o Teorema 215.

Demonstração. (do Teorema 215) Pelo Lema 217, sabemos que $A : \mathcal{D}(A) \to H$ é bijetora e $A^{-1} : H \to \mathcal{D}(A)$ é dada por $A^{-1} = T^{-1} \circ \mathcal{T}$. Sabemos que $\mathcal{D}(A) \subset V \subset H$. Assim, podemos considerar A^{-1} como uma função de H em H, ou seja, $A^{-1} : H \to H$.

Afirmação 1: O operador A^{-1} é autoadjunto e compacto.

Seja $i : V \to H$ a função de inclusão. Logo $A^{-1} = i \circ T^{-1} \circ \mathcal{T}$. Pela Proposição 214, $A^{-1} : H \to H$ é uma transformação linear contínua e compacta.

Para mostrar que A^{-1} é autoadjunta, note primeiro que $a(u, v) = (Au, v)_H$ para todo $u \in \mathcal{D}(A)$ e $v \in V$. Como $A^{-1}u \in \mathcal{D}(A)$ e $A^{-1}v \in \mathcal{D}(A) \subset V$, temos

$$\begin{aligned}(u, A^{-1}v)_H &= (AA^{-1}u, A^{-1}v)_H \overset{(1)}{=} a(A^{-1}u, A^{-1}v) \\ &\overset{(2)}{=} a(A^{-1}v, A^{-1}u) \overset{(3)}{=} (AA^{-1}v, A^{-1}u)_H = (v, A^{-1}u)_H = (A^{-1}u, v)_H.\end{aligned}$$

Em (1) e em (3) usamos que $a(w, v) = (Aw, v)_H$ para todo $w \in \mathcal{D}(A)$, pela definição do operador A. Em (2) usamos que a é simétrica.

Afirmação 2: Existe uma base de Hilbert $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de H contida em $\mathcal{D}(A)$ e uma sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números reais estritamente positivos tais que $Ae_j = \lambda_j e_j$ e $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$.

Pelo Teorema 209 aplicado ao operador autoadjunto e compacto A^{-1}, sabemos que existe uma base de Hilbert $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ tal que $A^{-1}e_j = \mu_j e_j$.

Note que

$$\mu_j = (e_j, \mu_j e_j)_H = (e_j, A^{-1}e_j)_H = (AA^{-1}e_j, A^{-1}e_j)_H = a(A^{-1}e_j A^{-1}e_j) > 0,$$

pois a é coerciva. Logo μ_j são todos positivos.

O conjunto $\{\mu_j : j \in \mathbb{N}\}$ é infinito, converge para zero e podemos ordená-lo de forma não crescente, pelo Corolário 210.

Consideremos agora a sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definida como $\lambda_j = 1/\mu_j$. Logo vemos que

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \lim_{j\to\infty} 1/\mu_j = \infty.$$

Aplicando A nos dois lados de $A^{-1}e_j = \mu_j e_j$, concluímos que $e_j = \mu_j A e_j$, ou seja, $Ae_j = \frac{1}{\mu_j} e_j = \lambda_j e_j$.

Afirmação 3: $\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 (u, e_j)_H^2 < \infty \right\}$.

Vamos começar provando que $\mathcal{D}(A) \subset \left\{ u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 (u, e_j)_H^2 < \infty \right\}$.

Seja $u \in \mathcal{D}(A)$. Logo existe $f \in H$ tal que $u = A^{-1} f$, pois $A^{-1} : H \to \mathcal{D}(A)$ é bijetora. Logo

$$u = A^{-1} f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, e_j)_H A^{-1} e_j = \sum_{j=1}^{\infty} (f, e_j)_H \mu_j e_j.$$

Portanto, $(u, e_j)_H = \mu_j (f, e_j)_H$. Logo

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^2 (u, e_j)_H^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^2 \mu_j^2 (f, e_j)_H^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (f, e_j)_H^2 = \|f\|_H^2 < \infty.$$

Vamos agora provar que $\mathcal{D}(A) \supset \left\{ u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 (u, e_j)_H^2 < \infty \right\}$.

Vamos supor que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 (u, e_j)_H^2 < \infty$. Assim, podemos definir $f := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)_H e_j$. Agora basta observar que

$$A^{-1} f = A^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j) e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j) A^{-1} e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \lambda_j (u, e_j) e_j = \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_j) e_j = u.$$

Como A^{-1} leva H em $\mathcal{D}(A)$, concluímos que $u \in \mathcal{D}(A)$. □

COROLÁRIO 218. *Nas condições do Teorema 215, se $u \in \mathcal{D}(A)$, então $Au = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j (u, e_j) e_j$.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que se $u \in \mathcal{D}(A)$, então $u = A^{-1} f$, em que $f \in H$. Logo

$$u = A^{-1} f = A^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (f, e_j) e_j = \sum_{j=0}^{\infty} (f, e_j) A^{-1} e_j = \sum_{j=0}^{\infty} (f, e_j) \mu_j e_j.$$

Assim, $(u, e_j) = (f, e_j)\mu_j$, ou seja, $(f, e_j) = \lambda_j (u, e_j)$. Portanto

$$Au = \sum_{j=0}^{\infty} (Au, e_j) e_j = \sum_{j=0}^{\infty} (f, e_j) e_j = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j (u, e_j) e_j.$$

□

OBSERVAÇÃO 219. Como $A^{-1} : H \to H$ é contínua, podemos facilmente concluir que

$$A^{-1} f = A^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (f, e_j) e_j = \sum_{j=0}^{\infty} (f, e_j) A^{-1} e_j.$$

No entanto, o mesmo não poderia ser feito diretamente para A, já que A não é limitada. Por essa razão, a demonstração do Corolário anterior é um pouco mais longa.

Terminaremos a seção demonstrando o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 220. *Nas condições do Teorema (215), se $u, v \in \mathcal{D}(A)$, então $(Au, v) = (u, Av)$. Além disso, se $(Au, v) = (u, f)$ para todo $u \in \mathcal{D}(A)$, então $v \in \mathcal{D}(A)$ e $Av = f$.*

DEMONSTRAÇÃO. *Afirmação 1:* $(Au, v) = (u, Av)$ *para todo* $u, v \in \mathcal{D}(A)$.

Basta observar que

$$(Au, v)_H = (Au, A^{-1}Av)_H \stackrel{(1)}{=} (A^{-1}Au, Av)_H = (u, Av)_H.$$

Usamos em (1) que A^{-1} é autoadjunto.

Afirmação 2: Se $(Au, v) = (u, f)$ para todo $u \in \mathcal{D}(A)$, então $v \in \mathcal{D}(A)$ e $Av = f$.

