

# A natureza corpuscular da matéria

Vimos as evidências da natureza corpuscular da radiação:

- quantização dos osciladores → Planck
- quantização da luz → Einstein
- fótons como partículas → Compton

Evidências da natureza corpuscular da matéria vêm de muito longe, mas vamos falar apenas de ~1700 em diante. Vamos nos concentrar nos experimentos e argumentos que levaram à descoberta do  $e^-$ , à formulação do modelo de átomo nucleado de Rutherford-Bohr, à descoberta do núcleo atômico, do próton, nêutron, etc. ...

Conceito de átomo: hoje é óbvio, mas chegar até aí exigiu muito estudo e engenhosidade. Tamanho  $\Rightarrow$  dificuldades experimentais.

Evolução das idéias  $\Leftrightarrow$  interdependência entre física, química, matemática e tecnologia. Balança (final do séc. XIX): precisão de  $10^{-8}$  (científica) x  $10^{-3}$  (comum).

Alguns dos gigantes (vejam cap. 2 do Caruso & Oguri):

- Newton: corpos x interações;
- Lavoisier: conservação da matéria (exp. cuidadosas);
- Dalton: atomicidade na lei de proporções múltiplas dos compostos;
- Avogadro: gases às mesmas  $T$  e  $p$  têm o mesmo número de moléculas/volume;
- Maxwell e Boltzmann: teoria cinética dos gases  $\Rightarrow$  propriedades macroscópicas correspondem a médias sobre distribuições de propriedades moleculares;
- Jean Perrin: movimento browniano (experimental);
- Einstein: movimento browniano (teoria).

# Lei da Eletrólise — Faraday

$$m = KQ \text{ com } K \propto \frac{\mu}{n} \Rightarrow$$

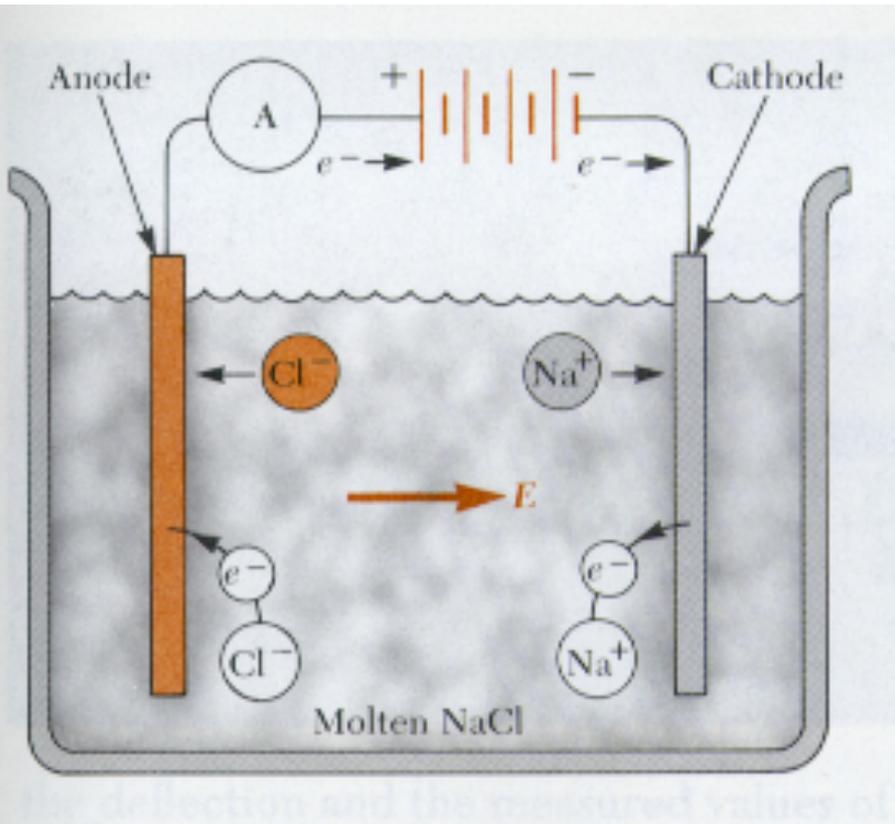
$$\Rightarrow FK = \frac{\mu}{n}, \text{ com } F = 9,65 \cdot 10^4 \text{ C}$$

