MAP3122: Métodos numéricos e aplicações

Quadrimestral 2022

Antoine Laurain

Interpolação polinomial

Introdução

- São dados $n+1$ pontos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ no plano $\mathbb{R}^2$.
- “Interpolação” consiste em achar uma função $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ continua tal que $f(x_i) = y_i$ para todos os pontos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ e $x_i \in [a,b]$ para todos $i = 0, \ldots, n$.
- Uma vez obtida a função $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, podemos calcular $f(x)$ com $x \in [a,b]$ e $x \notin \{x_i\}_{i=0}^{n}$.
- Na prática, os dados y_i podem vir de uma experiença e fornecem uma informação parcial sobre a função f, isto é, a função f é conhecida apenas nos pontos x_i. A interpolação é uma maneira de “reconstruir” a função f num intervalo $[a,b]$.
- Quando f é um polinômio, falamos de interpolação polinomial e f chama-se polinômio interpolador.
- O MMQ também fornece uma aproximação $g(x)$ dos pontos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$, mas a função g não precisa satisfazer $g(x_i) = y_i$. O MMQ e a interpolação são dois métodos de aproximação diferentes.

Existência e unicidade do polinômio interpolador

Proposição: Sejam $n+1$ pontos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ dados no plano $\mathbb{R}^2$ (pontos distintos). Então existe um único polinômio p de grau menor ou igual à n que passa por todos estes pontos, ou seja $p(x_i) = y_i$ para todos $i = 0, \ldots, n$.

Idéia da demonstração: As condições $p(x_i) = \sum_{k=0}^n a_k x_i^k = y_i$ para $i = 0, \ldots, n$, constituem um sistema linear para os coeficientes a_k. Depois, precisa mostrar que este sistema linear tem uma solução única.

Exemplo: Temos os dados tabelados seguinte:

x_i	1.3	1.4	1.5
$y_i \approx e^{x_i}$	3.669	4.055	4.482

Temos $n+1 = 3$ pontos, então o polinômio interpolador é de grau 2: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Então escrevendo as 3 condições $p(x_i) = \sum_{k=0}^n a_k x_i^k = y_i$ para $i = 0, 1, 2$, obtemos o sistema

$$a_0 + 1.3a_1 + 1.3^2 a_2 = 3.669$$
$$a_0 + 1.4a_1 + 1.4^2 a_2 = 4.055$$
$$a_0 + 1.5a_1 + 1.5^2 a_2 = 4.482$$

cuja solução é $a_0 = 2.382$, $a_1 = -1.675$, $a_2 = 2.05$, então o polinômio interpolador é

$$p(x) = 2.05x^2 - 1.675x + 2.382.$$

Agora podemos interpolar o ponto $p(1.32) \approx 3.7430$ que aproxima $e^{1.32}$.

Interpolação de Lagrange

- Definimos os polinômios de Lagrange L_i de grau n como

$$L_i(x) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

- É facil verificar que

$$L_i(x_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{para } \ell = i, \\ 0 & \text{para } \ell \neq i. \end{cases}$$

- Então, se f é uma função tabelada em $n + 1$ pontos distintos x_k, podemos determinar imediatamente o polinômio interpolador de f relativamente a $x_0, \dots, x_n$ como:

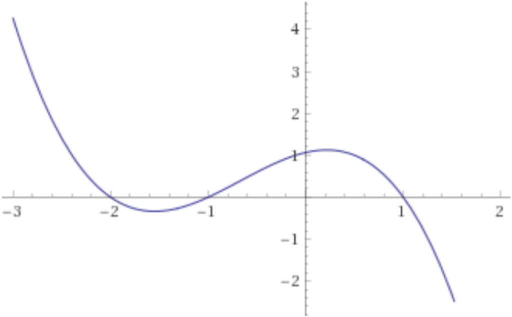
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i).$$

- Assim, temos

$$p(x_k) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x_k) f(x_i) = L_k(x_k) f(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0, \dots, n.$$

Então p é o polinômio interpolador relativamente aos pontos $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{n}$.

Interpolação de Lagrange



O polinômio de Lagrange

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(0.5+2)(0.5+1)(0.5-1)}$$

com os pontos $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0.5, x_3 = 1$. Observamos no gráfico da função que $L_2(x_0) = 0$, $L_2(x_1) = 0$, $L_2(x_2) = 1$ e $L_2(x_3) = 0$.