Se $(Au, v) = (u, f)$ para todo $u \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)(v, e_j) = (Au, v) = (u, f) = \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_j)(f, e_j). \tag{5.1.4}$$

Como a igualdade acima vale para todo $v \in \mathcal{D}(A)$, então vale também para $u = e_k$. Se $u = e_k$, então $(u, e_j) = \delta_{jk}$ e $\lambda_k(v, e_k) = (f, e_k)$, pela Equação (5.1.4). Concluímos que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 (v, e_j)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (f, e_j)^2 < \infty$ e, portanto, $v \in \mathcal{D}(A)$. Além disso, $Av = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (v, e_j) e_j = \sum_{j=1}^{\infty} (f, e_j) e_j = f$. □

5.2. Inclusão compacta de $H^1(\Omega)$ e $H^1_0(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$

Para aplicar o teorema espectral ao estudo das equações do calor e da onda, precisamos mostrar que, sob condições apropriadas, a inclusão de espaços de Sobolev em L^2 é compacta. Para provar nossos resultados, faremos uso da transformada de Fourier. Assim, todos os espaços de funções usados nessa seção tem valores complexos.

Nossos principais resultados aqui são o Teorema 227 e o Corolário 228. Esses resultados são chamados de Teorema de Rellich ou Rellich-Kondrachov. De acordo com a Wikipedia, Rellich provou a versão L^2 e Kondrachov a versão L^p. Como no curso estamos lidando apenas com funções L^2, acredito que aqui seria mais correto chamar apenas de Rellich. Esta é a maneira que o Folland (Introduction to Partial Differential Equations), nossa principal referência nessa seção, chama estes resultados.

O resultado seguirá em grande parte do Teorema Arzela-Ascoli, que recordaremos abaixo.

Definição 221. Seja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Dizemos que a sequência é uniformemente equicontínua se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $\|x - y\| < \delta$, então $|f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Exemplo 222. Seja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de classe C^1. Suponha que exista uma constante $M > 0$ tal que $|f_j(x)| \leq M$ e $|\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \{1, ..., n\}$ e $j \in \mathbb{N}$. Logo a sequência é uniformemente equicontínua. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}(M+1)}$. Logo, se $\|x - y\| < \delta$, então

$$\begin{aligned}
|f_j(x) - f_j(y)| &= |\int_0^1 \frac{d}{d\theta} f_j(x + \theta(y - x)) d\theta| = |\int_0^1 \nabla f_j(y + \theta(x - y)) \cdot (x - y) d\theta| \\
&\leq \int_0^1 \|\nabla f_j(y + \theta(x - y))\| d\theta \|x - y\| < M\sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}(M+1)} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Teorema 223. *(Teorema Arzela-Ascoli): Seja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tais que:*

1. Existe $M > 0$ tal que $|f_j(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $j \in \mathbb{N}$.

2. A sequência é uniformemente equicontínua.

Então existe uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ e subsequência $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|f_{j_k} - f\|_{L^\infty(K;\mathbb{C})}$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. (Lembramos aqui $\|f_{j_k} - f\|_{L^\infty(K;\mathbb{C})} = \sup_{x\in K} |f_{j_k}(x) - f(x)|$).

A demonstração do Teorema de Arzela-Ascoli pode ser encontrada em diversos livros de análise real. Não faremos aqui.

Corolário 224. *Seja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ tais que $\sup_{j\in\mathbb{N}} \|f_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} < \infty$ e $\sup_{j\in\mathbb{N}} \|\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} < \infty$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$. Então existe uma subsequência $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e uma função $f \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|f_{j_k} - f\|_{L^\infty(K;\mathbb{C})}$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Basta observar que as condições do Teorema de Arzela-Ascoli são válidas pelo Exemplo 222. □

Para aplicar o Teorema de Arzela-Ascoli para obter inclusão compacta de espaços de Sobolev e L^2, precisaremos antes de alguns resultados preliminares.

PROPOSIÇÃO 225. *Seja $u \in H^1_0(\Omega;\mathbb{C})$. Logo $\tilde{u}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definido como $\tilde{u}(x) = u(x)$ se $x \in \Omega$ e $\tilde{u}(x) = 0$ para $x \notin \Omega$, pertence a $H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. As derivadas de $\tilde{u}$ são dadas por $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_j}}$, em que $\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$, se $x \in \Omega$, e $\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(x) = 0$, se $x \notin \Omega$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $u \in H^1_0(\Omega;\mathbb{C})$, então existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in C^\infty_c(\Omega;\mathbb{C})$ que converge para u em $H^1(\Omega;\mathbb{C})$.

Seja $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Logo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx &= \int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_k(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx \\ &= -\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\varphi(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

□

LEMA 226. *Seja $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ e $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Logo $\widehat{\varphi f} = \hat{\varphi} * \hat{f}$. Além disso, $\widehat{\varphi f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ e*

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\hat{\varphi} * \hat{f} = \widehat{-ix_j\varphi}(\xi) * \hat{f}(\xi),$$

em que $\widehat{-ix_j\varphi}(\xi) = \mathcal{F}(-ix_j\varphi(x))(\xi)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Logo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\varphi(x)f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{iyx}\hat{\varphi}(y)dy\right)f(x)dx \\ = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi-y)x}f(x)dx\right)\hat{\varphi}(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi-y)\hat{\varphi}(y)dy.\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\widehat{\varphi f}(\xi) = \hat{\varphi} * \hat{f}(\xi) = (\hat{f}(\xi-\cdot),\hat{\varphi}(\cdot))_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})},$$

em que o ponto $\cdot$ indica a variável em que estamos integrando.

Seja agora $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Como $C^\infty_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, então existe uma sequência $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $C^\infty_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ tal que $\lim_{j\to\infty}\|f_j - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = 0$. Como a transformada de Fourier é unitária, vemos que

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\varphi f_j} - \widehat{\varphi f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \|\mathcal{F}(\varphi f_j - \varphi f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \\ &= \|\varphi f_j - \varphi f\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \le \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}\|f_j - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

Assim, $\lim_{j\to\infty}\|\widehat{\varphi f_j} - \widehat{\varphi f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = 0$. Passando para uma subsequência se necessário, podemos supor que $\widehat{\varphi f_j}$ converge para $\widehat{\varphi f}$ para quase todo ponto. Desta forma, vemos que, para quase todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\begin{aligned}&\hat{\varphi} * \hat{f}(\xi) = (\hat{f}(\xi-\cdot),\hat{\varphi}(\cdot))_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \lim_{j\to\infty}(\hat{f}_j(\xi-\cdot),\hat{\varphi}(\cdot))_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \\ &= \lim_{j\to\infty}\hat{\varphi} * \hat{f}_j(\xi) = \lim_{j\to\infty}\widehat{\varphi f_j}(\xi) = \widehat{\varphi f}(\xi).\end{aligned}$$

Podemos usar argumentos semelhantes ao Corolário 139 para provar que $\hat{\varphi} * \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ e

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\hat{\varphi} * \hat{f}\right)(\xi) = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \xi_j} * \hat{f}(\xi).$$

Assim, para terminar a prova, observamos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\xi_j} &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(e^{-ix\cdot\xi}\right)\varphi(x)dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}(-ix_j)\varphi(x)dx = \widehat{(-ix_j)\varphi}(\xi).\end{aligned}$$

□

Teorema 227. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Logo a imersão $H^1(\Omega;\mathbb{C}) \to L^2(\Omega;\mathbb{C})$ é compacta.*

Demonstração. Seja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega;\mathbb{C})$. Fazendo a extensão por zero como na Proposição 225, podemos assumir que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ que se anula fora de Ω. Vamos denotar por M a constante $M := \sup_{j\in\mathbb{N}}\|f_j\|_{H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}$.

