



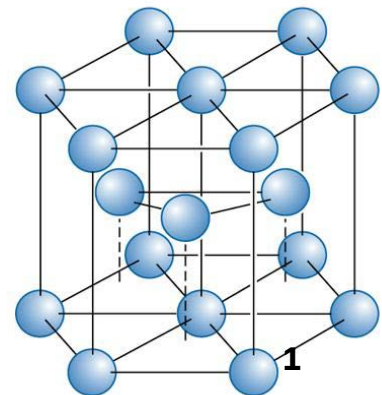
Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de Lorena
Departamento de Engenharia de Materiais



Ensaaios Mecânicos dos Materiais – Flexão, Fluência e Fadiga

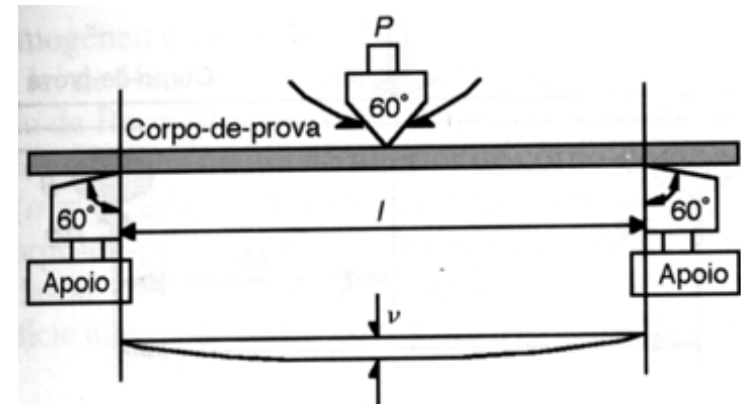
Introdução à Ciência dos Materiais

Prof. Dr. Cassius O.F.T. Ruchert, Professor Associado

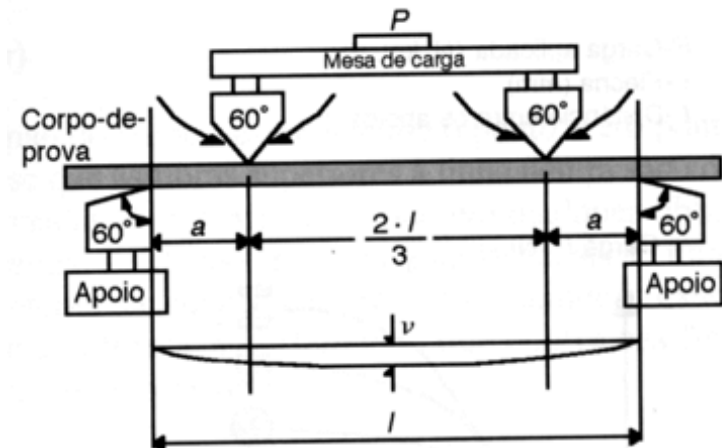


Ensaio de Flexão

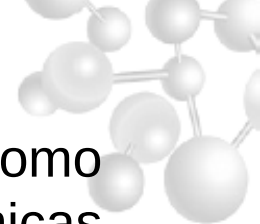
- O Ensaio de flexão consiste na aplicação de uma carga crescente em determinados pontos de uma barra
- Mede-se o valor da carga versus a deformação máxima
- Existem dois tipos principais de Ensaio: Ensaio de flexão em três pontos e Ensaio de flexão em quatro pontos



(A) Ensaio de flexão em três pontos



(B) Ensaio de flexão em quatro pontos



- Grande aplicação para materiais frágeis ou de elevada dureza, como o caso de FoFo, aços ferramentas, aços rápidos, e cerâmicas estruturais, pois estes materiais, devido a baixa ductilidade não permitem ou dificultam a utilização de outros tipos de ensaios mecânicos.
- Materiais Dúteis estes ensaios não são utilizados, mas existem duas variantes que são os ensaios de dobramento e de tenacidade à fratura, CTOD.

CrITÉRIOS do CP:

- Recomenda-se a forma retangular.
- A relação comprimento/espessura não deve ser inferior a 15.
- A relação largura/espessura não deve ser superior a 10.
- Mínimo de 6 CPs, para cada material ensaiado

Ensaio de Flexão

As principais propriedades obtidas em um Ensaio de Flexão são:

- Módulo de ruptura na flexão
 - Módulo de elasticidade
 - Módulo de resiliência
 - Módulo de tenacidade
- É um ensaio muito utilizado em cerâmicas, polímeros e metais duros, pois fornece dados de deformação quando sujeitos a cargas de flexão