$$m = \frac{Q \text{ (peso molecular)}}{96500 \text{ C (valencia)}}$$

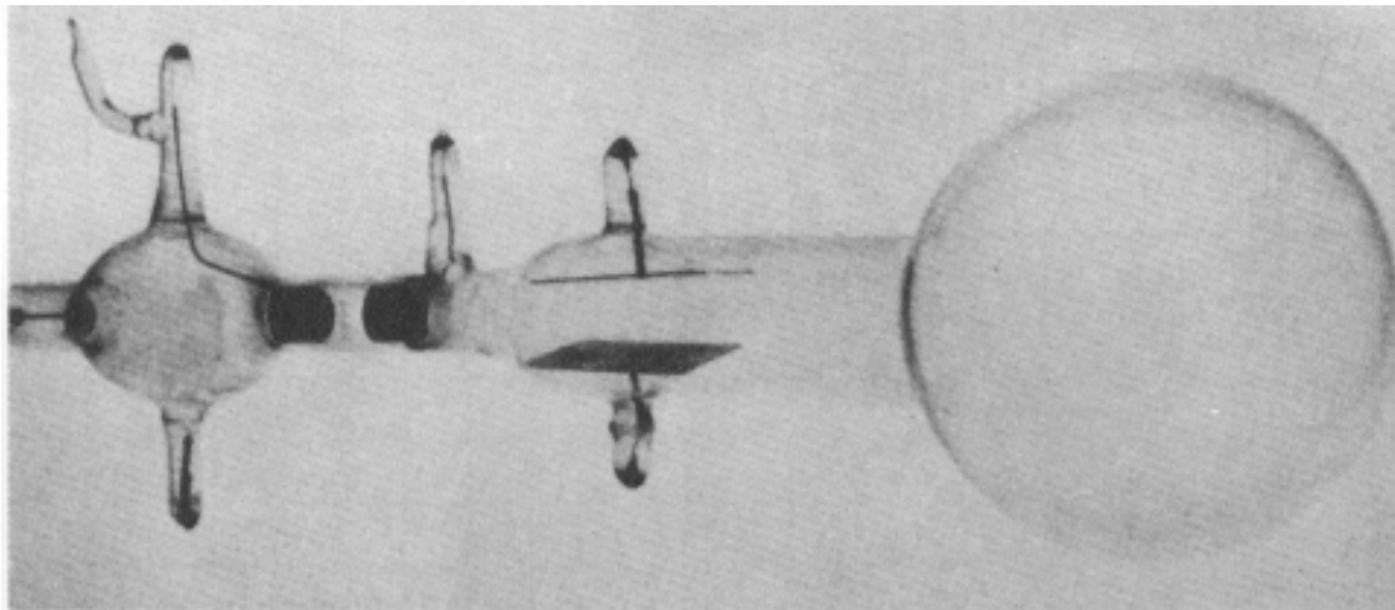
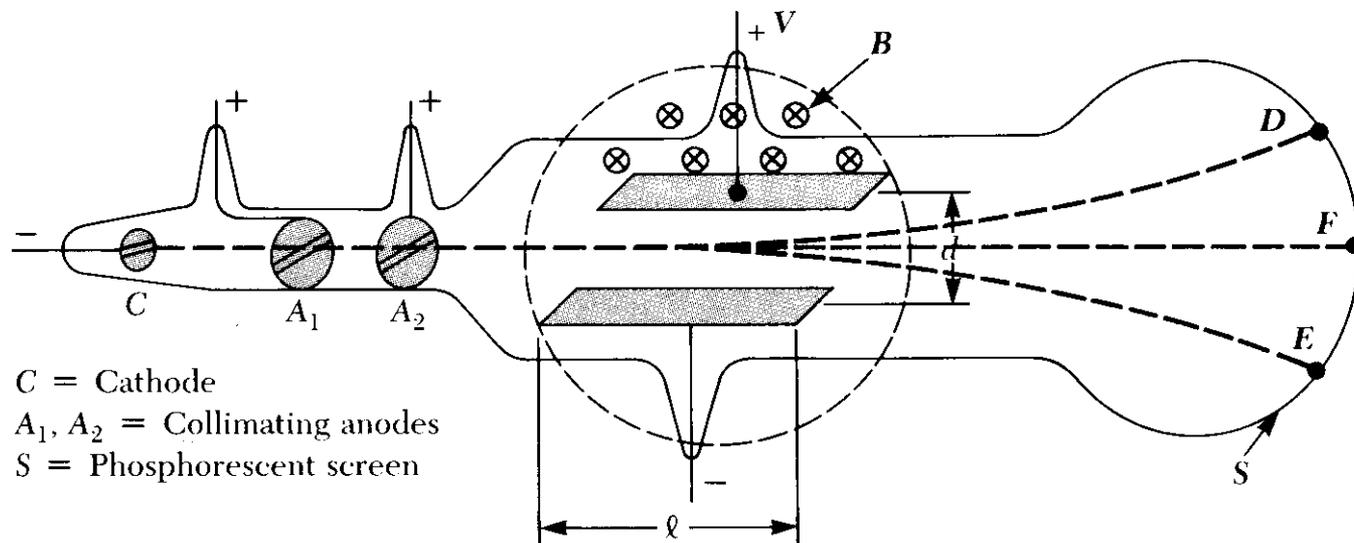
Nada claro em 1833, mas as exp. de Faraday confirmam 3 aspectos importantes da teoria atômica:

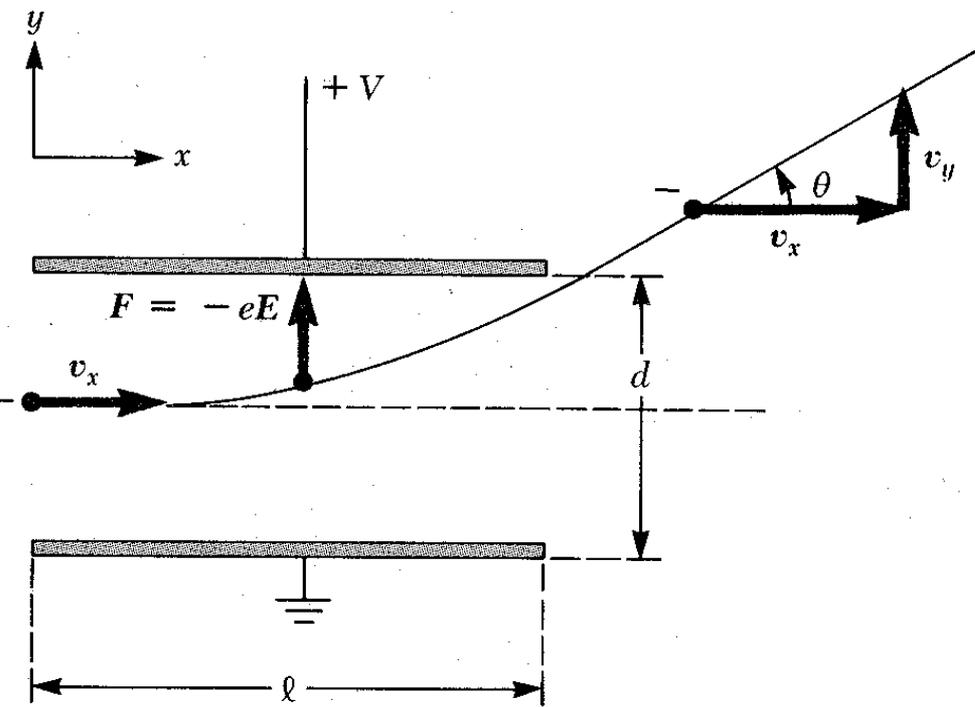
- matéria  $\Leftrightarrow$  moléculas e átomos
- carga elétrica é quantizada
- átomos e moléculas  $\Leftrightarrow$  cargas positivas e negativas

Próximo passo: 1897, J.J. Thomson mostra que raios catódicos são partículas de carga negativa.



# A descoberta do elétron: J.J. Thomson, 1897





$$v_y = a_y t; \quad a_y = \frac{Ee}{m} = \frac{Ve}{md}$$

$$E \quad t = \frac{l}{v_x} \quad \therefore \quad v_y = \frac{Vle}{mv_x d}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{Vl}{v_x^2 d} \left( \frac{e}{m} \right); \quad \text{mas}$$

$$\text{tg}\theta \approx \theta \Rightarrow \theta \approx \frac{Vl}{v_x^2 d} \left( \frac{e}{m} \right)$$