Interpolação de Lagrange

Exemplo: Temos os dados tabelados seguinte:

x_i	1.3	1.4	1.5
$y_i \approx e^{x_i}$	3.669	4.055	4.482

Os polinômios de Lagrange são:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

O polinômio interpolador é:

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) = 2.05x^2 - 1.675x + 2.382.$$

Agora podemos interpolar o ponto $p(1.32) \approx 3,74292$ que aproxima $e^{1,32}$.

Observe que o polinômio interpolador p neste exemplo é exatamente o mesmo que no exemplo anterior (compare os polinômios). De fato, a proposição sobre existência e unicidade de polinômio interpolador afirma que o polinômio interpolador de grau n relativamente a $n + 1$ pontos é único. Então todos os métodos que calculam este polinômio interpolador vão dar o mesmo polinômio.

Polinômio interpolador na forma de Newton

- Sejam $n + 1$ pontos distintos $\{x_k\}_{i=0}^n$ e $f(x_k) = y_k$ os valores de uma função f tabelada nestes pontos.
- Os polinômios de Lagrange são fácil de calcular, mas se adicionamos um ponto aos $\{x_i\}_{i=0}^n$, precisamos recalcular os polinômios de Lagrange, e isso não é prático.
- Para todos $j = 0, \ldots, n$, chamamos de $p_j(x)$ o polinômio interpolador de f relativamente aos pontos $\{x_0, \ldots, x_j\}$. Em particular, temos $p_0(x) = f(x_0) = y_0$ para todos $x \in \mathbb{R}$.
- Idéia principal do polinômio interpolador na forma de Newton: construir os polinômios p_j recursivamente. Assim, se p_j, que interpola $\{x_0, \ldots, x_j\}$, for conhecido, será fácil calcular p_{j+1} e interpolar os pontos $\{x_0, \ldots, x_{j+1}\}$.
- O polinômio interpolador na forma de Newton é exatamente o mesmo polinômio que usando polinômios de Lagrange (ou qualquer outro método), mas apresentado de uma maneira diferente, para facilitar a indução.

Polinômio interpolador na forma de Newton

- Formula de indução para p_j:

$$p_j(x) = p_{j-1}(x) + (y_j - p_{j-1}(x_j)) \prod_{k=0}^{j-1} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

- Vamos verificar que p_j realmente é o polinômio interpolador de f relativamente aos pontos $\{x_0, \ldots, x_j\}$. Suponhamos que p_{j-1} é o polinômio interpolador de f relativamente aos pontos $\{x_0, \ldots, x_{j-1}\}$, então temos

$$p_j(x_i) = \underbrace{p_{j-1}(x_i)}_{\substack{=y_i\text{, pois } p_{j-1} \\ \text{é um polinômio} \\ \text{interpolador}}} + (y_j - p_{j-1}(x_j)) \underbrace{\prod_{k=0}^{j-1} \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}}_{\substack{=0\text{, pois } x_i - x_k = 0 \\ \text{para } k=i}} = y_i, \qquad \text{para } i = 0, 1, \ldots, j-1.$$

Então p_j interpola os pontos $\{x_0, \ldots, x_{j-1}\}$. Temos

$$p_j(x_j) = p_{j-1}(x_j) + (y_j - p_{j-1}(x_j)) \underbrace{\prod_{k=0}^{j-1} \frac{x_j - x_k}{x_j - x_k}}_{=1} = y_j.$$

Então p_j interpola também o ponto x_j. Concluimos por indução, que p_j é o polinômio interpolador de f relativamente aos pontos $\{x_0, \ldots, x_j\}$.

Polinômio interpolador na forma de Newton

- Vamos dar uma definição um pouco mais geral deste polinômio interpolador. Seja f uma função tabelada nos pontos $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j\}$.
- Denotamos p_j^i o polinômio interpolador de f relativamente aos pontos $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j\}$. Observe que o grau de p_j^i é $\leq (j-i)$ e temos $p_i^i(x) = y_i$ para todos $x \in \mathbb{R}$.
- A formula de indução fornece (cuidado: o produto começa com $k = i$)

$$p_j^i(x) = p_{j-1}^i(x) + (y_j - p_{j-1}^i(x_j)) \prod_{k=i}^{j-1} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