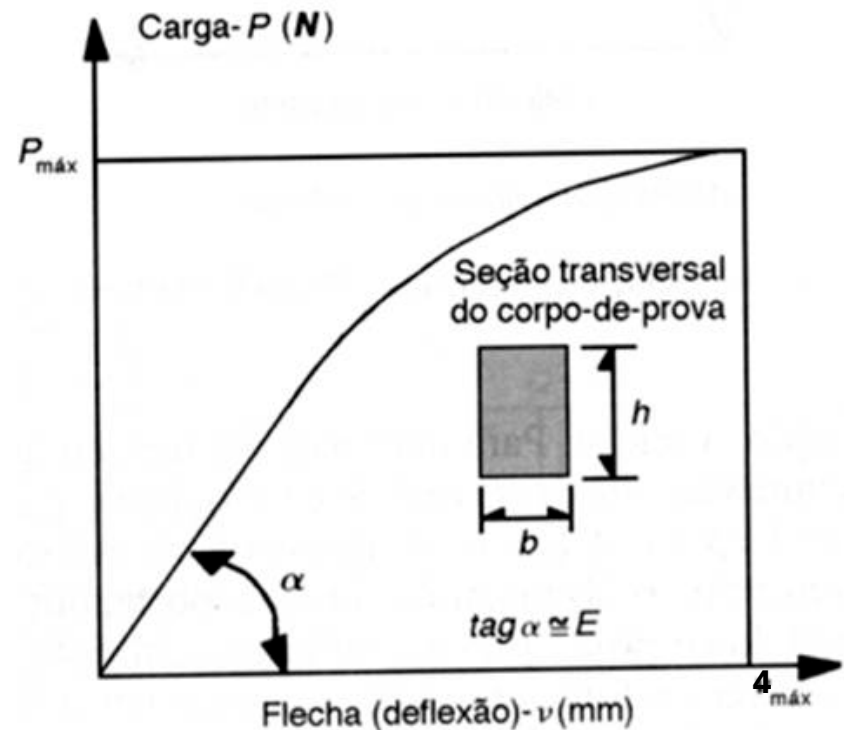
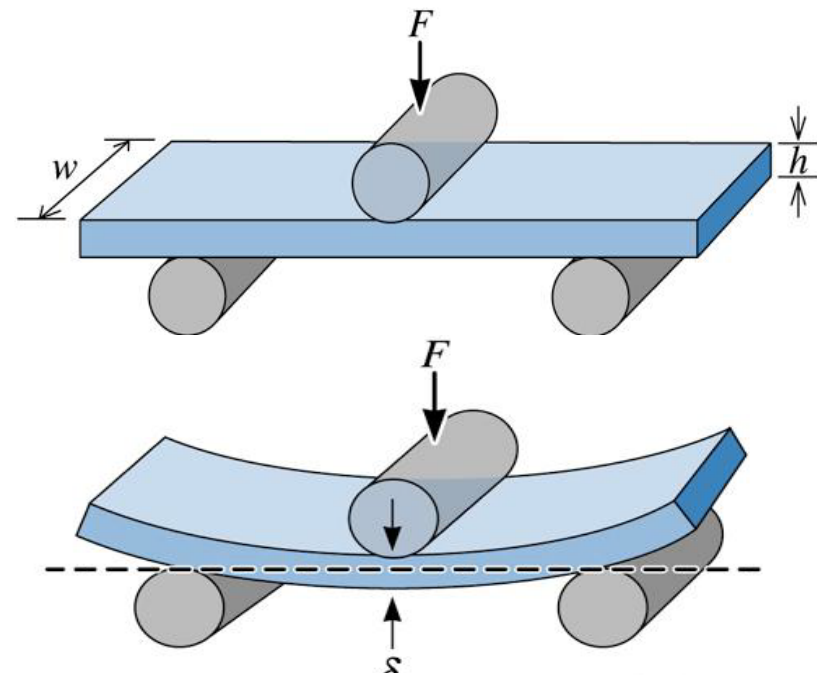
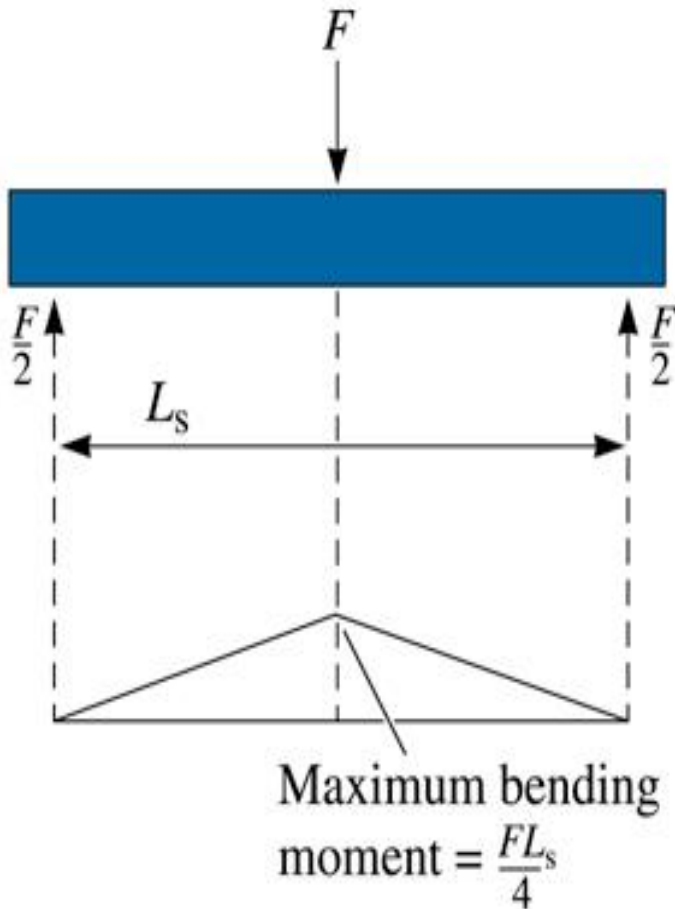
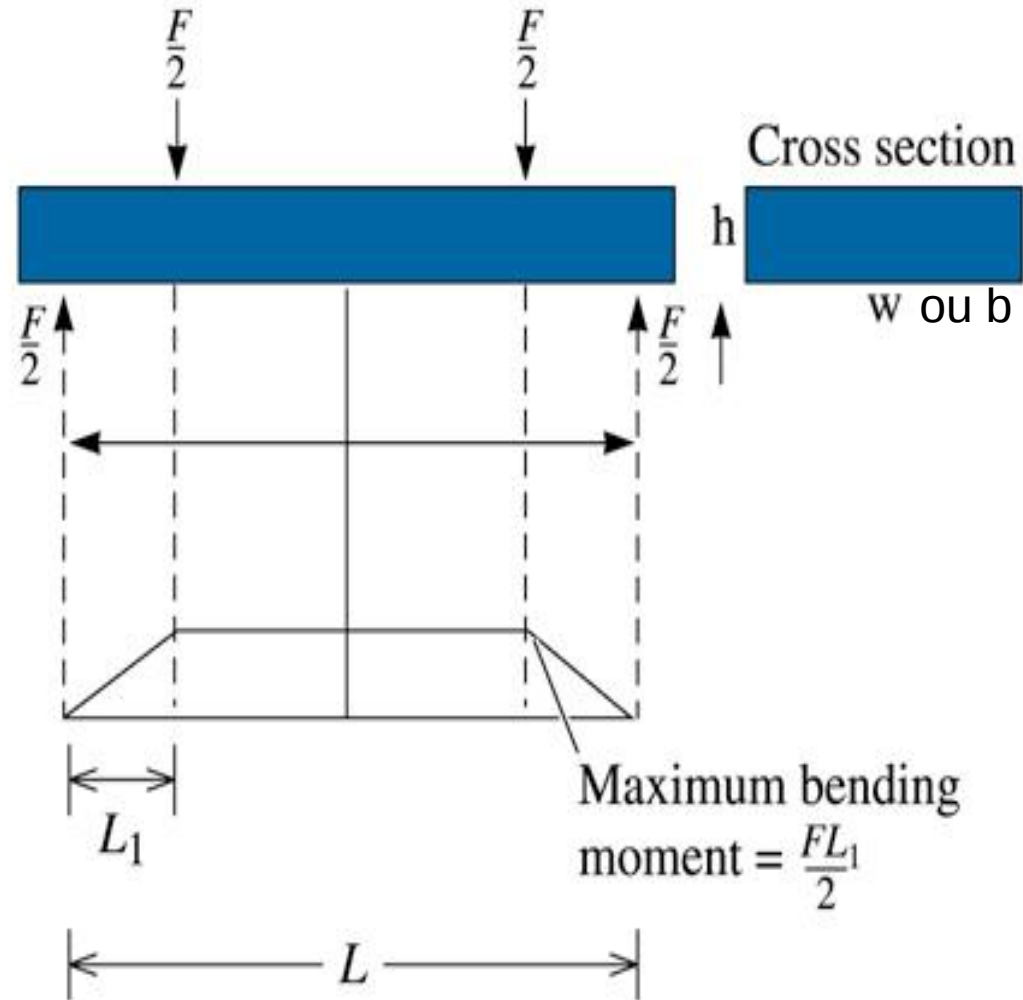


