Exo3, lista de Exercícios sobre zero de funções

(4) (a) p inteiro positivo, mostre que $x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$ pode ser utilizada para calcular $\sqrt[p]{a}$, com $a \geq 0$

(5) utilizando (a), calcular $\sqrt[3]{7}$ com precisão pré-fixada $\varepsilon = 0{,}001$

Resposta: Duas maneiras de resolver (a)

1) Suppose $x_n \longrightarrow \tilde{x}$, então $\tilde{x} = \frac{1}{p}\left((p-1)\tilde{x} + \frac{a}{\tilde{x}^{p-1}}\right)$

$$\Rightarrow p\tilde{x} - (p-1)\tilde{x} = \frac{a}{\cancel{p}\,\tilde{x}^{p-1}}$$

$$\Rightarrow \tilde{x} = \frac{a}{\tilde{x}^{p-1}} \Rightarrow \tilde{x}^p = a \Rightarrow \tilde{x} = \sqrt[p]{a} \quad (\text{supondo } \tilde{x} > 0)$$

2) observamos que $\sqrt[p]{a}$ é raiz de $f(x) = x^p - a$

Método de Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p x_n^{p-1}}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{p} + \frac{a}{p x_n^{p-1}} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$$

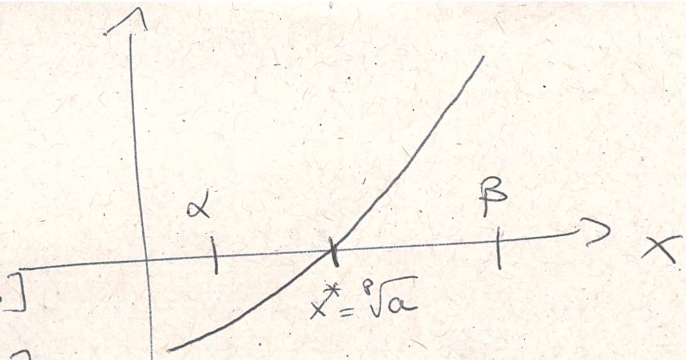
então, é a iteração de Newton para $f(x)$, que deve convergir para a raiz de f (se a seqüência converge)

(b) Vamos analisar o caso geral:

$$\begin{cases} f(x) = x^p - a, & f \text{ é crescente} \\ f'(x) = p x^{p-1}, & f' \text{ é positiva para } x > 0 \\ f''(x) = p(p-1)x^{p-2}, & f'' \text{ é positiva para } x > 0 \text{ e } p > 1 \\ & f'' \text{ é negativa para } x > 0 \text{ e } p < 1 \end{cases}$$

Vamos supor $p \neq 1$, pois o caso $p = 1$ é trivial (pois a raiz é $x^* = a$ neste caso)

Caso $p > 1$



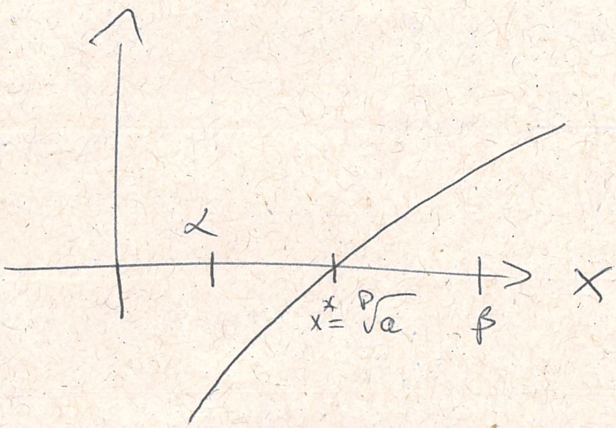
- temos
  - $f(\alpha) f(\beta) < 0$
  - $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [\alpha, \beta]$
  - $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in [\alpha, \beta]$

onde $0 < \alpha < \sqrt[p]{a}$

$\beta > \sqrt[p]{a}$

aplicando o teorema do curso, precisamos escolher x_0 tal que $f(x_0) f''(x_0) \geq 0$. Como $f''(x) > 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ neste caso, precisamos de $f(x_0) > 0$, isto é $x_0 \in [\sqrt[p]{a}, \beta]$

Caso $p < 1$



- temos
  - $f(\alpha) f(\beta) < 0$
  - $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [\alpha, \beta]$
  - $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in [\alpha, \beta]$

onde $0 < \alpha < \sqrt[p]{a}$

$\beta > \sqrt[p]{a}$

aplicando o teorema do curso, precisamos escolher x_0 tal que $f(x_0) f''(x_0) \geq 0$. Como $f''(x) < 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$ neste caso, precisamos de $f(x_0) < 0$, isto é $x_0 \in [\alpha, \sqrt[p]{a}]$

- Agora vamos aproximar $\sqrt[3]{7}$ com precisão pré-fixada $\varepsilon = 0{,}001$ corresponde a $p = 3$, $a = 7$, então é o caso $p > 1$
- Sabemos que $\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{8} = 2$, então podemos escolher $\beta = 2$ e $x_0 = \beta = 2$
- Sabemos que x_k será <u>decrescente</u> com este x_0.

- Vamos aplicar o algo. de precisão pré-fixada para sequência decrescente:

$$\phi(x) = g(x) - x = \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) - x$$

$$= \frac{1}{p}\left((p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}\right) - x$$

$$= \frac{1}{p}\left(-x + \frac{a}{x^{p-1}}\right)$$

- $x_0 = 2$
- $x_1 = g(x_0) = \frac{1}{p}\left((p-1)x_0 + \frac{a}{x_0^{p-1}}\right)$

$$= 1,91666666$$

$\phi(x_1) = -0,003728 < 0$ então continuamos

$\phi(x_1) = -0,0017339 < 0$

- $x_2 = g(x_1) = \frac{1}{p}\left((p-1)x_1 + \frac{a}{x_1^{p-1}}\right) = 1,912938458 3$

$\phi(x_2) = -7,275 \times 10^{-6} < 0$ então paramos

$\phi(x_2 - 2S) = 0,001994 > 0$

solução: $\tilde{x} = x_{k+1} - S = x_2 - S$

$= 1,9119384 \ldots$