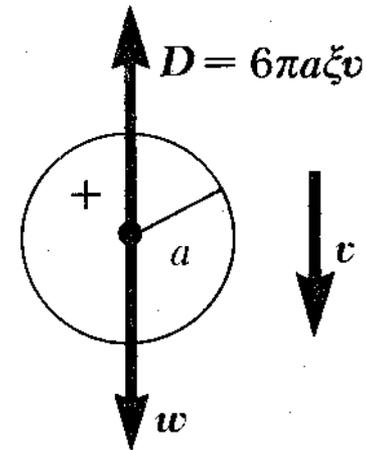
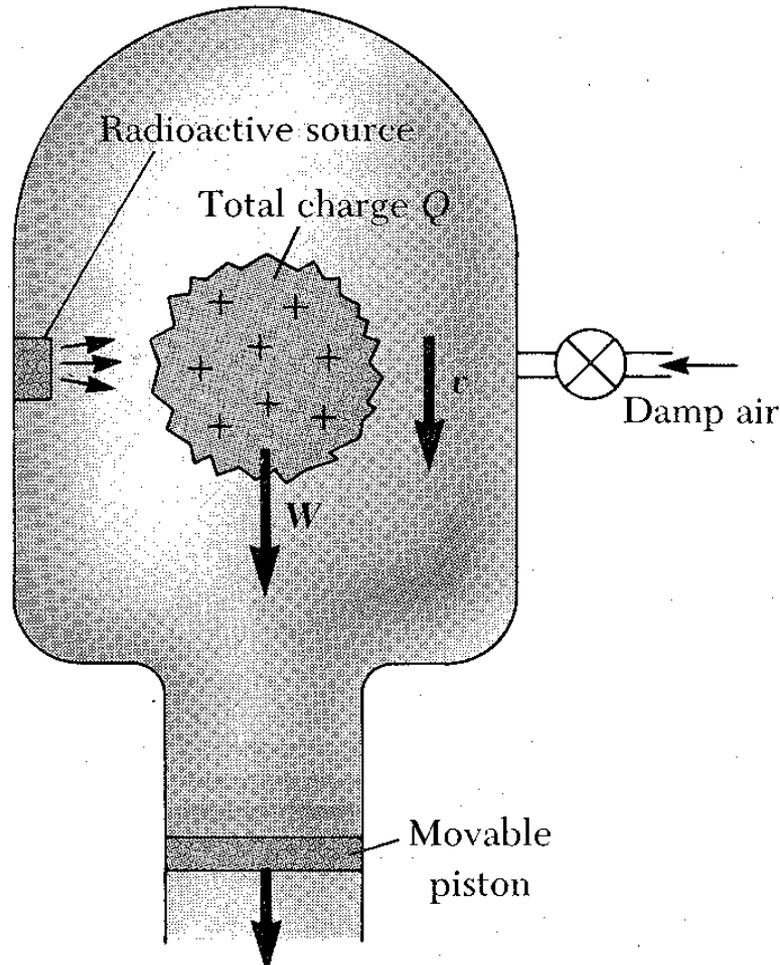
Filtro de velocidades:

$$qE = qv_x B \Rightarrow v_x = \frac{E}{B} = \frac{V}{Bd}$$

Portanto: 
$$\frac{e}{m} = \frac{V\theta}{B^2 ld}$$

# O valor de $e$ : a experiência de Millikan

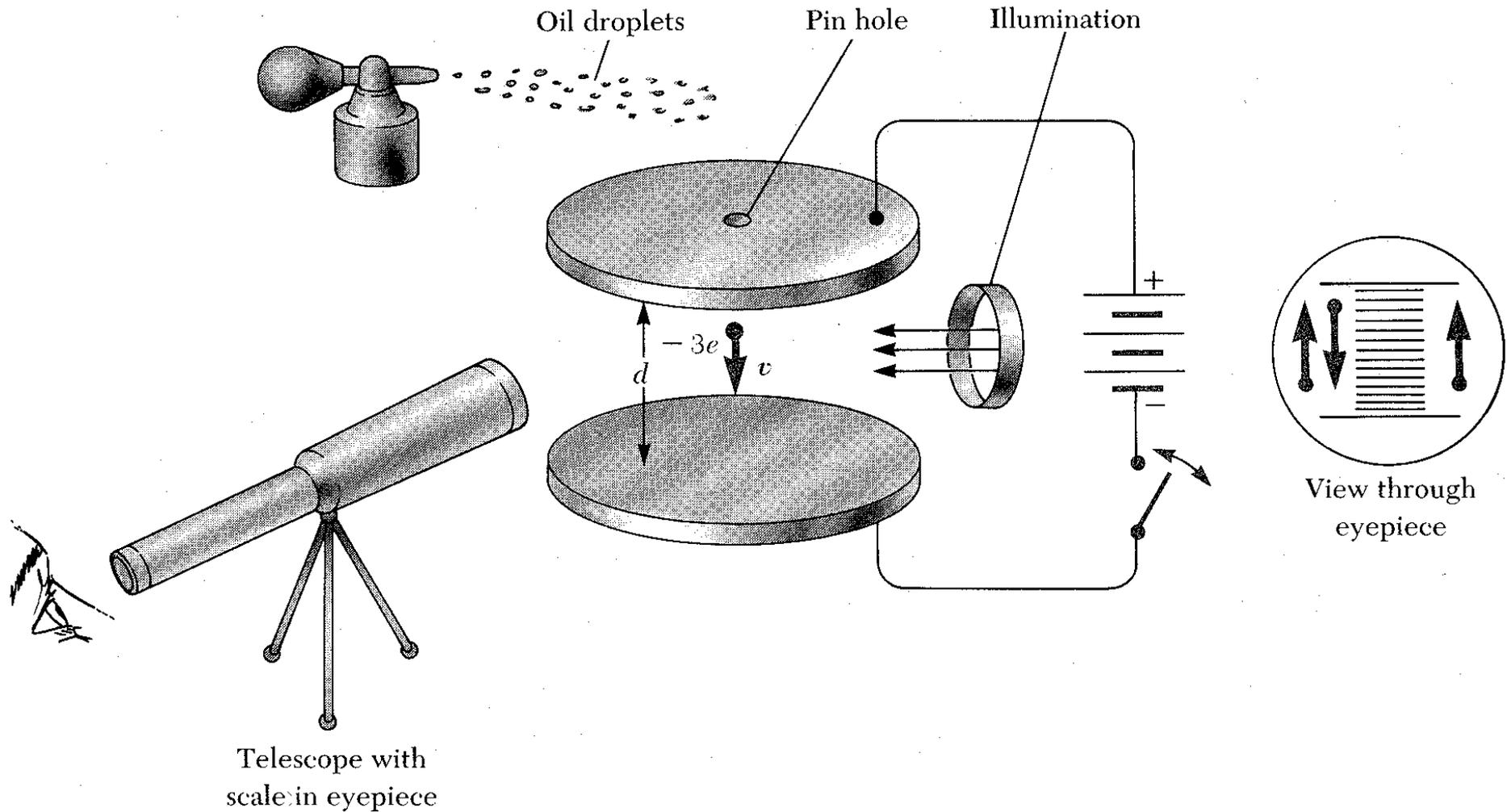
**Thomson, em 1899:**  $1,1 \times 10^{-19} \text{ C} < e < 2,3 \times 10^{-19} \text{ C}$ : mesma carga do átomo de  $H$  liberado na eletrólise.