- Vamos definir a diferença dividida $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j]$ de ordem $(j-i)$ relativa aos pontos $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j\}$:

$$f[x_i] := y_i,$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j] := (y_j - p_{j-1}^i(x_j)) \prod_{k=i}^{j-1} \frac{1}{x_j - x_k}, \quad \text{para } j \geq i+1.$$

- Usando estas diferenças divididas, obtemos o polinômio interpolador na forma de Newton de f relativamente aos pontos $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j\}$:

$$p_j^i(x) = f[x_i] + (x - x_i) f[x_i, x_{i+1}] + \cdots + \prod_{k=i}^{j-1} (x - x_k) f[x_i, \ldots, x_j]$$

Polinômio interpolador na forma de Newton

Vamos ver um método eficiente para calcular o polinômio interpolador p_j^i na forma de Newton

Proposição: Sejam $(j-i+1)$ pontos distintos $\{x_k\}_{k=i}^{j}$ e $y_k = f(x_k)$ os valores de uma função f nestes pontos x_k, com $0 \leq i < j$. Então a diferença dividida de ordem $(j-i)$ relativa aos pontos $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j\}$ satisfaz

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}.$$

Usando esta proposição, conseguimos calcular as diferenças divididas de maneira eficiente usando a tabela seguinte:

x	$f(x)$	1a. diferença dividida	2a. diferença dividida	3a. diferença dividida
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		
x_3	$f[x_3]$			

Tabela: Cálculo das diferenças divididas usando a proposição.

Exemplo: Vamos calcular o polinômio interpolador para estes pontos:

x_i	0	1	3	4
$y_i = f(x_i)$	-5	1	25	55

O polinômio interpolador é de grau ≤ 3 (pois têm 4 pontos tabelados) e tem a forma:

$$p_3(x) = f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

x_i	$f[x_i]$	1a. diferença dividida	2a. diferença dividida	3a. diferença dividida
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		
x_3	$f[x_3]$			

x_i	$f[x_i]$	1a. diferença dividida	2a. diferença dividida	3a. diferença dividida
0	-5			
		$\frac{1-(-5)}{1-0} = 6$		
1	1		$\frac{12-6}{3-0} = 2$	
		$\frac{25-1}{3-1} = 12$		$\frac{6-2}{4-0} = 1$
3	25		$\frac{30-12}{4-1} = 6$	
		$\frac{55-25}{4-3} = 30$		
4	55			

Exemplo:

x_i	$f[x_i]$	1a. diferença dividida	2a. diferença dividida	3a. diferença dividida
0	-5			
		$\frac{1-(-5)}{1-0} = 6$		
1	1		$\frac{12-6}{3-0} = 2$	
		$\frac{25-1}{3-1} = 12$		$\frac{6-2}{4-0} = 1$
3	25		$\frac{30-12}{4-1} = 6$	
		$\frac{55-25}{4-3} = 30$		
4	55			

O polinômio interpolador de f relativamente aos pontos $\{0, 1, 3, 4\}$ é:

$$p_3^0(x) = f[x_0]+(x-x_0)f[x_0, x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2]+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3],$$

$$= -5 + 6(x-0) + 2(x-0)(x-1) + 1(x-0)(x-1)(x-3) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5.$$

O polinômio interpolador p_3^1 de f relativamente aos pontos $\{1, 3, 4\}$ é:

$$p_3^1(x) = 1 + 12(x-1) + 6(x-1)(x-3) = 6x^2 - 12x + 7$$

O polinômio interpolador p_3^2 de f relativamente aos pontos $\{3, 4\}$ é:

$$p_3^2(x) = 25 + 30(x-3) = 30x - 65$$

O polinômio interpolador p_3^3 de f relativamente ao ponto $\{4\}$ é $p_3^3(x) = 55$.

Delimitação do erro de truncamento na interpolação polinomial

- Seja $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, e p_n o polinômio interpolador de f relativamente aos pontos $\{x_k\}_{k=0}^{n}$.
- Erro de truncamento: $E(x) := f(x) - p_n(x)$.
- Podemos mostrar que

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

  com $\xi \in [a,b]$. Aqui, $f^{(n+1)}$ é a $(n+1)$-ésima derivada de f.
- Problema: ξ não é conhecido.
- Podemos usar a estimativa seguinte:

$$|E(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{z \in [a,b]} |f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} |x - x_k|.$$