Diagrama de Esforços (Flexão)



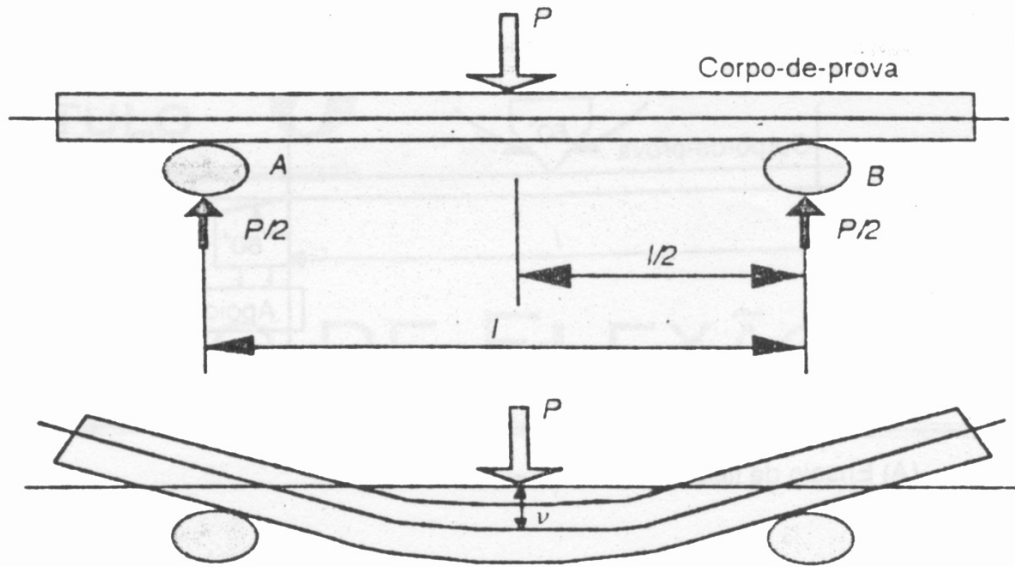
3 pontos

(a)



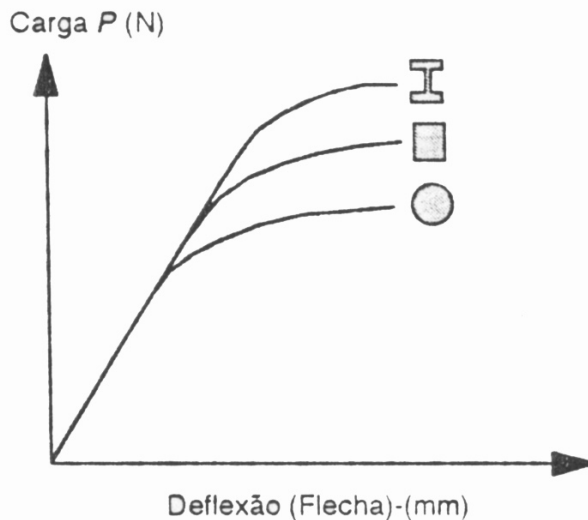
4 pontos

(b)



(A)

P - Carga aplicada (N, kgf, tf)
 v - Flecha (mm)
 l - Distância entre os apoios (m)



(B) Resposta do ensaio de flexão

Ensaio 3 Pontos

- A curva resposta do ensaio depende fortemente da geometria da seção transversal do CP;
- Durante o ensaio ocorrem esforços normais e tangenciais na seção transversal do CP, gerando um complicado estado de tensões no seu interior.