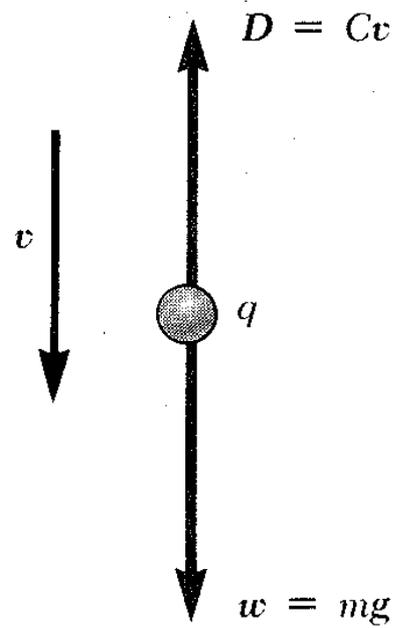


$$w = D \Rightarrow w = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g = D = 6\pi a \zeta v$$

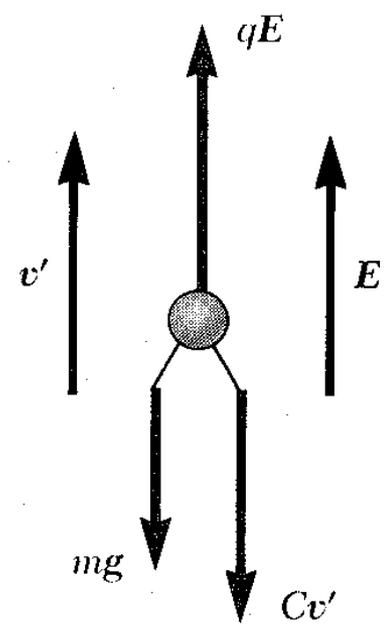
$$\therefore a = \sqrt{\frac{9 \zeta v}{2 \rho g}}$$

# Millikan, 1911: PR 32(1911)349





(a) Field off



(b) Field on

$$Cv - mg = 0 \text{ (sem campo)}$$

$$qE - mg - Cv' = 0 \text{ (com campo)}$$

$$C \frac{y}{t_0} = mg \text{ (sem campo)}$$

$$neE = mg + C \frac{y}{t}$$

$$= Cy \left( \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t} \right)$$

Mudando o estado de carga (raios - X)

$$n'eE = Cy \left( \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t'} \right)$$

Subtraindo :

$$(n' - n)e = \frac{Cy}{E} \left( \frac{1}{t'} - \frac{1}{t} \right)$$

Correção à lei de Stokes :

$$D = \frac{6\pi a \xi v}{1 + \alpha \frac{L}{a}}, \text{ com } \alpha = 0,81 e$$

$L$  o livre caminho médio das moléculas

# Modelos atômicos

Antes de ~1910 → presença de  $e^-$  no átomo.  $Z e^-$  em cada átomo, sendo  $Z \sim A/2$ , com  $A$  o peso atômico (química).

Átomos neutros  $\Rightarrow$  carga positiva  $+Ze$ .

$m_e \ll M_{\text{átomo}} \Rightarrow$  massa nas cargas positivas.  $R_{\text{átomo}} \sim 10^{-10}$  m.

Modelo de Thomson (J.J.): pudim de ameixas. Esfera com  $R_{\text{átomo}}$ , carregada positivamente, com os  $e^-$  uniformemente distribuídos.

Átomo aquecido (excitado)  $\Rightarrow e^-$  oscilando em torno da posição de equilíbrio  $\Rightarrow$  irradiação. Concordância qualitativa.

Quantitativa: Ex. 4.1, pág. 124 (Eisberg).

### EXEMPLO 4-1

(a) Suponha a existência de um elétron de carga  $-e$  dentro de uma região esférica com densidade de carga positiva uniforme  $\rho$  (um modelo do átomo de hidrogênio segundo Thomson). Mostre que seu movimento, se ele tem energia cinética, pode ser de oscilações harmônicas simples em torno do centro da esfera.

Suponhamos que o elétron esteja a uma distância  $a$  do centro, com  $a$  menor do que o raio da esfera. Da lei de Gauss, sabemos que podemos calcular a força que atua sobre o elétron usando a lei de Coulomb

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \right) \frac{e}{a^2} = -\frac{\rho e a}{3\epsilon_0}$$

onde  $(4/3)\pi a^3 \rho$  é a carga positiva total em uma esfera de raio  $a$ . Portanto podemos escrever  $F = -ka$ , onde a constante  $k = \rho e/3\epsilon_0$ . Se o elétron inicialmente em repouso em  $a$  é deixado livre, sem velocidade inicial, essa força vai produzir movimento harmônico simples ao longo de um diâmetro da esfera, pois ela está sempre dirigida para o centro e tem módulo proporcional à distância ao centro.

(b) Suponhamos que a carga positiva total tenha um valor igual em módulo à carga de um elétron (de forma que a carga total do átomo seja zero), e suponhamos que esteja distribuída sobre uma esfera de raio  $r' = 1,0 \times 10^{-10}$  m. Ache a constante da força  $k$  e a freqüência do movimento do elétron.

Temos

$$\rho = \frac{e}{\frac{4}{3} \pi r'^3}$$

de modo que

$$k = \frac{\rho e}{3\epsilon_0} = \frac{e}{\frac{4}{3} \pi r'^3} \frac{e}{3\epsilon_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r'^3}$$

$$= \frac{9,0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \times (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(1,0 \times 10^{-10} \text{ m})^3} = 2,3 \times 10^2 \text{ N/m}$$

A frequência do movimento harmônico simples é então

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2,3 \times 10^2 \text{ N/m}}{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 2,5 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

Como (em analogia com a radiação emitida por elétrons oscilando em uma antena) a radiação emitida pelo átomo terá esta mesma frequência, ela corresponderá a um comprimento de onda

