Análise Dimensional na Física

O primeiro passo na modelagem de qualquer fenômeno físico é a identificação das grandezas relevantes para entender o fenômeno, e em seguida encontrar a relação entre elas. Essa relação é muitas vezes obtida através das leis da Física. Há porém um outro método muito poderoso de modelagem de fenômenos físicos: a análise dimensional. Você muito provavelmente já encontrou a análise dimensional antes no contexto de *checar as unidades* dos dois lados de uma expressão para se certificar que os dois lados da equação tem a mesma unidade. Esse é o exemplo mais trivial (embora muito importante!) do uso da análise dimensional. Aqui vamos usar a análise dimensional de outra forma: para resolver problemas ou inferir alguma informação útil sobre a solução que procuramos.

Qual é a idéia básica desse método de abordagem? A idéia básica é que as *leis da Física não dependem da escolha (arbitraria) das unidades de medida*. As segunda lei de Newton, por exemplo, $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$, não pode depender de medirmos massa em quilogramas, a aceleração em metros por segundo ao quadrado, e a força em newtons, ou de medirmos massa em arrobas, aceleração em pés por segundo ao quadrado, e força em libras. O sistema de unidades que adotaremos é o Sistema Internacional (SI), onde as comprimentos são medidos em metros, massas em quilogramas e tempo em segundos. Você encontrará outros sistemas de unidades ao longo do curso de Física. A escolha do sistema de unidades é frequentemente ditada pela escala dos fenômenos físicos que estamos considerando.

Como exemplo concreto vamos considerar aqui um pêndulo simples consistindo de uma massa m suspensa em um ponto fixo por uma corda. Seja τ o tempo que leva o pêndulo para completar um ciclo de oscilação (é o período de oscilação). Como esse período depende das quantidades que definem o pêndulo e que determinam o seu movimento? Quais as possíveis grandezas envolvidas nesse problema? É razoável assumir que as grandezas relevantes aqui são a massa do pêndulo m, o comprimento do pêndulo ℓ, a aceleração da gravidade g, e a abertura angular inicial θ_0. Será que essas são todas as quantidades relevantes? Não é possível ter certeza absoluta disso, mas podemos verificar se são suficientes. Caso não o sejam precisamos pensar melhor. Mais adiante veremos que podemos responder essa questão resolvendo a equação diferencial resultante da aplicação da segunda lei de Newton. Mas agora vamos usar análise dimensional. Precisamos nesse caso encontrar a função f tal que

$$\tau = f(m, \ell, g, \theta_0)\,.$$

Para isso vamos fazer uma lista das dimensões das quantidades em termos das dimensões básicas: L (comprimento), M (massa) e T (tempo). Seguindo a convenção sugerida por Maxwell, denotamos as dimensões de uma quantidade física ϕ por $[\phi]$, assim

$$[\tau] = T \qquad [m] = M \qquad [\ell] = L \qquad [g] = L\,T^{-2}$$

e $[\theta_0] = 1$ o que significa que θ_0 é adimensional. Começamos escrevendo

$$\tau = C\,\ell^\alpha\,m^\beta\,g^\gamma$$

onde C é uma constante adimensional e α, β e γ são números racionais. Nossa primeira observação é que o período tem dimensão de tempo, logo a massa não pode entrar na relação pois nem o comprimento, nem a aceleração podem eliminar a dependência com a massa, logo $\beta = 0$ e

$$\tau = C\,\ell^\alpha\,g^\gamma \to T = L^\alpha [L\,T^{-2}]^\gamma = L^{\alpha+\gamma}\,T^{-2\gamma}$$

levando as relações que devem ser satisfeitas

$$0 = \alpha + \gamma \qquad 1 = -2\gamma$$

cuja solução é $\alpha = -\gamma = \frac{1}{2}$.

Logo a análise dimensional nos leva à fórmula

$$\tau = C\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,,$$

dimensionalmente correta. Como θ_0 é adimensional, pode ou não aparecer. Por essa razão o máximo que conseguimos dizer é que

$$\tau = f(\theta_0)\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,,$$

mais tarde veremos que $f(\theta_0) = 2\pi$ para pequenas oscilações.

Vejamos uma outra ilustração desse método. Considere uma força de magnitude constante F que atua por uma distância d sobre um objeto de massa m. Qual a velocidade v do objeto?

$$v = C\, F^\alpha m^\beta d^\gamma \to [v] = LT^{-1} = [F]^\alpha [m]^\beta [d]^\gamma = (MLT^{-2})^\alpha M^\beta L^\gamma$$

de onde temos que

$$0 = \alpha + \beta \qquad 1 = \alpha + \gamma \qquad 1 = 2\alpha$$

cuja solução é $\alpha = -\beta = \frac{1}{2} = \gamma$. Logo

$$v = C\,\sqrt{\frac{F\,d}{m}}$$

mais adiante veremos que usando a conservação da energia obteremos que $C = \sqrt{2}$.