Fixemos $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ tal que $\chi(x) = 1$ para x em Ω. Assim, $f_j = \chi f_j$ e $\hat{f}_j = \hat{\chi} * \hat{f}_j$ pertence a $C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ pelo Lema 226. Vamos mostrar que $\sup_{j\in\mathbb{N}}\|\hat{f}_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} < \infty$ e $\sup_{j\in\mathbb{N}}\|\frac{\partial \hat{f}_j}{\partial\xi_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} < \infty$ para todo $k \in \{1,...,n\}$.

Para $\hat{f}_j$, basta observar que

$$\begin{aligned}|\hat{f}_j(\xi)| = |\hat{\chi} * \hat{f}_j(\xi)| &= |\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}_j(\xi - y)\hat{\chi}(y)dy| \le \|\hat{f}_j(\xi - \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}\|\hat{\chi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \\ &= \|\hat{f}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}\|\hat{\chi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \le \left(\sup_{j\in\mathbb{N}}\|f_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}\right)\|\chi\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

Para as derivadas, vemos que

$$\begin{aligned}|\frac{\partial}{\partial\xi_j}\hat{f}_j(\xi)| = |\widehat{ix_j\chi} * \hat{f}_j(\xi)| &= |\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}_j(\xi - y)\widehat{ix_j\chi}(y)dy| \le \|\hat{f}_j(\xi - \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}\|\widehat{ix_j\chi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \\ &= \|\hat{f}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}\|\widehat{ix_j\chi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} \le \left(\sup_{j\in\mathbb{N}}\|f_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\|ix_j\chi\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

Pelo Corolário 224, existe uma subsequência $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $g \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ tal que, para todo $R > 0$, temos $\lim_{j\to\infty}\|\hat{f}_{j_k} - g\|_{L^\infty(B(0,R);\mathbb{C})} = 0$. Assim, como

$$\int_{B(0,R)}|\hat{f}_{j_k}(\xi) - g(\xi)|^2 d\xi \le \left(\int_{B(0,R)} 1 d\xi\right)\|\hat{f}_{j_k} - g\|^2_{L^\infty(B(0,R);\mathbb{C})},$$

é claro que $\lim_{j\to\infty}\|\hat{f}_{j_k} - g\|_{L^2(B(0,R);\mathbb{C})} = 0$. Como $(\hat{f}_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge em $L^2(B(0,R);\mathbb{C})$, então $(\hat{f}_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(B(0,R);\mathbb{C})$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $j_k, j_l > N$, temos

$$\|\hat{f}_{j_k} - \hat{f}_{j_k}\|_{L^2(B(0,R);\mathbb{C})} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Este N pode depender de $R > 0$. Vamos fixar $R > 0$ tal que $\frac{2M}{\sqrt{1+R^2}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Assim, se $j_k, j_l > N$, temos

$$\|f_{j_k} - f_{j_l}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \|\hat{f}_{j_k} - \hat{f}_{j_l}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}_{j_k}(\xi) - \hat{f}_{j_l}(\xi)|^2 d\xi$$
$$= \int_{B(0,R)} |\hat{f}_{j_k}(\xi) - \hat{f}_{j_l}(\xi)|^2 d\xi + \int_{B(0,R)^c} |\hat{f}_{j_k}(\xi) - \hat{f}_{j_l}(\xi)|^2 d\xi$$
$$= \int_{B(0,R)} |\hat{f}_{j_k}(\xi) - \hat{f}_{j_l}(\xi)|^2 d\xi + \int_{B(0,R)^c} (1+\|\xi\|^2)^{-1}(1+\|\xi\|^2)|\hat{f}_{j_k}(\xi) - \hat{f}_{j_l}(\xi)|^2 d\xi$$
$$= \int_{B(0,R)} |\hat{f}_{j_k}(\xi) - \hat{f}_{j_l}(\xi)|^2 d\xi + (1+R^2)^{-1}\int_{B(0,R)^c} (1+\|\xi\|^2)|\hat{f}_{j_k}(\xi) - \hat{f}_{j_l}(\xi)|^2 d\xi$$
$$\leq \int_{B(0,R)} |\hat{f}_{j_k}(\xi) - \hat{f}_{j_l}(\xi)|^2 d\xi + (1+R^2)^{-1}\|f_{j_k} - f_{j_l}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})}$$
$$\leq \int_{B(0,R)} |\hat{f}_{j_k}(\xi) - \hat{f}_{j_l}(\xi)|^2 d\xi + (1+R^2)^{-1}4M^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2.$$

Concluímos que $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Portanto converge em $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. □

Corolário 228. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1. Logo a imersão $H^1(\Omega;\mathbb{C}) \to L^2(\Omega;\mathbb{C})$ é compacta.*

Demonstração. Pelo Teorema 160, existe um operador de extensão $\mathcal{E} : H^1(\Omega;\mathbb{C}) \to H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Como Ω é limitado, existe $R > 0$ tal que $\overline{\Omega} \subset B(0,R)$. Seja $\chi \in C_c^\infty(B(0,R))$ tal que $0 \leq \chi \leq 1$ e $\chi(x) = 1$ para todo x num aberto que contém $\overline{\Omega}$, como na Proposição 140.

Assim, vemos que $\chi\mathcal{E}(u) \in H_0^1(B(0,R);\mathbb{C})$, pela Proposição 165. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $H^1(\Omega;\mathbb{C})$. Logo $(\chi\mathcal{E}(u_j))_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(B(0,R);\mathbb{C})$. Pelo Teorema 227, existe $f \in L^2(B(0,R);\mathbb{C})$ e uma subsequência $(\chi\mathcal{E}(u_{j_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|\chi\mathcal{E}(u_{j_k}) - f\|_{L^2(B(0,R);\mathbb{C})} = 0$. Como $\chi(x)\mathcal{E}(u_{j_k})(x) = u_{j_k}(x)$ para todo $x \in \Omega$, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \|u_{j_k} - f\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C})} = 0$$

e $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge em $L^2(\Omega;\mathbb{C})$. □

5.3. Equação do Calor

Para o estudo da equação do calor e da onda, vamos inicialmente estudar uma equação diferencial ordinária com valores num espaço de Hilbert. Depois aplicaremos os resultados abstratos nos problemas concretos.