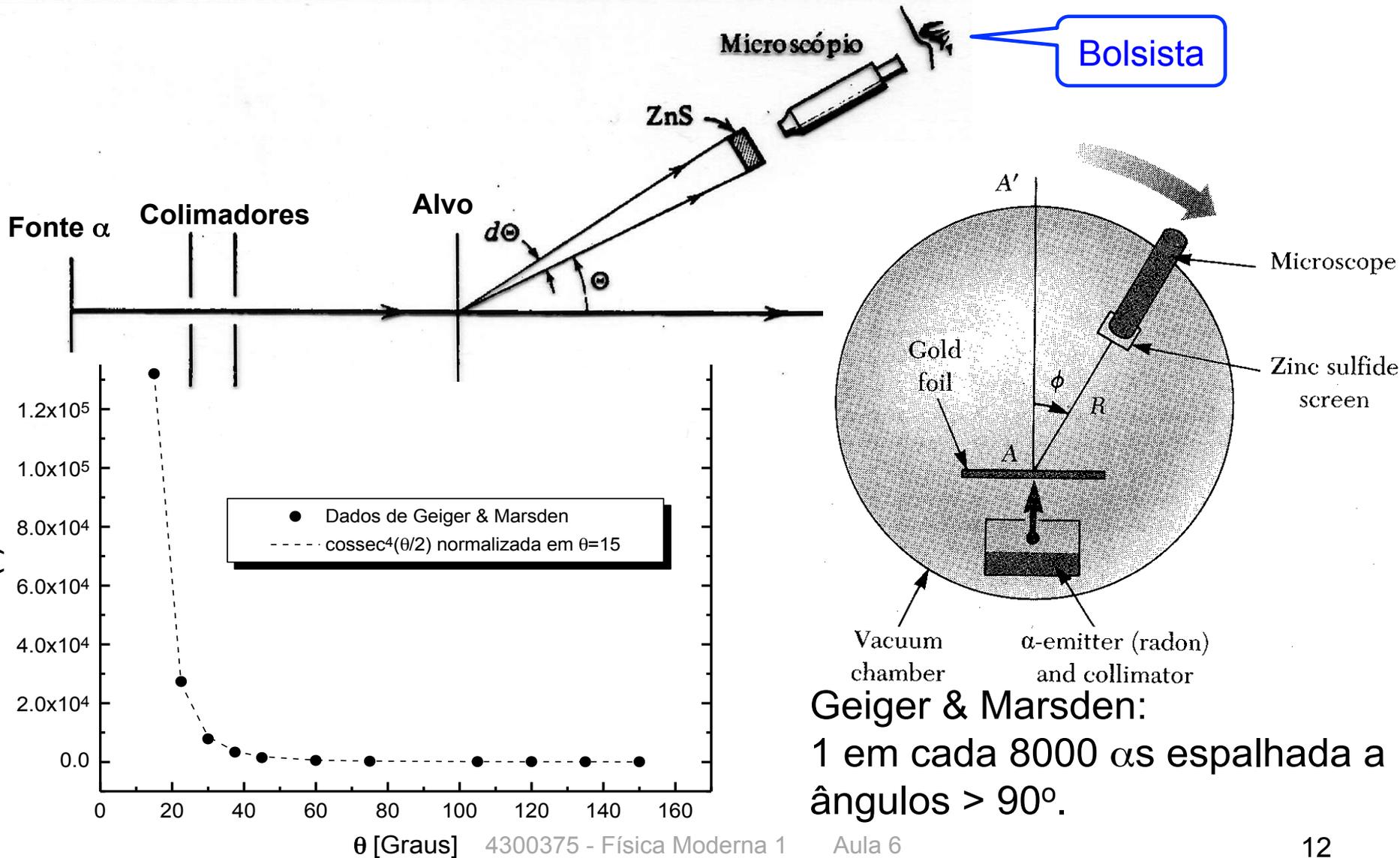
$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}}{2,5 \times 10^{15} / \text{s}} = 1,2 \times 10^{-7} \text{ m} = 1200 \text{ \AA}$$

que está na região do ultravioleta longínquo do espectro eletromagnético. É fácil mostrar que um elétron que se move em uma órbita circular estável de qualquer raio dentro do átomo de Thomson gira com essa mesma frequência, e portanto irradia com essa frequência também.

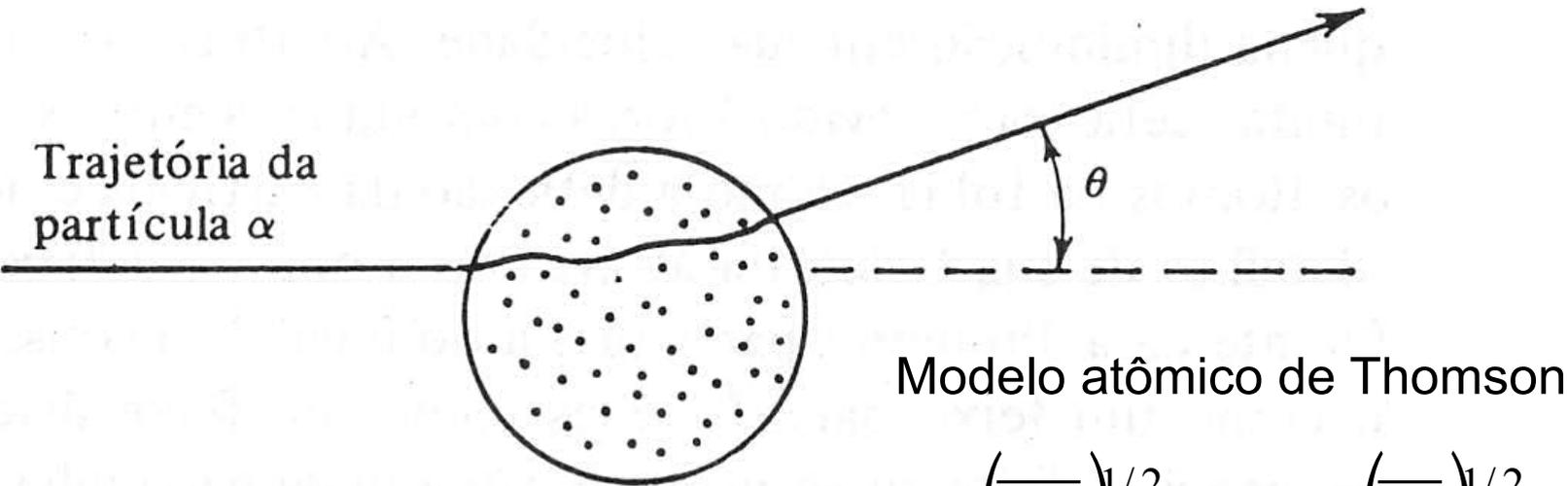
Evidentemente, se supusermos um raio diferente para a esfera de carga positiva, teríamos uma frequência diferente. Mas o fato de um átomo de hidrogênio, segundo Thomson, ter apenas uma frequência de emissão característica é conflitante com o grande número de frequências diferentes observadas no espectro do hidrogênio. ▲

# A experiência de Rutherford

Espalhamento de partículas  $\alpha$  em folhas metálicas finas



$\alpha$  refletidas: número aumentava (até certo ponto) com a espessura da folha  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  ~~efeito de superfície~~



$$\left(\overline{\Theta^2}\right)^{1/2} = \sqrt{N} \left(\overline{\theta^2}\right)^{1/2}$$

Ângulo de deflexão total médio quadrático

Número de centros espalhadores

Ângulo de deflexão médio quadrático

$$N(\Theta) = \frac{2I\Theta}{\Theta^2} e^{-\frac{\Theta^2}{\Theta^2}}$$

Número de partículas espalhadas num ângulo  $\Theta$

Fazer Ex. 4.2, pág. 126 (Eisberg)

## EXEMPLO 4-2

(a) Em uma experiência típica (Geiger e Marsden, 1909), partículas  $\alpha$  foram espalhadas por uma folha de ouro de espessura  $10^{-6}$  m. O ângulo de espalhamento médio encontrado foi  $(\overline{\Theta^2})^{1/2} \simeq 1^\circ \simeq 2 \times 10^{-2}$  rad. Calcule  $(\overline{\theta^2})^{1/2}$ .