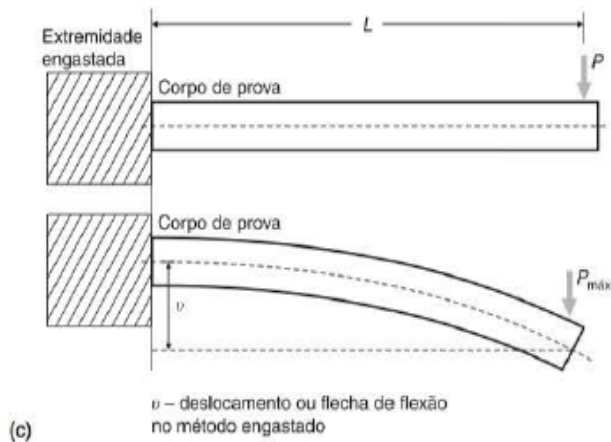
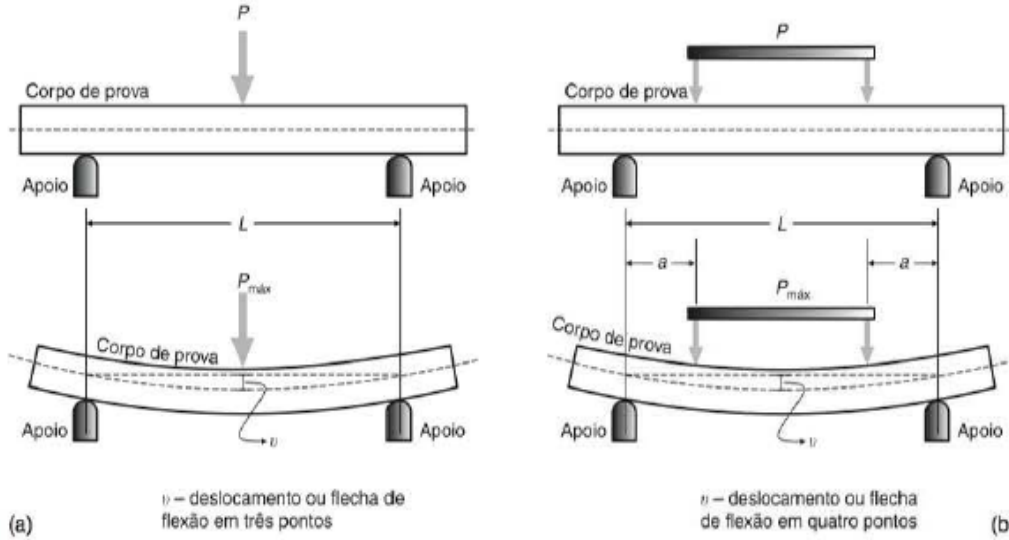
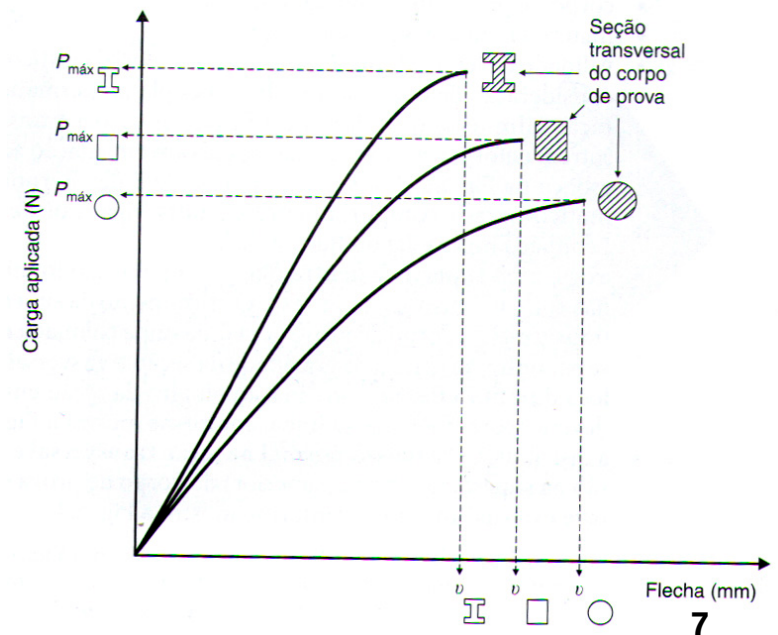
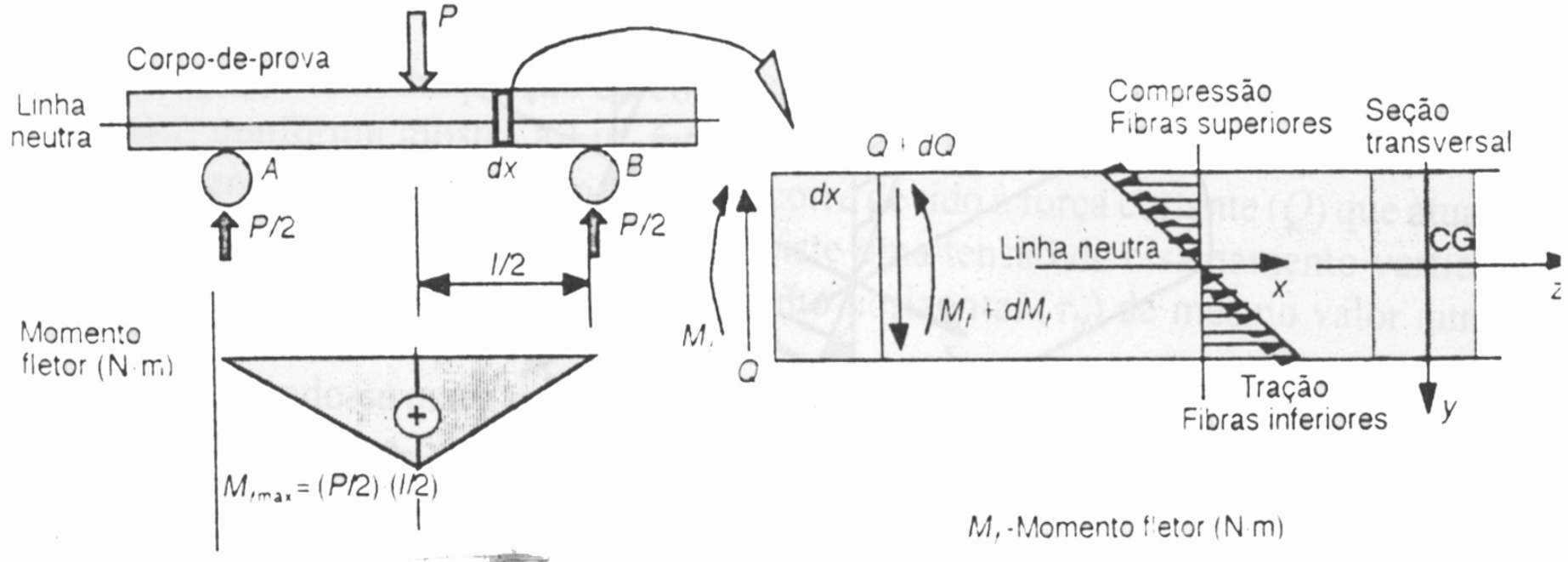


Figura: Tipos de ensaio de flexão: (a) esboço do ensaio de flexão 3 pontos; (b) ensaios de flexão 4 pontos; c) método engastado.