A vantagem dessa abordagem é que os resultados abstratos podem ser aplicados para diferentes operadores diferenciais e condições de contorno. Dessa forma, conseguimos unificar o estudo de diversas equações de evolução.

5.3.1. Equação abstrata $u' + Au = 0$. Vamos trabalhar nas hipóteses do Teorema 215.

Sejam $(H, (.,.)_H)$ e $(V, (.,.)_V)$ dois espaços de Hilbert, em que H é um espaço separável de dimensão infinita, V é um subespaço denso em H e a inclusão $i : V \to H$ é compacta. Consideremos uma função $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear, simétrica, contínua e coerciva e o operador $A : \mathcal{D}(A) \to H$ associado a a.

Nesta seção $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ e $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sempre denotarão a base de Hilbert e a sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números estritamente positivos cuja existência foi provada no Teorema 215.

Vamos ordenar os autovalores $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de tal forma que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$$

Nosso objetivo é estudar a seguinte equação abstrata

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

em que $u_0 \in H$.

Para entender essa equação, precisamos definir alguns espaços de função. Abaixo I sempre será um intervalo conexo de $\mathbb{R}$ e H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita.

Definição 229. Dizemos que $u : I \to H$ é *contínua no ponto* $t \in I$ se

$$\lim_{s\to t} \|u(s) - u(t)\|_H = 0.$$

Dizemos que u *é contínua em* I (ou simplesmente *contínua*), se for contínua em todo ponto $t \in I$.

Definição 230. Dizemos que $u : I \to H$ é *derivável em* $t \in I$ se existir $u'(t) \in H$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) \right\|_H = 0.$$

Dizemos que u *é derivável em* I (ou simplesmente *derivável*), se for derivável em todo ponto $t \in I$.

Diremos que $u \in C^1(I; H)$, ou seja, u *é de classe* C^1, se u for derivável em todo ponto de I e u e u' forem contínuas. Por fim, diremos que $u \in C^k(I; H)$, $k \geq 1$, se $u \in C^1(I; H)$ e $u' \in C^{k-1}(I; H)$.

Como no caso real, se u for derivável em $t \in I$, então u é contínua em $t \in I$. De fato

$$\|u(t+h) - u(t)\|_H = h\|\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) + u'(t)\|_H$$
$$\leq h\|\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t)\|_H + h\|u'(t)\|_H.$$

Como os dois últimos termos vão a zero, então

$$\lim_{s\to t} \|u(s) - u(t)\|_H = \lim_{h\to 0} \|u(t+h) - u(t)\|_H = 0$$

Podemos provar algumas propriedades simples dessas funções.

Proposição 231. *Se $u : I \to H$ é uma função contínua ou de classe C^1 e $v \in H$, então $t \in I \mapsto (u(t), v)_H$ também é contínua ou classe C^1, respectivamente. Além disso,*

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_H = (u'(t), v)_H.$$

Demonstração. Se u for contínua, então

$$|(u(t), v)_H - (u(s), v)_H| \leq |(u(t) - u(s), v)_H| \leq \|u(t) - u(s)\|_H \|v\|_H.$$

Logo $\lim_{s\to t}(u(s), v)_H = (u(t), v)_H$ e $t \in I \mapsto (u(t), v)_H$ é contínua.

Se u for de classe C^1, então

$$|\frac{(u(t+h), v)_H - (u(t), v)_H}{h} - (u'(t), v)_H| = |(\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t), v)_H|$$
$$\leq \|\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t)\|_H \|v\|_H.$$

Logo $\lim_{h\to 0} \frac{(u(t+h),v)-(u(t),v)}{h} = (u'(t), v)$. Portanto, $t \in I \mapsto (u(t), v)$ é derivável. Como u' é contínua, então $t \in I \mapsto (u'(t), v)$ também é contínua. Assim, $t \in I \mapsto (u(t), v)$ é de classe C^1. ☐

Estamos agora em condições de provar existência e unicidade para a Equação (5.3.1).

Teorema 232. *Seja $u_0 \in H$. Então existe uma única função $u : [0, \infty) \to H$ tal que*
i. $u \in C([0, \infty); H) \cap C^1((0, \infty); H)$
ii. $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ *para todo* $t > 0$.
iii. $u'(t) + Au(t) = 0$, *para todo* $t > 0$.
iv. $u(0) = u_0$.
Esta função é dada por $u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}(u_0, e_j)_H e_j$.

DEMONSTRAÇÃO. *Unicidade:*

Suponha que exista uma tal solução. Como $u \in C^1((0,\infty);H)$, então $t \in (0,\infty) \mapsto (u(t),e_j)_H \in \mathbb{R}$ também é uma função de classe C^1, pela Proposição 231. Além disso,

$$\frac{d}{dt}(u(t),e_j)_H = (u'(t),e_j)_H \overset{(1)}{=} -(Au(t),e_j)_H \overset{(2)}{=} -(u(t),Ae_j)_H = -\lambda_j(u(t),e_j)_H,$$

em que usamos em (1) o item iii e em (2) a Proposição 220. Resolvendo a EDO acima, temos $(u(t),e_j)_H = Ce^{-\lambda_j t}$ para alguma constante $C > 0$. Por fim,

$$C = \lim_{t\to 0} Ce^{-\lambda_j t} = \lim_{t\to 0}(u(t),e_j)_H \overset{(1)}{=} (u(0),e_j)_H = (u_0,e_j)_H.$$

O limite em (1) existe pela hipótese de que $u \in C([0,\infty);H)$. Concluímos que $(u(t),e_j)_H = (u_0,e_j)_H e^{-\lambda_j t}$ e

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty}(u(t),e_j)_H e_j = \sum_{j=1}^{\infty}(u_0,e_j)_H e^{-\lambda_j t} e_j.$$

Assim, mostramos unicidade. De fato, se a solução existir, ela necessariamente tem que ser dada pela fórmula acima.

Existência:

Vamos mostrar que $u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)e_j$ satisfaz as propriedades do teorema.

ii. $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ *para todo* $t > 0$.