O número de átomos atravessados por uma partícula  $\alpha$  é aproximadamente igual à espessura da folha dividida pelo diâmetro do átomo. Então

$$\mathcal{N} \simeq 10^{-6} \text{ m} / 10^{-10} \text{ m} = 10^4$$

O ângulo de deflexão médio ao atravessar um único átomo é então, de (4-1),

$$(\overline{\theta^2})^{1/2} = \frac{(\overline{\Theta^2})^{1/2}}{\sqrt{\mathcal{N}}} \simeq \frac{2 \times 10^{-2}}{10^2} \simeq 2 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

o que não é conflitante com a estimativa do átomo de Thomson,  $\theta \lesssim 10^{-4}$  rad.

(b) Mais de 99% das partículas  $\alpha$  foram espalhadas em ângulos menores que  $3^\circ$ . As medidas, usando  $1^\circ$  para  $(\overline{\Theta^2})^{1/2}$ , estavam de acordo com (4-2) para  $N(\Theta) d\Theta$  para ângulos  $\Theta$  nessa região; mas a distribuição angular do pequeno número de partículas espalhadas em ângulos maiores estava em flagrante desacordo com (4-2). Foi encontrado, por exemplo, que a fração das partículas  $\alpha$  espalhadas em ângulos maiores que  $90^\circ$ ,  $N(\Theta > 90^\circ)/I$ , era aproximadamente  $10^{-4}$ . O que é previsto por (4-2)?

Temos

$$\frac{N(\Theta > 90^\circ)}{I} = \frac{\int_{90^\circ}^{180^\circ} N(\Theta) d\Theta}{I} = e^{-(90)^2} = 10^{-3500}$$

um resultado espantosamente diferente do valor experimental  $10^{-4}$ .

Em geral, observou-se que o número de partículas  $\alpha$  espalhadas em ângulos maiores que alguns graus era *muito* maior do que o número previsto. ▲

# Modelo de Rutherford: o átomo nucleado

Modelo capaz de explicar deflexões a ângulos grandes em um único espalhamento:  $r \downarrow \Rightarrow E \uparrow \Rightarrow F \uparrow$ .

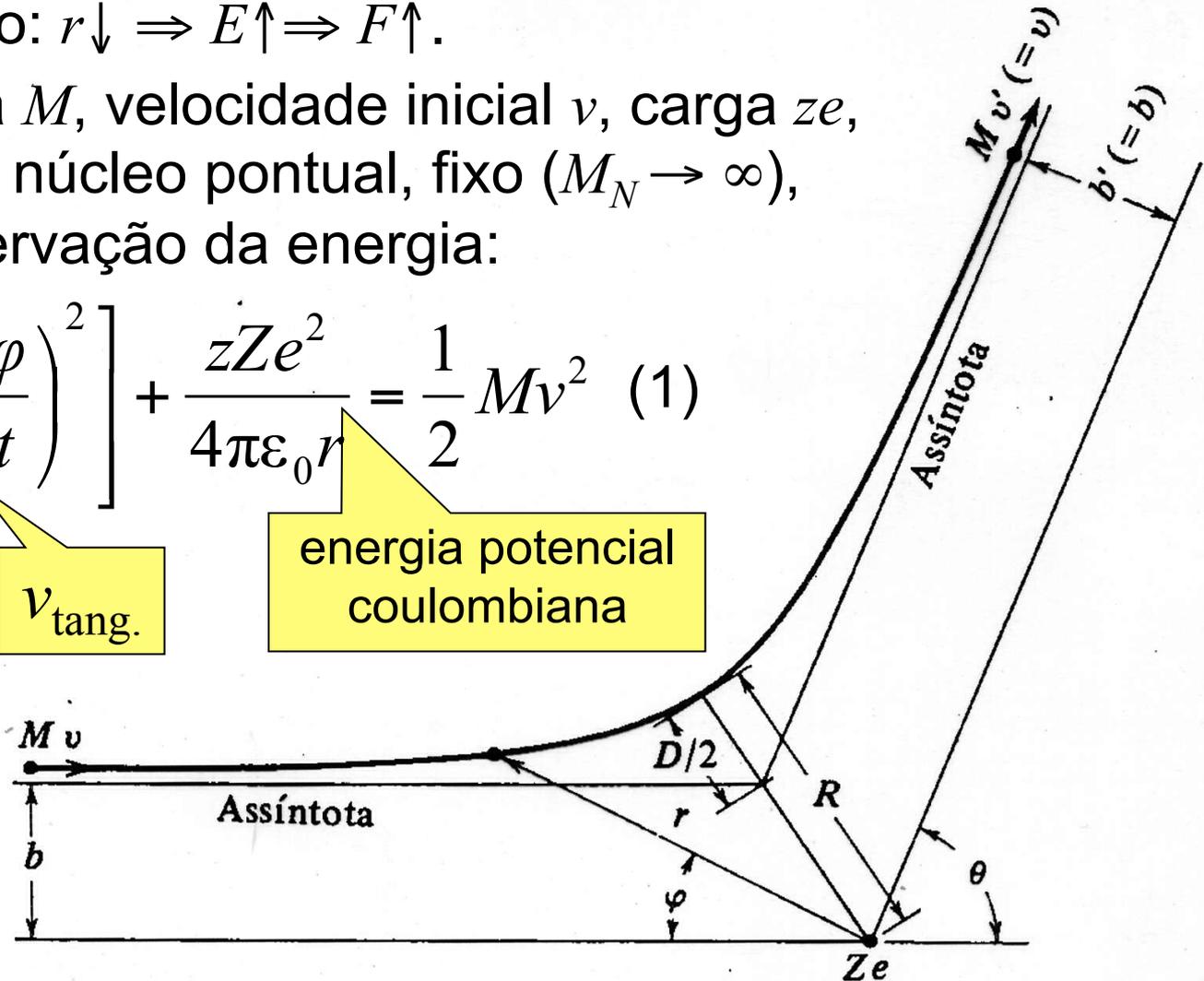
Partícula de massa  $M$ , velocidade inicial  $v$ , carga  $ze$ , incidindo sobre um núcleo pontual, fixo ( $M_N \rightarrow \infty$ ), de carga  $Ze$ . Conservação da energia:

$$\frac{M}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} Mv^2 \quad (1)$$

$v_{\text{radial}}$

$v_{\text{tang.}}$

energia potencial coulombiana



Conservação do momento angular:

$$Mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = L = Mvb = Mv'b' \Rightarrow r^2 \frac{d\varphi}{dt} = vb \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{vb}{r^2} \quad (2)$$

Substituindo na eq. (1):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \frac{v^2 b^2}{r^4} + \frac{2zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r M} = v^2 \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = v^2 - \frac{2zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r M} - \frac{v^2 b^2}{r^2}$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = -v \left[ 1 - \frac{2zZe^2}{4\pi\epsilon_0 Mv^2 r} - \frac{b^2}{r^2} \right]^{1/2} = -v \left[ 1 - \frac{2D}{r} - \frac{b^2}{r^2} \right]^{1/2} \quad (3)$$

onde  $D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 Mv^2}$

Pegamos o sinal negativo, pois, na aproximação,  $\frac{dr}{dt} < 0$

Dividindo (2) por (3), temos:

$$\frac{d\varphi/dt}{dr/dt} = \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{b}{r^2} \left[ 1 - \frac{2D}{r} - \frac{b^2}{r^2} \right]^{-1/2}$$

e  $\frac{d\varphi}{dr} \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ . Integrando em  $r$ :

$$\varphi = \arccos \left[ \frac{b}{\sqrt{b^2 + D^2}} \left( 1 - \frac{2D}{r} - \frac{b^2}{r^2} \right)^{1/2} \right] - \arccos \frac{b}{\sqrt{b^2 + D^2}}$$