Curva característica do ensaio de flexão para diferentes geometrias

Ensaio Flexão 3 Pontos (Distribuição Tensão)



- As fibras superiores são comprimidas e as inferiores tracionadas.
- A Tensão é proporcional a dist. da linha neutra.
- Da resistência dos materiais:

$$\sigma = \frac{M_f}{I_z} y_{LN}$$



- O deslocamento de qualquer ponto na barra submetida a flexão simples (3 pontos) é dada por:

$$V_x = \frac{P}{4E I_z} \left(\frac{l^2}{4} x - \frac{x^3}{3} \right) \quad V_{\max} = \frac{Pl^3}{48E I_z}$$

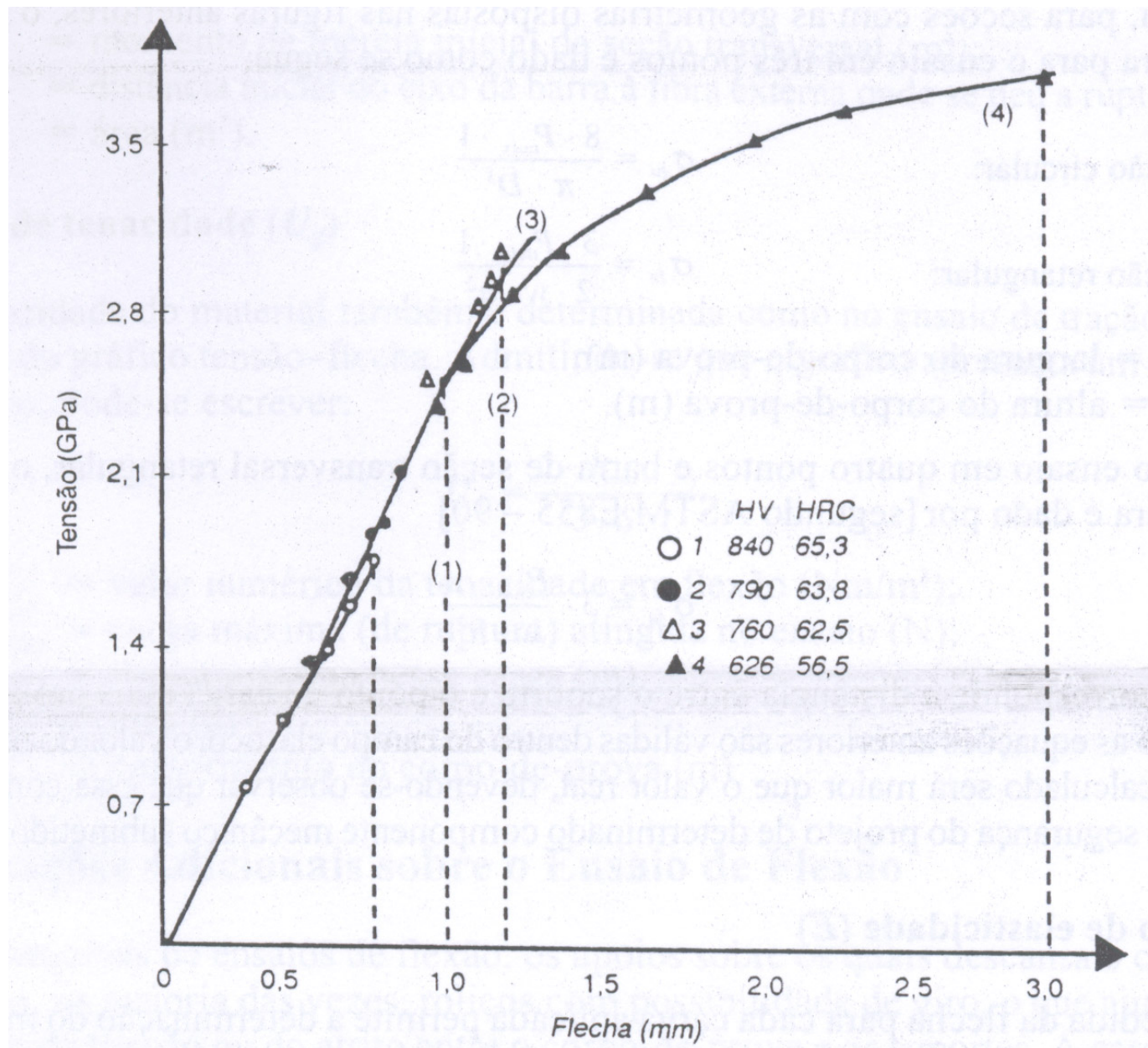
- Para o caso de seção circular

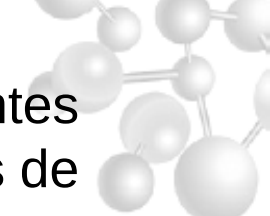
$$v = \frac{4Pl^3}{3\pi E D^4}$$

- Para o caso de seção retangular:

$$v = \frac{Pl^3}{4Eb h^3}$$

- A medida das flexas permite obtenção de curvas tensão-deformação





- Por meio do ensaio de Flexão é possível obter importantes informações a respeito do material quando submetidos a esforços de flexão.
- Módulo de Ruptura, σ_{fu} (MOR) ou resistência ao dobramento é o valor máximo da tensão de tração nas fibras externas do CP:

$$\sigma = \frac{M_{f_{\max}}}{I_z} y_{LN}$$

$$\sigma_{fu} = \frac{8 P_{\max} l}{\pi D^3} \quad \text{Seção circular}$$

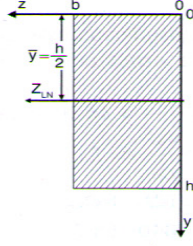
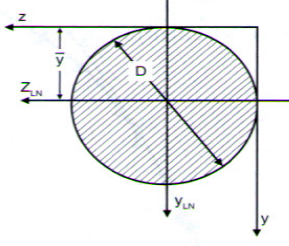
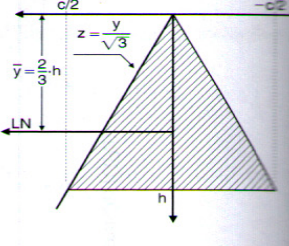
$$\sigma_{fu} = \frac{3 P_{\max} l}{2 b h^2} \quad \text{Seção retangular}$$

- Módulo de Elasticidade, E (MOE) para seção rectangular:

$$E = \frac{P l^3}{4 b h^3 \nu} \quad \text{Flexão 3 pontos}$$

$$E = \frac{P a (3 l^2 - 4 a^2)}{4 b h^3 \nu} \quad \text{Flexão 4 pontos}$$

Tabela 6.2 Valores da flecha, MOR e MOE para os ensaios de três pontos, quatro pontos e método engastado para seções retangular, circular e triangular