Isto ocorre, pois $\lambda \in (0,\infty) \mapsto \lambda^2 e^{-2\lambda t} \in \mathbb{R}$ é limitado se $t > 0$, já que $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^2 e^{-\lambda t} = 0$, se $t > 0$. Logo $\lambda^2 e^{-2\lambda t} \le C_t$, para todo $\lambda > 0$, e

$$\sum_{j=0}^{\infty}(u_0,e_j)^2\lambda_j^2 e^{-2\lambda_j t} \le C_t \sum_{j=0}^{\infty}(u_0,e_j)^2 = C_t\|u_0\|^2 < \infty.$$

Assim, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, pelo Teorema 215.

iv. $u(0) = u_0$.

Basta observar que $u(0) = \sum_{j=0}^{\infty}(u_0,e_j)_H e_j = u_0$.

i. $u \in C([0,\infty);H) \cap C^1((0,\infty);H)$.

Vamos mostrar que $u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)_H e_j$ e $v(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)_H e_j$ são contínuas em $[0,\infty)$ e $(0,\infty)$, respectivamente.

Para u, temos

$$\begin{aligned}
&\|u(t+h)-u(t)\|_H^2 = \|\sum_{j=1}^{\infty}(e^{-\lambda_j(t+h)} - e^{-\lambda_j t})(u_0,e_j)_H e_j\|_H^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|e^{-\lambda_j t}|^2|e^{-\lambda_j h}-1|^2|(u_0,e_j)_H|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty}|e^{-\lambda_j h}-1|^2|(u_0,e_j)_H|^2 \\
&\le |e^{-\lambda_1 h}-1|^2\|u_0\|_H^2 \to 0, \quad h \to 0.
\end{aligned}$$

Para v, seja $t > 0$. Assim, $\lambda^2 e^{-2\lambda t} \le C_t$, para todo $\lambda > 0$. Logo

$$\begin{aligned}
&\|v(t+h)-v(t)\|_H^2 = \|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(e^{-\lambda_j(t+h)} - e^{-\lambda_j t})(u_0,e_j)_H e_j\|_H^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2|e^{-\lambda_j t}|^2|e^{-\lambda_j h}-1|^2(u_0,e_j)_H^2 \le C_t|e^{-\lambda_1 h}-1|^2\|u_0\|_H^2 \to 0.
\end{aligned}$$

Portanto, v é contínua para todo $t > 0$.

Agora basta provar que $u'(t) = v(t)$ para todo $t > 0$.

$$\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - v(t)\|_H^2 = \|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-\lambda_j(t+h)} - e^{-\lambda_j t}}{h} + \lambda_j e^{-\lambda_j t}\right)(u_0, e_j)_H e_j\|_H^2$$

$$= \|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-\lambda_j h} - 1}{h} + \lambda_j\right) e^{-\lambda_j t}(u_0, e_j)_H e_j\|_H^2$$

$$\overset{(1)}{=} \|\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^1 (1 - e^{-\lambda_j \theta h}) d\theta \lambda_j e^{-\lambda_j t}(u_0, e_j)_H e_j\|_H^2$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} |1 - e^{-\lambda_j h}|^2 \lambda_j^2 e^{-2\lambda_j t}(u_0, e_j)_H^2 \leq C_t \|u_0\|_H^2 |1 - e^{-\lambda_1 h}| \to 0, \quad h \to 0.$$

Em (1), usamos

$$\frac{e^{-\lambda_j h} - 1}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{d\theta}(e^{-\lambda_j \theta h}) d\theta = -\lambda_j \int_0^1 e^{-\lambda_j \theta h} d\theta$$

e $\lambda_j = \int_0^1 1 d\theta \lambda_j$.

iii. $u'(t) + Au(t) = 0$, *para todo* $t > 0$.

Vimos acima

$$u'(t) = -Au(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j e^{-\lambda_j t}(u_0, e_j)_H e_j.$$

□

Já temos um teorema de existência e unicidade. No entanto, para as equações do tipo $u' + Au$ vistas acima, podemos mostrar que a solução possui muito mais regularidade.

Para tanto, vamos antes definir o espaço $\mathcal{D}(A^k)$.

Definição 233. O espaço $\mathcal{D}(A^k)$, $k \geq 2$, é definido da seguinte forma:

$$\mathcal{D}(A^k) = \{u \in \mathcal{D}(A) : u \in \mathcal{D}(A^{k-1})\}.$$

Podemos caracterizar facilmente os espaços $\mathcal{D}(A^k)$.

Proposição 234. *O conjunto* $\mathcal{D}(A^k)$, $k \geq 1$, *consiste no conjunto*

$$\mathcal{D}(A^k) = \{u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2k}(u, e_j)_H^2 < \infty\}. \tag{5.3.2}$$

O espaço $\mathcal{D}(A^k)$ *é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por*

$$(u, v)_{\mathcal{D}(A^k)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2k}(u, e_j)_H (v, e_j)_H. \tag{5.3.3}$$

Demonstração. Para $k = 1$, isto foi demonstrado no Teorema 215. Vamos agora seguir por indução. Suponha que para algum k, o conjunto $\mathcal{D}(A^k)$ seja dado pela Equação (5.3.2). Vamos mostrar que $\mathcal{D}(A^{k+1})$ também é dado por (5.3.2) com $k+1$ no lugar de k.

Afirmação 1: $\mathcal{D}(A^{k+1}) \subset \{u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2k+2}(u, e_j)_H^2 < \infty\}$.

Se $u \in \mathcal{D}(A^{k+1})$, então $u \in \mathcal{D}(A)$ e $Au \in \mathcal{D}(A^k)$. Como $(Au, e_j)_H = (u, Ae_j)_H = \lambda_j(u, e_j)_H$, vemos que $Au \in \mathcal{D}(A^k)$ implica que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2k} \lambda_j^2 (u, e_j)_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2k} (Au, e_j)_H^2 < \infty.$$

Afirmação 2: $\{u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2k+2}(u, e_j)_H^2 < \infty\} \subset \mathcal{D}(A^{k+1})$.

Como $\lim_{j\to\infty}\lambda_j = \infty$, então se $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2k+2}(u,e_j)_H^2 < \infty$, temos $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2}(u,e_j)_H^2 < \infty$. Logo $u \in \mathcal{D}(A)$. Além disso,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2k}(Au,e_j)_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2k}\lambda_j^2(u,e_j)_H^2 < \infty.$$

Portanto, $Au \in \mathcal{D}(A^k)$. Assim, $u \in \mathcal{D}(A^{k+1})$.

A verificação de que (5.3.3) é um produto interno e a demonstração de que $\mathcal{D}(A^k)$ é um espaço de Hilbert segue do exercício 6 da primeira lista de exercícios. □

Motivados pelo o resultado acima, podemos definir $\mathcal{D}(A^\alpha)$ para todo $\alpha \geq 0$ da seguinte forma.