Exemplo: $f(x) = e^x$

x	1.0	1.1	1.2
e^x	2.718	3.004	3.320

Calculamos as diferenças divididas:

x_i	$f(x_i)$	1a. diferença dividida	2a. diferença dividida
1.0	2.718		
		$\frac{3.004-2.718}{1.1-1.0} = 2.86$	
1.1	3.004		$\frac{3.16-2.86}{1.2-1.0} = 1.5$
		$\frac{3.320-3.004}{1.2-1.1} = 3.16$	
1.2	3.320		

O polinômio interpolador de f relativamente aos pontos $\{1.0, 1.1, 1.2\}$ é:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &= 2.718 + 2.86(x - 1) + 1.5(x - 1)(x - 1.1) \end{aligned}$$

Estimativa de erro:

$$|E(x)| \leq \frac{\max\limits_{z\in[a,b]} |f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} |x - x_k| = \frac{|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|}{3!} \max_{z\in[1.0,1.2]} |f^{(3)}(z)|$$

Temos $f^{(3)}(x) = e^x$ então $\max\limits_{z\in[1.0,1.2]} |f^{(3)}(z)| = e^{1.2} \approx 3.32$. Obtemos

$$|E(1.05)| = |f(1.05) - p_2(1.05)| = |2.85725 - e^{1.05}| \leq 2.075 \times 10^{-4}.$$

Interpolação por splines lineares

- A aproximação de uma função f em $[a, b]$ por um polinômio de Lagrange é uma aproximação global, no sentido que usamos apenas um polinômio p no intervalo inteiro $[a, b]$.
- Um abordagem mais flexível é de dividir $[a, b]$ em m subintervalos e procurar uma aproximação de f usando uma função polinomial por trecho, chamada spline.

Definição: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f contínua, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $m \geq 2$. O spline linear s_ℓ que interpola f em $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ é definido por

$$s_\ell(x) := \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

- Os pontos $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ são os nós do spline.
- É fácil verificar que $s_\ell(x_i) = f(x_i), i = 0, \ldots, m$.
- A restrição de s_ℓ a $[x_{i-1}, x_i]$ é um polinômio linear, de fato é um polinômio de Lagrange.
- O spline s_ℓ é uma função continua e linear por trecho em $[a, b]$.

Erro de interpolação usando splines lineares

Para um conjunto dado de pontos $\{x_i\}_{i=0}^m$, vamos definir

$$h_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{e} \quad h := \max_{1\le i\le m} h_i.$$

Teorema: Seja $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ e s_ℓ o spline linear que interpola f em $\{x_i\}_{i=0}^m$. Temos a estimativa seguinte:

$$\|f - s_\ell\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x) - s_\ell(x)| \le \frac{h^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Idéia da demonstração: Usar a estimativa para o erro de interpolação usando o polinômio de Lagrange em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, isto é

$$f(x) - s_\ell(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_{i-1})(x - x_i), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

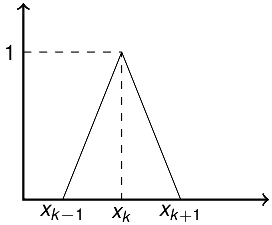
Observação: A importância deste teorema é de mostrar que o erro de interpolação usando o spline linear s_ℓ é da ordem h^2. Entõ é fácil controlar o erro de interpolação reduzindo o tamanho do passo h. O controle do erro de interpolação é mais difícil usando um método de aproximação global como um polinômio de Lagrange.

Funções de base para splines lineares

- Seja s_ℓ o spline linear que interpola $f \in \mathcal{C}([a,b])$ nos pontos $\{x_i\}_{i=0}^m$.
- Podemos exprimir s_ℓ como uma combinação linear de funções de base φ_k:

$$s_\ell(x) = \sum_{k=0}^{m} \varphi_k(x) f(x_k), \qquad x \in [a,b].$$

- φ_k é um spline linear também, que satisfaz $\varphi(x_k) = 1$, e $\varphi(x_j) = 0$ quando $j \neq k$.
- Dizemos que φ_k é um spline linear de base ou função chapeu.