No ponto de máxima aproximação,  $\frac{dr}{dt} = 0$

Pela [eq. \(3\)](#), o argumento da raiz deve ser nulo. Assim:

$$\varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{b}{\sqrt{b^2 + D^2}} \quad \text{A 2ª metade da trajetória é simétrica, portanto a variação total é } 2\varphi_0.$$

A deflexão da partícula será, então:

$$\theta = \pi - 2\varphi_0 = 2 \arccos \frac{b}{\sqrt{b^2 + D^2}} \Rightarrow \arccos \frac{b}{\sqrt{b^2 + D^2}} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{b^2 + D^2}} = \cos \frac{\theta}{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{b^2}{b^2 + D^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{D^2}{b^2 + D^2} \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{D}{\sqrt{b^2 + D^2}}$$

$$\text{Assim, como } \cotg \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{b}{D} \Rightarrow b = D \cotg \frac{\theta}{2}$$

Assim podemos calcular a distribuição de partículas espalhadas entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ . Isso vai depender do número de alvos com parâmetro de impacto entre  $b$  e  $b + db$ . Mas:

$$db = -\frac{D}{2} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta/2}$$

Consideremos o alvo como uma folha de  $1 \text{ cm}^2$  e espessura  $t$ , com  $\rho$  núcleos/ $\text{cm}^3$ . Traçando anéis de raio interno  $b$  e externo  $b + db$  em torno dos núcleos, teremos uma área de  $2\pi b db$  em cada anel. O número de anéis na folha é  $\rho t$  (número de núcleos/ $\text{cm}^2$ ). A probabilidade da alfa passar por um desses anéis,  $P(b)db$ , é igual à área deles dividida pela área total:

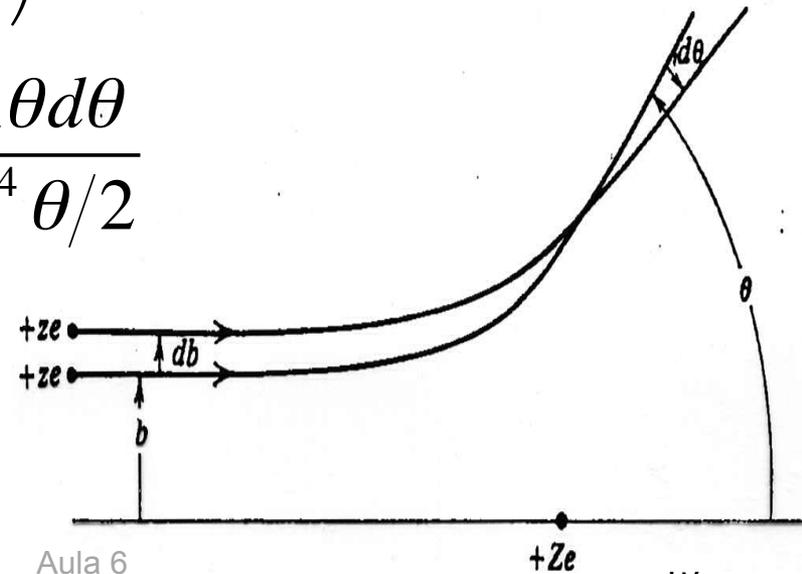
$$P(b)db = \rho t 2\pi b db.$$

Substituindo  $b$  e  $db$ :

$$P(b)db = 2\pi\rho t D \cotg \frac{\theta}{2} \left( -\frac{D}{2} \frac{d\theta}{\text{sen}^2 \theta/2} \right)$$

$$= -\pi\rho t D^2 \frac{\cos(\theta/2)d\theta}{\text{sen}^3 \theta/2} = -\frac{\pi\rho t D^2}{2} \frac{\text{sen} \theta d\theta}{\text{sen}^4 \theta/2}$$

O sinal de  $-$  aparece pois uma redução em  $b$  provoca um aumento em  $\theta$ . Assim, o número de partículas espalhadas entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ , será:



Número de partículas espalhadas entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ :

$$N(\theta)d\theta = -P(b)dbI = \frac{I\rho tD^2}{2} \frac{\text{sen}\theta d\theta}{\text{sen}^4 \theta/2}$$

Substituindo o valor de  $D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{Mv^2}$ :

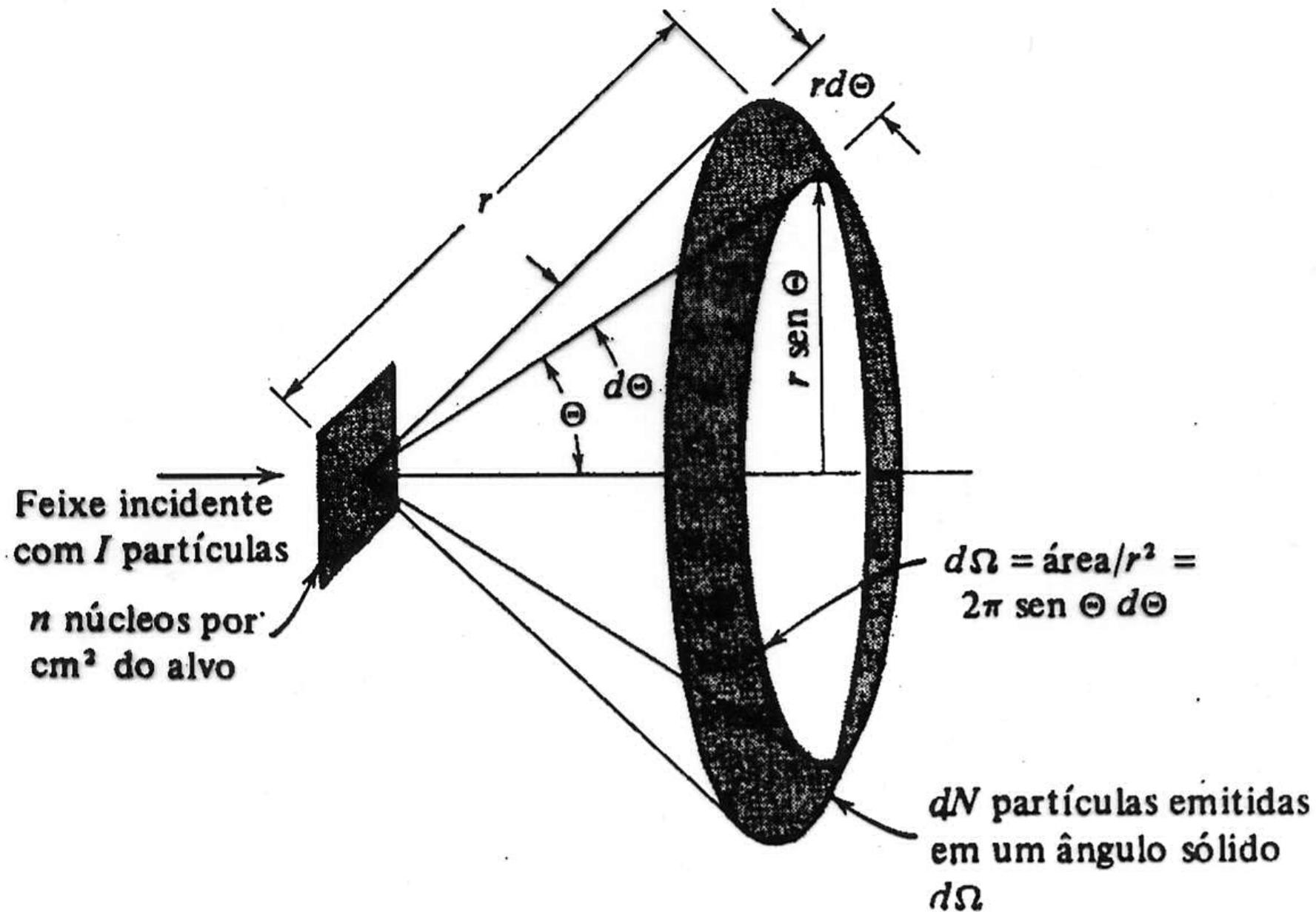
$$N(\theta)d\theta = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{2Mv^2}\right)^2 I\rho t \frac{2\pi\text{sen}\theta d\theta}{\text{sen}^4 \theta/2}$$