Definição 235. Seja $\alpha \geq 0$, definimos $\mathcal{D}(A^\alpha) = \{u \in H : \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2\alpha}(u,e_j)_H^2 < \infty\}$ com o produto interno

$$(u,v)_{\mathcal{D}(A^\alpha)} = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2\alpha}(u,e_j)_H(v,e_j)_H.$$

Pelo Exercício 6 da primeira lista, sabemos que $\mathcal{D}(A^\alpha)$ também é um espaço de Hilbert.

Podemos agora provar o seguinte resultado.

Proposição 236. *A solução $u(t) = \sum_{j=1}^{\infty}e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)_He_j$ pertence a $C^\infty(]0,\infty[;\mathcal{D}(A^m))$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Além disso, a derivada independe de $m \in \mathbb{N}$ e é igual a*

$$u^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{\infty}(-\lambda_j)^k e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)_He_j.$$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$v_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty}(-\lambda_j)^k e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)_He_j.$$

Note que $u = v_0$. Para provar que $u \in C^\infty(]0,\infty[;\mathcal{D}(A^m))$, vamos provar que $u^{(k)} = v_k$. Para tanto, mostraremos que v_k é derivável para todo $]0,\infty[$ e que $v_k' = v_{k+1}$.

Inicialmente, observamos que se $k \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, então existe $C_{t,k} > 0$ tal que $\lambda^{2k+2}e^{-2\lambda t} \leq C_{t,k}$, para todo $\lambda > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\|\frac{v_k(t+h)-v_k(t)}{h} - v_{k+1}(t)\|_{\mathcal{D}(A^m)}^2 = \|\sum_{j=1}^{\infty}(-\lambda_j)^k\left(\frac{e^{-\lambda_j(t+h)}-e^{-\lambda_j t}}{h} + \lambda_j e^{-\lambda_j t}\right)(u_0,e_j)_He_j\|_{\mathcal{D}(A^m)}^2 \\
&= \|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-\lambda_j h}-1}{h} + \lambda_j\right)(-\lambda_j)^k e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)_He_j\|_{\mathcal{D}(A^m)}^2 \\
&= \|\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^1 (1-e^{-\lambda_j\theta h})d\theta(-\lambda_j)^{k+1}e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)_He_j\|_{\mathcal{D}(A^m)}^2 \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty}|1-e^{-\lambda_j h}|^2\lambda_j^{2(k+m+1)}e^{-2\lambda_j t}(u_0,e_j)_H^2 \leq C_{k+m,t}|1-e^{-\lambda_1 h}|^2\|u_0\|_H^2.
\end{aligned}$$

Novamente, usamos

$$\frac{e^{-\lambda_j h}-1}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{d\theta}(e^{-\lambda_j\theta h})d\theta = -\lambda_j\int_0^1 e^{-\lambda_j\theta h}d\theta.$$

Concluímos que

$$\lim_{h\to 0}\|\frac{v_k(t+h)-v_k(t)}{h} - v_{k+1}(t)\|_{\mathcal{D}(A^m)} = 0.$$

□

5.3.2. Equação $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$. Vamos aplicar tudo o que conhecemos até agora para a equação do calor. Vamos começar com o caso unidimensional.

Queremos resolver a seguinte equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t > 0, x \in [0,1],$$
$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in]0,1[.$$

Consideremos $u_0 \in L^2(0,1)$.

TEOREMA 237. *Existe uma única função $u : [0,\infty) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que*
1) $u \in C^\infty(]0,\infty[\times[0,1])$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),$$

para todo $t \in]0,\infty[$ e $x \in [0,1]$.
2) $u(t,0) = u(t,1) = 0$, para todo $t > 0$.
3) $\lim_{t\to 0} \int_0^1 |u(t,x) - u_0(x)|^2 dx = 0$.
Esta função é dada por

$$u(t,x) = 2\sum_{j=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2 t} \left(\int_0^1 u_0(y) sen(n\pi y) dy\right) sen(n\pi x).$$

Como podemos provar?
Consideremos...
Vamos antes provar o seguinte resultado.

TEOREMA 238. *Nas situação anterior, $\mathcal{D}(A^k) \subset H^{2k}(0,1)$ e a inclusão $i : \mathcal{D}(A^k) \to H^{2k}(0,1)$ é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Observamos que $\mathcal{D}(A)$ □

Vamos, claro usar os resultados anteriores.
Da mesma forma, podemos provar que

TEOREMA 239. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^∞. Existe uma única função $u : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ tal que*
1) $u \in C^\infty(]0,\infty[\times\overline{\Omega})$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x),$$

para todo $t \in]0,\infty[$ e $x \in \overline{\Omega}$.
2) $u(t,x) = 0$, para todo $x \in \partial\Omega$ e $t > 0$.
3) $\lim_{t\to 0} \int_\Omega |u(t,x) - u_0(x)|^2 dx = 0$.
Esta função é dada por

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \left(\int_\Omega u_0(y) e_j(y) dy\right) e_j(x).$$

5.4. Equação da onda

Seguiremos o mesmo caminho da equação do calor. Inicialmente, faremos um estudo de uma EDO com valores em um espaço de Hilbert. Depois aplicaremos o resultado para uma situação concreta.

5.4.1. Equação abstrata $u''+Au=0$. Vamos novamente trabalhar com as hipóteses do Teorema 215.

Sejam $(H,(.,.)_H)$ e $(V,(.,.)_V)$ dois espaços de Hilbert, em que H é um espaço separável de dimensão infinita, V é um subespaço denso em H e a inclusão $i: V \to H$ é compacta. Consideremos uma função $a: V\times V \to \mathbb{R}$ bilinear, simétrica, contínua e coerciva e o operador $A: \mathcal{D}(A) \to H$ associado a a.

Também nesta seção $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ e $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sempre denotarão a base de Hilbert e a sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números estritamente positivos cuja existência foi provada no Teorema 215.

Consideremos a seguinte equação

$$\begin{aligned} u''(t) + Au(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = u_1, \end{aligned}$$

em que $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $u_1 \in V$.

Vamos antes caracterizar o espaço V em termos de potências fracionárias de A. Precisamos de dois lemas iniciais.

LEMA 240. *Sejam $(H_1,(\cdot,\cdot)_{H_1})$ e $(H_2,(\cdot,\cdot)_{H_2})$ dois espaços de Hilbert contidos num espaço vetorial H e $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto de H_1 e de H_2. Se $\mathcal{B}$ for uma base tanto de H_1 como de H_2, então $H_1 = H_2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $u \in H_1$, então $u = \sum_{j=1}^{\infty}(u,e_j)_{H_1}e_j$. Como $\sum_{j=1}^{\infty}(u,e_j)_{H_1}^2 < \infty$ e $\mathcal{B}$ também é base de H_2, então $u \in H_2$, pelo Teorema 43. Logo $u \in H_2$. Assim, $H_1 \subset H_2$.