Esse método que acabamos de descrever, e usamos nesses dois exemplos é chamado de método de Rayleigh.

Método dos π's de Buckingham

Esse método, baseado no teorema dos π's de Buckingham é mais poderoso que o método de Rayleigh, pode ser inclusive usado para ajudar a resolver problemas que envolvem equações diferenciais, reduzindo o número de variáveis independentes. A invariância de escala que veremos aqui é uma das primeiras simetrias que encontraremos nessa disciplina. Considere as seguintes suposições:

1. Uma quantidade u pode ser determinada em termos de n quantidades mensuráveis (variáveis ou parâmetros): $X_1, X_2, ..., X_n$:

   $$u = f(X_1, X_2, ..., X_n)\,,$$

   onde f é uma função desconhecida de $X_1, X_2, ..., X_n$.

2. As quantidades $u, X_1, X_2, ..., X_n$ envolvem m *dimensões fundamentais*, que chamaremos de $L_1, L_2, ..., L_m$ (ex. $L_1 = M$,$L_2 = L$, $L_3 = T$).

3. Seja Z qualquer uma das quantidades $u, X_1, X_2, ..., X_n$. A dimensão de Z que será denotada por $[Z]$ é um produto de potências das dimensões fundamentais, em particular

$$[Z] = L_1^{a_1} L_2^{a_2} ... L_m^{a_m} ,$$

para os números reais racionais $(a_1, a_2, ...a_m)$.

4. Uma quantidade Z é dita adimensional se $[Z] = 1$, ou seja, todos os $a_i's$ são zero.

5. Para qualquer conjunto de *dimensões fundamentais* podemos escolher um sistema de unidades arbitrário para medir Z. Uma mudança de sistema de unidades envolve um re-escalonamento positivo de cada uma das dimensões fundamentais, que por sua vez leva a um re-escalonamento de Z. Sob uma mudança de sistema de unidades o valor de quantidades adimensionais não se altera. Isso significa que a equação $u = f(X_1, X_2, ..., X_n)$ pode ser vista como uma equação adimensional no sentido de que não muda sob um re-escalonamento arbitrário de qualquer de suas dimensões fundamentais.

6. Isso implica que podemos re-escrever $u = f(X_1, X_2, ..., X_n)$ como

$$\pi = g(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{k-1}) ,$$

onde g é uma função arbitraria de quantidades adimensionais (π_i's), existem um total de $k = n + 1 - m$ quantidades adimensionais independente: π, $\pi_1, ..., \pi_{k-1}$, dadas por

$$\pi = u \, X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} ... X_m^{\alpha_m} ,$$

$$\pi_i = R_i \, X_1^{\beta_1^i} X_2^{\beta_2^i} ... X_m^{\beta_m^i}, \qquad i = 1, ..., k-1$$

aqui R_i é uma das variáveis *não recorrentes* $X_{m+1}, ..., X_n$. Assim $u = f(X_1, X_2, ..., X_n)$ fica simplesmente

$$u = X_1^{-\alpha_1} X_2^{-\alpha_2} ... X_m^{-\alpha_m} g(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{k-1}).$$

Como podemos aplicar isso?

1. Encontre as $n + 1$ variáveis envolvidas no problema.

2. Encontre o número de dimensões básicas m necessárias.

3. Calcule o número de grupos π adimensionais $k = n + 1 - m$.

4. Escreva as dimensões de todas as variáveis.

5. Selecione m das n variáveis $X_1, X_2, ..., X_n$, como variáveis recorrentes, qualquer uma das demais chamaremos genericamente de R_i. As variáveis recorrentes são as que sempre entram nos temos π. Nenhuma delas deve ser adimensional, duas variáveis recorrentes não podem ter a mesma dimensão.

6. Forme os termos π (ou os grupos adimensionais), encontrando os expoentes adequados $\alpha_1, \alpha_2, ...$ etc.

7. Escreva a relação final.

Agora resolva os dois exemplos anteriores usando esse método!

Para maiores detalhes veja, por exemplo, *Symmetries and Differential Equations*, G. W. Bluman e S. Kumei, *Springer Science* (1989) - ISBN: 978-1-4757-4307-4.