$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_{k-1}, \\ \frac{x - x_{k-1}}{h_k} & \text{se } x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \frac{x_{k+1} - x}{h_{k+1}} & \text{se } x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ 0 & \text{se } x_{k+1} \leq x. \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_1} & \text{se } a = x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{se } x_1 \leq x. \end{cases} \qquad \varphi_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_{m-1}, \\ \frac{x - x_{m-1}}{h_m} & \text{se } x_{m-1} \leq x \leq x_m = b. \end{cases}$$

Splines cúbicos

- $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $m \geq 2$.
- Um spline cúbico $s \in \mathcal{C}^2([a,b])$ tem que ter as propriedades seguintes
  1. $s(x_i) = f(x_i)$, para $i = 0, \ldots, m$.
  2. s é polinômio cúbico em $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, m$.
- Para um conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=0}^m$ dados e uma função $f \in \mathcal{C}([a,b])$ dada, existe mais de um spline cúbico interpolante que satisfaz as condições acima.
- De fato s é determinado por $4m$ parâmetros: 4 parâmetros para o polinômio cúbico em cada $[x_{i-1}, x_i]$, e têm m intervalos. Do outro lado, temos $m+1$ condições de interpolação $s(x_i) = f(x_i)$, e $3(m-1)$ condições de continuidade, pois $s \in \mathcal{C}^2([a,b])$. Então temos

$$4m - 2 \ \text{condições},$$
$$4m \ \text{parâmetros},$$

  então temos 2 graus de liberdade adicionais para escolher o spline cúbico s.
- **Definição:** O spline cúbico natural s_2 é um spline cúbico que satisfaz também $s_2''(x_0) = s_2''(x_m) = 0$.
- **Definição:** O spline cúbico restrito s_r é um spline cúbico que satisfaz também $s_r'(x_0) = f'(x_0)$ e $s_r'(x_m) = f'(x_m)$.

Construção do spline cúbico natural

- Como s_2 é polinômio cúbico em $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, então s_2'' é um polinômio de grau 1 em $[x_{i-1}, x_i]$.
- Definimos $\sigma_i = s_2''(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$.
- Então s_2'' tem a forma seguinte:

$$s_2''(x) = \frac{x_i - x}{h_i}\sigma_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i}\sigma_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

- Integrando s_2'' duas vezes obtemos

$$s_2(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i}\sigma_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}\sigma_i + \alpha_i(x - x_{i-1}) + \beta_i(x_i - x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

  onde α_i, β_i são constantes de integração.

- Usando $h_i := x_i - x_{i-1}$ e as condições de interpolação em $[x_{i-1}, x_i]$, podemos calcular α_i e β_i:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s_2(x_{i-1}) & = & f(x_{i-1}) \\ s_2(x_i) & = & f(x_i) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\sigma_{i-1}}{6}h_i^2 + h_i\beta_i & = & f(x_{i-1}) \\ \frac{\sigma_i}{6}h_i^2 + h_i\alpha_i & = & f(x_i) \end{array} \right.$$

  e obtemos

$$\alpha_i = \frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{\sigma_i}{6}h_i, \qquad \beta_i = \frac{f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{\sigma_{i-1}}{6}h_i.$$

Construção do spline cúbico natural

- Como $s_2 \in \mathcal{C}^2([a,b])$, precisamos também das condições de continuidade seguinte:

$$s_2(x_i^-) = s_2(x_i^+), \text{ para } i = 1, \ldots, m-1,$$
$$s_2'(x_i^-) = s_2'(x_i^+), \text{ para } i = 1, \ldots, m-1,$$
$$s_2''(x_i^-) = s_2''(x_i^+), \text{ para } i = 1, \ldots, m-1,$$

  onde

$$s_2(x_i^-) := \lim_{x \to x_i, x \leq x_i} s_2(x), \qquad s_2(x_i^+) := \lim_{x \to x_i, x \geq x_i} s_2(x).$$

- De fato, as condições $s_2(x_i^-) = s_2(x_i^+)$ e $s_2''(x_i^-) = s_2''(x_i^+)$ já estão satisfeitas, pois s_2 ja satisfaz $\sigma_i = s_2''(x_i)$ e também $s_2(x_i) = f(x_i)$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, m$.
- Então so precisamos usar as condições $s_2'(x_i^-) = s_2'(x_i^+)$ para $i = 1, \ldots, m-1$.
- Depois dos cálculos, obtemos um sistema para as incognitas σ_i, para $i = 1, \ldots, m-1$:

$$h_i \sigma_{i-1} + 2(h_{i+1} + h_i)\sigma_i + h_{i+1}\sigma_{i+1} = 6\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i} \right)$$

  e com $\sigma_0 = \sigma_m = 0$.