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos provar que $H_2 \subset H_1$ e, portanto, que $H_1 = H_2$. □

LEMA 241. *O espaço V é um espaço de Hilbert com o produto interno dado pela função $a: V\times V \to \mathbb{R}$.*

Vamos denotar o espaço de Hilbert V original por $(V,(\cdot,\cdot)_V)$ e o espaço de Hilbert V com o produto interno a por $(V, a(\cdot,\cdot))$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy de $(V,a(\cdot,\cdot))$. Como a é coerciva, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|u_j - u_k\|_V^2 \le C_1 a(u_j-u_k, u_j-u_k).$$

Assim, vemos facilmente que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de $(V,(\cdot,\cdot)_V)$. Portanto converge para $u \in V$. Pela continuidade de a, existe $C_2 > 0$ tal que

$$a(u_j-u, u_j-u) \le C_2\|u_j-u\|_V^2.$$

Logo $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ também converge para u em $(V,a(\cdot,\cdot))$ e, portanto, $(V,a(\cdot,\cdot))$ é um espaço de Hilbert. □

PROPOSIÇÃO 242. *Os espaços vetoriais $\mathcal{D}(A^{1/2})$ e V coincidem e o produto interno de $\mathcal{D}(A^{1/2})$ coincide com a função a. Além disso, $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}e_j : j \in \mathbb{N}\}$ é uma base de $\mathcal{D}(A^{1/2}) = (V,a(\cdot,\cdot))$.*

DEMONSTRAÇÃO. *Afirmação 1: O conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $(V,a(\cdot,\cdot))$.*

O conjunto $\mathcal{B}$ é ortonormal no produto interno a. De fato, sabemos que $e_j \in \mathcal{D}(A) \subset V$. Além disso,

$$a(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}e_j, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}e_k) = (A\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}e_j, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}e_k)_H = \lambda_j\frac{1}{\sqrt{\lambda_j\lambda_k}}(e_j,e_k)_H = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_k}}\delta_{jk} = \delta_{jk}.$$

Para provar que é uma base, vamos mostrar que $\mathcal{B}^\perp = \{0\}$ e concluir usando o Corolário 60. Seja $v \in V$ tal que $a(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}e_j, v) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo

$$(e_j,v)_H = (\frac{1}{\lambda_j}Ae_j, v)_H = \frac{1}{\lambda_j}a(e_j,v) = 0$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{B}$ é base de H, concluímos que $v = 0$. Isto encerra a demonstração de que $\mathcal{B}$ é uma base.

Afirmação 2: O conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{D}(A^{1/2})$.

O conjunto $\mathcal{B}$ é ortonormal no produto interno $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{D}(A^{1/2})}$, pois

$$(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}e_j, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}e_k)_{\mathcal{D}(A^{1/2})} = \lambda_j \delta_{jk} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j \lambda_k}} = \delta_{jk}.$$

Além disso, se $u \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, então $u_N = \sum_{j=1}^{N} (u, e_j)_H e_j \in [\mathcal{B}]$ e

$$\|u - u_N\|^2_{\mathcal{D}(A^{1/2})} = \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)^2_H.$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)^2_H < \infty$, concluímos que $\lim_{N\to\infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)^2_H = 0$. Logo $[\mathcal{B}]$ é denso em $\mathcal{D}(A^{1/2})$.

Afirmação 3: $V = \mathcal{D}(A^{1/2})$.

Basta usar o Lema 240 para $H_1 = V$, $H_2 = \mathcal{D}(A^{1/2})$ e H. □

TEOREMA 243. *Seja $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $u_1 \in V$. Logo existe uma única função $u \in C^2(\mathbb{R}; H)$ tal que*
i. $u \in C^2(\mathbb{R}; H)$.
ii. $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
iii. $u''(t) + Au(t) = 0$, para $t \in \mathbb{R}$.
iv. $u(0) = u_0$ e $u'(0) = u_1$.
Esta função é dada por $u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[(u_0, e_j)_H \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, e_j)_H sen(\sqrt{\lambda_j} t) \right] e_j$.

DEMONSTRAÇÃO. *Unicidade.*

Suponha que exista uma tal solução. Como $u \in C^2(\mathbb{R}; H)$, então $t \in \mathbb{R} \mapsto (u(t), e_j) \in \mathbb{R}$ é também uma função de classe C^2, pela Proposição 231. Além disso,

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t), e_j)_H = (u''(t), e_j)_H = -(Au(t), e_j)_H = -(u(t), Ae_j)_H = -\lambda_j (u(t), e_j)_H.$$

Resolvendo a equação, temos

$$\begin{aligned} (u(t), e_j)_H &= (u(0), e_j)_H \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u'(0), e_j)_H \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} t) \\ &= (u_0, e_j)_H \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, e_j)_H \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} t). \end{aligned}$$

Desta maneira, se existir uma função com as propriedades do Teorema, esta função deve ser dada pela expressão

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (u(t), e_j)_H e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left[(u_0, e_j)_H \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, e_j)_H \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} t) \right] e_j.$$

Existência.

Suponha que

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[(u_0, e_j)_H \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, e_j)_H \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} t) \right] e_j.$$

Vamos mostrar que u satisfaz as propriedades do teorema.

ii. $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t > 0$.

Isto ocorre, pois

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2\left((u_0,e_j)_H\cos(\sqrt{\lambda_j}t)+\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(u_1,e_j)_H\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j}t)\right)^2$$
$$\overset{(1)}{\leq} 2\sum_{j=1}^{\infty}\left(\lambda_j^2(u_0,e_j)_H^2\cos^2(\sqrt{\lambda_j}t)+\lambda_j(u_1,e_j)_H^2\mathrm{sen}^2(\sqrt{\lambda_j}t)\right)$$
$$\leq 2\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2(u_0,e_j)_H^2+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(u_1,e_j)_H^2\overset{(2)}{<}\infty.$$

Em (1), usamos que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, para todo a, $b>0$ (Lembramos que $2ab \leq a^2+b^2$). Em (2) usamos que $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $u_1 \in V = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Assim, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, pelo Teorema 215.

i. $u \in C^2(\mathbb{R}; H)$

Seja sabemos que $u = u_c + u_s$, em que

$$u_c(t)=\sum_{j=1}^{\infty}(u_0,e_j)_H\cos(\sqrt{\lambda_j}t)e_j \quad \text{e} \quad u_s(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(u_0,e_j)_H\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j}t)e_j.$$

Vamos mostrar que u_c tem derivada e

$$u_c'(t)=-\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_j}(u_0,e_j)_H\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j}t)e_j.$$