Geometria da seção transversal				
Posição da linha neutra (mm)		$\bar{y} = \frac{h}{2}$	$\bar{y} = \frac{D}{2}$	$\bar{y} = \frac{2 \cdot h}{3}$
Momento de inércia em relação ao eixo z _{LN} (mm ⁴)		$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$I_z = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$	$I_z = \frac{c \cdot h^3}{36}$
ENSAIO DE FLEXÃO EM TRÊS PONTOS	Flecha (ν) (mm)	$\nu = \frac{P_{\max} \cdot L^3}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3}$	$\nu = \frac{4 \cdot P_{\max} \cdot L^3}{3 \cdot \pi \cdot E \cdot D^4}$	$\nu = \frac{3 \cdot P_{\max} \cdot L^3}{4 \cdot E \cdot c \cdot h^3}$
	MOR (MPa)	$MOR = \frac{3 \cdot P_{\max} \cdot L}{2 \cdot b \cdot h^2}$	$MOR = \frac{8 \cdot P_{\max} \cdot L}{\pi \cdot D^3}$	$MOR = \frac{6 \cdot P_{\max} \cdot L}{c \cdot h^2}$
	MOE (MPa)	$MOE = \frac{P \cdot L^3}{4 \cdot \nu \cdot b \cdot h^3}$	$MOE = \frac{4 \cdot P \cdot L^3}{3 \cdot \nu \cdot \pi \cdot D^4}$	$MOE = \frac{3 \cdot P \cdot L^3}{4 \cdot \nu \cdot c \cdot h^3}$
ENSAIO DE FLEXÃO EM QUATRO PONTOS	Flecha (ν) (mm)	$\nu = \frac{P \cdot a}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3} (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)$	$\nu = \frac{4 \cdot P \cdot a}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot D^4} (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)$	$\nu = \frac{3 \cdot P \cdot a}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot c \cdot h^3} (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)$
	MOR (MPa)	$MOR = \frac{3 \cdot P_{\max} \cdot a}{b \cdot h^2}$	$MOR = \frac{16 \cdot P_{\max} \cdot a}{\pi \cdot D^3}$	$MOR = \frac{12 \cdot P_{\max} \cdot a}{c \cdot h^2}$
	MOE (MPa)	$MOE = \frac{P \cdot a}{4 \cdot \nu \cdot b \cdot h^3} (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)$	$MOE = \frac{4 \cdot P \cdot a}{3 \cdot \nu \cdot \pi \cdot D^4} (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)$	$MOE = \frac{3 \cdot P \cdot a}{4 \cdot \nu \cdot c \cdot h^3} (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)$
ENSAIO DE FLEXÃO MÉTODO ENGASTADO	Flecha (ν) (mm)	$\nu = \frac{4 \cdot P \cdot L^3}{E \cdot b \cdot h^3}$	$\nu = \frac{64 \cdot P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot D^4}$	$\nu = \frac{12 \cdot P_{\max} \cdot L^3}{E \cdot c \cdot h^3}$
	MOR (MPa)	$MOR = \frac{6 \cdot P_{\max} \cdot L}{b \cdot h^2}$	$MOR = \frac{32 \cdot P_{\max} \cdot L}{\pi \cdot D^3}$	$MOR = \frac{24 \cdot P_{\max} \cdot L}{c \cdot h^2}$
	MOE (MPa)	$MOE = \frac{4 \cdot P \cdot L^3}{\nu \cdot b \cdot h^3}$	$MOE = \frac{64 \cdot P \cdot L^3}{3 \cdot \nu \cdot \pi \cdot D^4}$	$MOE = \frac{12 \cdot P \cdot L^3}{\nu \cdot c \cdot h^3}$

- Módulo de Resiliência, U_{rf} , é determinado em função da tensão aplicada e das dimensões do CP, no regime elástico

$$U_{rf} = \frac{\sigma_p^2 I_z}{6E y^2 S}$$

U_{rf} = módulo de resiliência em flexão, (Nm/m³)

σ_p = tensão limite de proporcionalidade, (N/m²)

I_z = momento de inércia da seção transversal em relação a linha neutra, (m⁴)

y = dist. da linha neutra à fibra externa onde se deu a ruptura, (m)

S = área da seção transversal, (m²)

- Módulo de Tenacidade, U_{tf} , é dada pela área total do gráfico.

$$U_{tf} = \frac{2 P_{\max} v_{\max}}{3Sl}$$

U_{tf} = modulo de tenacidade em flexão, (Nm/m³)

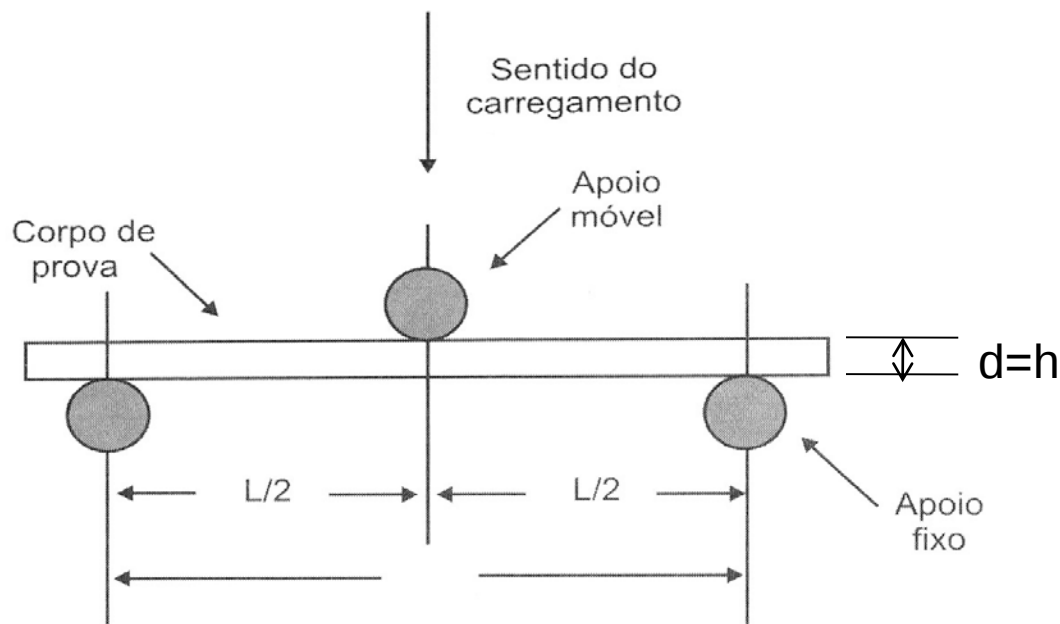
$P_{\max}$ = carga máxima (de ruptura) atingida no ensaio, (N)

$v_{\max}$ = flexa máxima atingida na carga máxima, (m)

l = comprimento do CP, (m)

S = área da seção transversal (m²)

Ensaio Flexão Polímeros (ASTM D790 e ISO 178)



$$D = rL^2/6d \quad d=h \text{ (CP deitado e } h > 1,6 \text{ mm)}$$

- ✓ D = deflexão no ponto médio entre os apoios na qual a máx. def. permitida (5%) irá ocorrer;
- ✓ r = deformação máxima na superfície oposta ao carregamento (ex. 0,05 mm/mm = 5%);
- ✓ L = distância entre apoios;
- ✓ d = profundidade dos Cps.