Introduzindo a seção de choque (diferencial em ângulo sólido), escrevemos:

$$dN = \frac{d\sigma}{d\Omega} I\rho t d\Omega = \frac{d\sigma}{d\Omega} I n d\Omega$$

Número de núcleos/cm<sup>2</sup>  
no alvo

Elemento de ângulo  
sólido:  $d\Omega = 2\pi\text{sen}\theta d\theta$



$$dN = \frac{d\sigma}{d\Omega} I \rho t d\Omega = \frac{d\sigma}{d\Omega} I n d\Omega$$

$$dN = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{zZe^2}{2Mv^2} \right)^2 \frac{I n d\Omega}{\text{sen}^4 \theta/2}$$

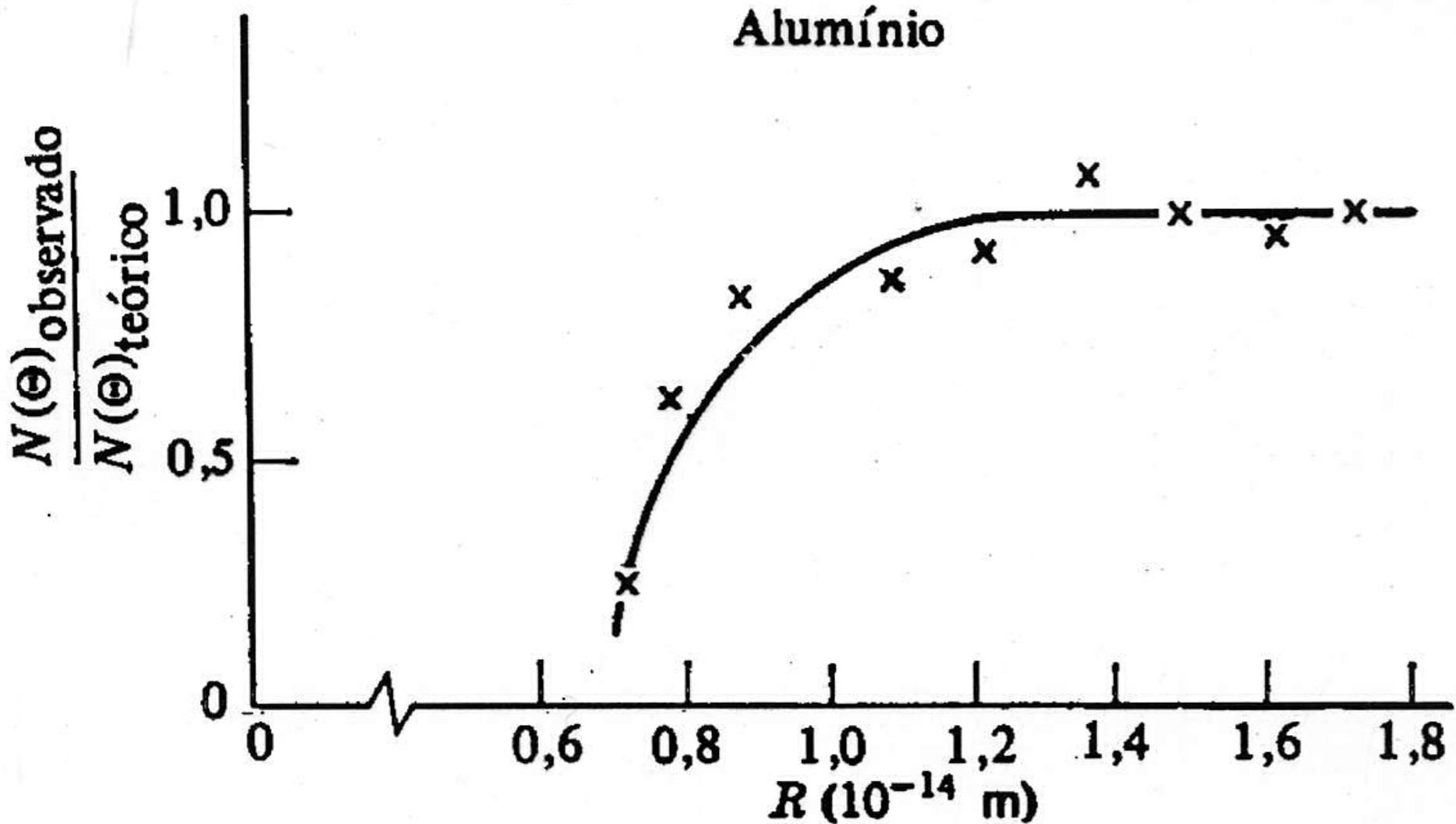
Portanto a seção de choque de Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{zZe^2}{2Mv^2} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4 \theta/2}$$

$$2D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{\frac{Mv^2}{2}} \Rightarrow \frac{Mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{2D}$$

Distância de máxima aproximação em uma colisão frontal

Limite de validade da expressão teórica: tamanho do núcleo



Rutherford: átomo nuclear. Mas e os  $e^-$ ? Estabilidade?