Para tanto, observamos que

$$\left\|\frac{u_c(t+h)-u_c(t)}{h}-u_c'(t)\right\|_H^2$$
$$=\left\|\sum_{j=1}^{\infty}(u_0,e_j)\left(\frac{\cos(\sqrt{\lambda_j}(t+h))-\cos(\sqrt{\lambda_j}t)}{h}+\sqrt{\lambda_j}\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j}t)\right)e_j\right\|_H^2$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}(u_0,e_j)^2\left(\frac{\cos(\sqrt{\lambda_j}(t+h))-\cos(\sqrt{\lambda_j}t)}{h}+\sqrt{\lambda_j}\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j}t)\right)^2$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}(u_0,e_j)^2\lambda_j\left(\int_0^1(\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2.$$

Acima usamos que

$$\cos(\sqrt{\lambda_j}(t+h))-\cos(\sqrt{\lambda_j}t)=\int_0^1\frac{d}{d\theta}\left(\cos(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)\right)d\theta$$
$$=-\sqrt{\lambda_j}h\int_0^1\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)d\theta.$$

Sabemos que $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(u_0,e_j)^2=\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A^{1/2})}<\infty$, pois $u_0\in\mathcal{D}(A^{1/2})\subset\mathcal{D}(A)$. Logo $\lim_{N\to\infty}\sum_{j=N+1}^{\infty}\lambda_j(u_0,e_j)^2=0$.

Dado $\varepsilon>0$, seja $N>0$ tal que

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}\lambda_j(u_0,e_j)^2<\frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty}(u_0,e_j)^2\lambda_j\left(\int_0^1(\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2\\
&=\sum_{j=1}^{N}(u_0,e_j)^2\lambda_j\left(\int_0^1(\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2\\
&\quad+\sum_{j=N+1}^{\infty}(u_0,e_j)^2\lambda_j\left(\int_0^1(\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2\\
&\le\sum_{j=1}^{N}(u_0,e_j)^2\lambda_j\left(\int_0^1(\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2+4\sum_{j=N+1}^{\infty}(u_0,e_j)^2\lambda_j\\
&\le\sum_{j=1}^{N}(u_0,e_j)^2\lambda_j\left(\int_0^1(\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2+\frac{\varepsilon^2}{2}.
\end{aligned}$$

Pela continuidade do seno, existe $\delta>0$ tal que se $|h|<\delta$, temos

$$\sum_{j=1}^{N}(u_0,e_j)^2\lambda_j\left(\int_0^1(\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Concluímos que

$$\|\frac{u_c(t+h)-u_c(t)}{h}-u_c'(t)\|_H^2<\varepsilon^2,\quad\forall|h|<\delta.$$

Portanto,

$$\lim_{h\to0}\|\frac{u_c(t+h)-u_c(t)}{h}-u_c'(t)\|_H=0.$$

Seja $u_c(t)=\sum_{j=1}^{\infty}(u_0,e_j)_H\cos(\sqrt{\lambda_j}t)e_j$. Vamos mostrar que u_c é contínuo e tem derivada $u_c'(t)=-\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_j}(u_0,e_j)_H\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}t)e_j$.

Para continuidade, observamos que

$$\|u_1(t+h)-u_1(t)\|_H^2=\|\sum_{j=1}^{\infty}(u_0,e_j)\left(\cos(\sqrt{\lambda_j}(t+h))-\cos(\sqrt{\lambda_j}t)\right)e_j\|^2.$$

Sabemos que $\sum_{j=1}^{\infty}(u_0,e_j)^2=\|u_0\|^2<\infty$. Logo $\lim_{N\to\infty}\sum_{j=N}^{\infty}(u_0,e_j)^2=0$. Dado $\varepsilon>0$, seja $N>0$ tal que

$$\sum_{j=N}^{\infty}(u_0,e_j)^2<\frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\| \sum_{j=1}^{\infty} (u_0, e_j) \left(\cos(\sqrt{\lambda_j}(t+h)) - \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \right) e_j \|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} (u_0, e_j)^2 \left(\cos(\sqrt{\lambda_j}(t+h)) - \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \right)^2 \\
&\quad + \sum_{j=N+1}^{\infty} (u_0, e_j)^2 \left(\cos(\sqrt{\lambda_j}(t+h)) - \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \right)^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} (u_0, e_j)^2 \left(\cos(\sqrt{\lambda_j}(t+h)) - \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \right)^2 + 4 \sum_{j=N+1}^{\infty} (u_0, e_j)^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} (u_0, e_j)^2 \left(\cos(\sqrt{\lambda_j}(t+h)) - \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Pela continuidade do cosseno, existe $\delta > 0$ tal que se $|h| < \delta$, temos

$$\sum_{j=1}^{N} (u_0, e_j)^2 \left(\cos(\sqrt{\lambda_j}(t+h)) - \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \right)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Concluímos que

$$\| \frac{u_c(t+h) - u_c(t)}{h} - u_c'(t) \|_H^2 < \varepsilon,$$

quando $|h| < \delta$. Logo u_c' é a derivada de u_c. Para calcular a segunda derivada de u_c e sua continuidade, o procedimento é análogo. Da mesma forma com as derivadas de u_s.

iv. $u(0) = u_0$ *e* $u'(0) = u_1$.

Vimos que

$$u'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[-\sqrt{\lambda_j}(u_0, e_j)_H \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j} t) + (u_1, e_j)_H \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \right] e_j$$

e substituir $t = 0$ na expressão de u e de u'.

iii. $u''(t) + Au(t) = 0$.

Vimos que

$$u''(t) = -Au(t) = -\sum_{j=1}^{\infty} \left[\lambda_j (u_0, e_j)_H \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \sqrt{\lambda_j} (u_1, e_j)_H \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j} t) \right] e_j.$$

□

5.4.2. Equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$. Vamos aplicar tudo o que conhecemos até agora para a equação do calor. Vamos começar com o caso unidimensional.

Queremos resolver a seguinte equação:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in]0,1[, \\
u(t,0) &= u(t,1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\
u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in]0,1[. \\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= u_1(x), \quad x \in]0,1[.
\end{aligned}
$$

Consideremos $u_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ e $u_1 \in H_0^1(0,1)$.

TEOREMA 244. *Existe uma única função* $u : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*
i. $u \in C^2(\mathbb{R}; L^2(0,1))$.
ii. $u(t) \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
iii. $u''(t) - \frac{d^2}{dx^2}u(t) = 0$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
iv. $u(0) = u_0$ *e* $u'(0) = u_1$.
Esta função é dada por

$$u(t,x) = 2\sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^1 u_0(y) sen(n\pi y) dy \cos(n\pi t) + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 u_1(y) sen(n\pi y) dy sen(n\pi t) \right] sen(n\pi x).$$