$L/d = 16:1$ (distancia entre apoios/prof. CP)

Término do ensaio: Ruptura ou deformação máxima de 5%



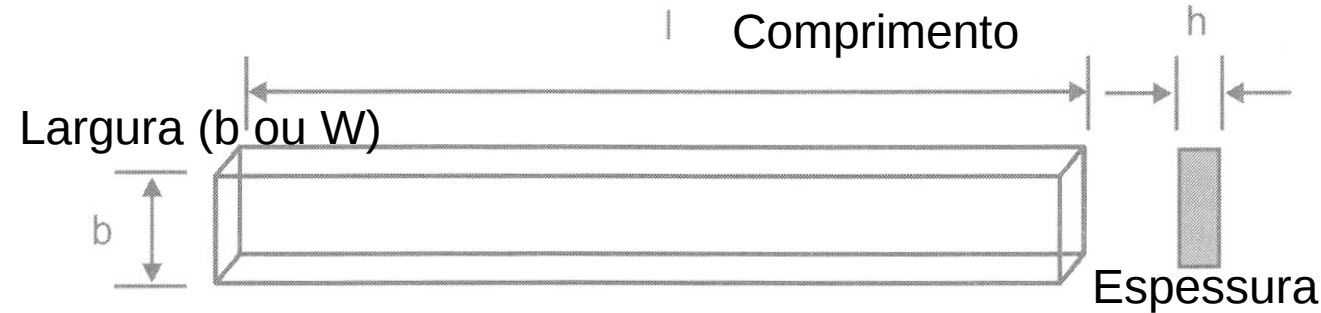
Procedimento A:

Aplicado em materiais que rompem em deflexões pequenas (**rígidos e semi-rígidos**)

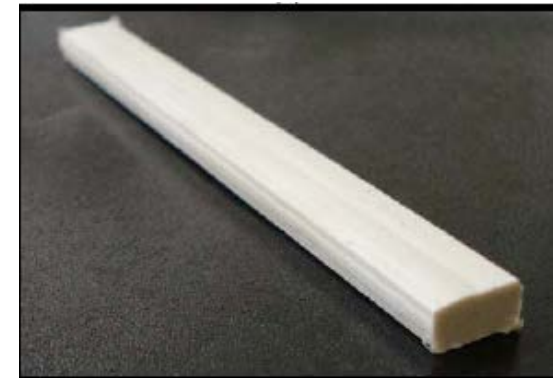
Procedimento B:

Aplicado em materiais que suportam grandes deflexões durante o ensaio.

Dimensões do CP para Ensaio de Flexão (ASTM D790)



CP padrão Moldado	CP Retirado Chapa	
➤ $l = 127 \text{ mm}$; ➤ $b = 12,7 \pm 0,2 \text{ mm}$; ➤ $d = 3,2 \pm 0,2 \text{ mm}$; ➤ $L/d = 16:1$.	$h < 1,6 \text{ mm}$	$h > 1,6 \text{ mm}$
	➤ $L/d = 16:1$; ➤ $b < 1/4 L$; ➤ $l > 10\% L$.	➤ $l = 50,8 \text{ mm}$; ➤ $b = 12,7 \text{ mm}$; ➤ $L = 25,4 \text{ mm}$.



Para **compósitos com elevada resistência** a razão L/d deve ser ajustada para que a falha ocorra na superfície oposta ao carregamento ($L/d = 32:1$) ou ($L/d = 40:1$)

Velocidade de Ensaio:

$$R = ZL^2/6d$$

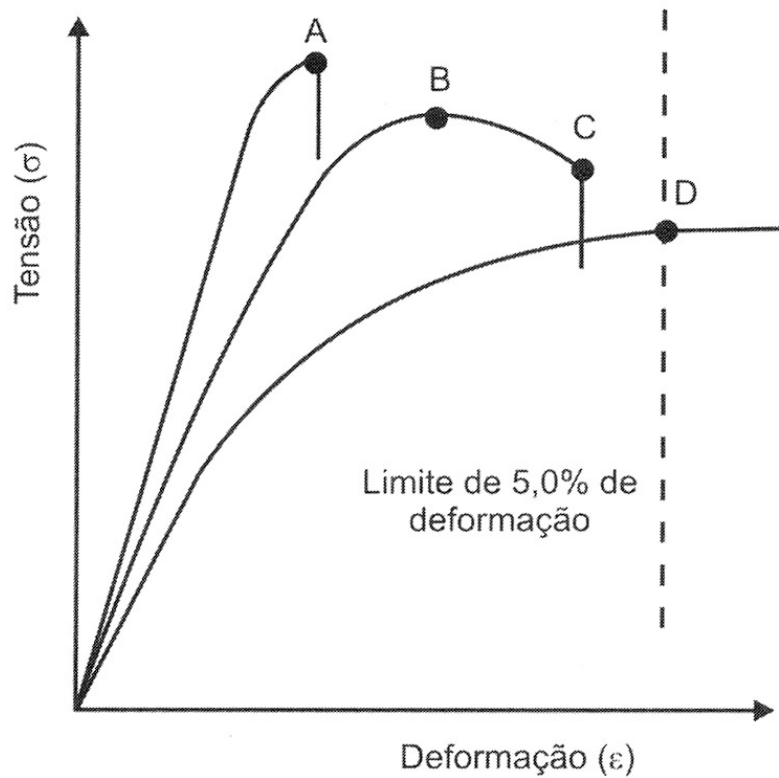
(mm/min)

- ✓ R – velocidade do travessão
- ✓ L – distância entre apoios;
- ✓ d = profundidade do CP
- ✓ Z = Taxa de deformação na superfície oposta ao carregamento

Procedimento A
 $Z = 0,01 \text{ mm/mm/min}$

Procedimento B
 $Z = 0,10 \text{ mm/mm/min}$

Principais Parâmetros Obtidos no Ensaio Flexão 3 pontos



1) $\sigma_f = 3PL/2bd^2$

- ✓ σ_f = tensão de flexão na superfície oposta ao carregamento (MPa);
- ✓ P = carga em Newtons;
- ✓ L = distância entre apoios;
- ✓ b = largura do CP em mm;
- ✓ d = profundidade (espessura) do CP em mm.