- A matriz correspondente à este sistema de equações lineares para σ_i é tridiagonal e invertível, então sempre tem uma solução única σ_i, para $i = 0, \ldots, m$.

Spline cúbico de Hermite

- $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $m \geq 2$.
- Um spline cúbico de Hermite $s \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tem que ter as propriedades seguintes:
  1. $s(x_i) = f(x_i)$, para $i = 0, \ldots, m$.
  2. $s'(x_i) = f'(x_i)$, para $i = 0, \ldots, m$.
  3. s é um polinômio cúbico em $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, m$.
- Em cada $[x_{i-1}, x_i]$, podemos escrever s como

$$s(x) = c_0^i + c_1^i(x - x_{i-1}) + c_2^i(x - x_{i-1})^2 + c_3^i(x - x_{i-1})^3, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

- Para calcular $c_0^i, c_1^i, c_2^i, c_3^i$, usamos a condição $s \in \mathcal{C}^1([a,b])$.
- Começamos com a condição de continuidade no ponto x_i:

$$\begin{aligned}
f(x_i) &= \lim_{x \to x_i, x \leq x_i} s(x) = \lim_{x \to x_i, x \geq x_i} s(x) \\
\Longrightarrow f(x_i) &= c_0^i + c_1^i(x_i - x_{i-1}) + c_2^i(x_i - x_{i-1})^2 + c_3^i(x_i - x_{i-1})^3 \\
&= c_0^{i+1} + c_1^{i+1}\underbrace{(x_i - x_i)}_{=0} + c_2^{i+1}\underbrace{(x_i - x_i)^2}_{=0} + c_3^{i+1}\underbrace{(x_i - x_i)^3}_{=0} \\
\Longrightarrow f(x_i) &= c_0^{i+1} \quad \text{e} \quad f(x_i) = c_0^i + c_1^i h_i + c_2^i h_i^2 + c_3^i h_i^3,
\end{aligned}$$

com $h_i = x_i - x_{i-1}$. Usando $c_0^i = f(x_{i-1})$ e $c_1^i = f'(x_{i-1})$, obtemos o sistema

$$\begin{aligned}
c_0^{i+1} &= f(x_i) \\
c_2^i h_i^2 + c_3^i h_i^3 &= -f(x_{i-1}) - f'(x_{i-1})h_i + f(x_i)
\end{aligned}$$

Spline cúbico de Hermite

- Continuamos com a condição de continuidade no ponto x_i para $s'(x)$:

$$f'(x_i) = \lim_{x \to x_i, x \leq x_i} s'(x) = \lim_{x \to x_i, x \geq x_i} s'(x)$$

$$\Longrightarrow f'(x_i) = c_1^i + 2c_2^i(x_i - x_{i-1}) + 3c_3^i(x_i - x_{i-1})^2$$

$$= c_1^{i+1} + 2c_2^{i+1} \underbrace{(x_i - x_i)}_{=0} + 3c_3^{i+1} \underbrace{(x_i - x_i)^2}_{=0}$$

$$\Longrightarrow f'(x_i) = c_1^{i+1} \quad \text{e} \quad f'(x_i) = c_1^i h_i + 2c_2^i h_i + 3c_3^i h_i^2,$$

com $h_i = x_i - x_{i-1}$. Juntando todas estas equações, obtemos

$$c_0^i = f(x_{i-1})$$

$$c_1^i = f'(x_{i-1})$$

$$c_2^i = 3\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i^2} - \frac{f'(x_i) + 2f'(x_{i-1})}{h_i}$$

$$c_3^i = \frac{f'(x_i) + f'(x_{i-1})}{h_i^2} - 2\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i^3}$$

- **Observação:** Ao contrario do spline cúbico natural, os coeficientes $c_0^i, c_1^i, c_2^i, c_3^i$ do spline cúbico de Hermite são calculados explicitamente, sem resolver um sistema linear.

Erro de interpolação usando o spline cúbico de Hermite

Teorema: Seja $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, e s o spline cúbico de Hermite que interpola f em $\{x_k\}_{k=0}^m$, $a = x_0$, $b = x_m$, temos a estimativa de erro seguinte:

$$\|f - s\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|,$$

com $h := \max_{1\leq i\leq m}(x_i - x_{i-1})$, e $f^{(4)}$ é a quarta derivada de f.