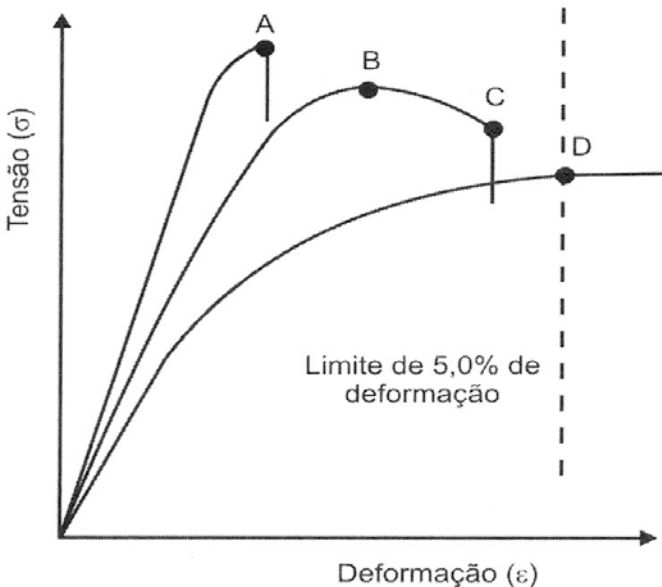
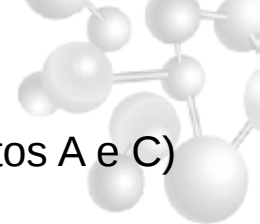
2) σ_{fM} = máxima tensão sob flexão no ensaio (pontos A, B e D)

3) Tensão de flexão para suportes com distancias elevadas entre apoios (σ_f): Se a distância entre os apoios for maior que 16:1, a tensão na superfície oposta ao carregamento será:

$$\sigma_f = 3PL/2bd^2 [1+6(D/L)^2-4(d/L)(D/L)]$$

D=deflexão na linha central do CP na distância média dos apoios

Caso o CP não rompa até 5% adotar o P de 5% de deformação



3) σ_{fb} = tensão de flexão na ruptura (pontos A e C)

Modulo tangente (m – inclinação da tangente da curva)
Módulo secante (m – inclinação da secante da curva)

4) ϵ_{fr} (deformação sob flexão): variação percentual no incremento do comprimento de um elemento da superfície oposto ao carregamento, onde a deformação máxima irá ocorrer.

Calculado para qualquer deflexão ($\epsilon_f = 6Dd/L^2$)

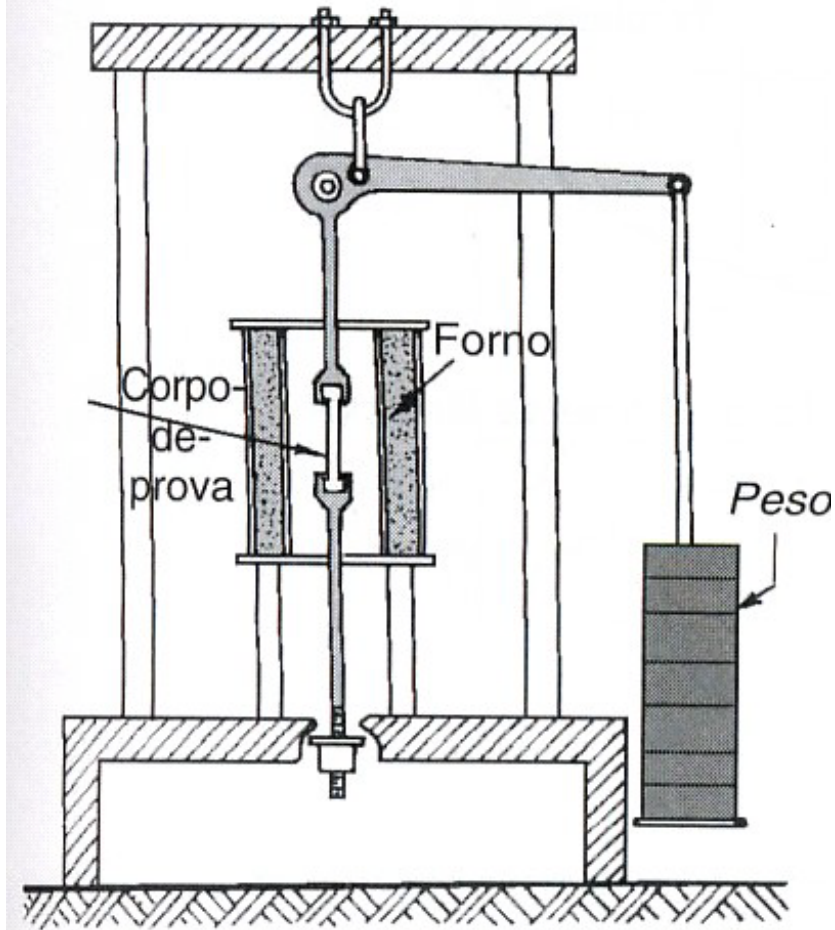
5) E_f = (módulo de elasticidade secante ou tangente): razão dentro do limite de elasticidade entre a tensão de flexão e a deformação correspondente ($E_f = L^3m/4bd^3$).

6) E_{fc} = (Modulo de corda): Pode ser calculado através de dois conjuntos de pontos discretos da curva carga versus deflexão. Pontos escolhidos segundo especificação do cliente ou do material. Deve ser mencionado sempre este conjunto de pontos. Calculado pela equação: $E_{fc} = (\sigma_{f2} - \sigma_{f1}) / (\epsilon_{f2} - \epsilon_{f1})$

Ensaio de Fluência

Definição Fluência: fenômeno de deformação plástica acumulada com o tempo que um sólido apresenta, sob o efeito constante da tensão e temperatura.

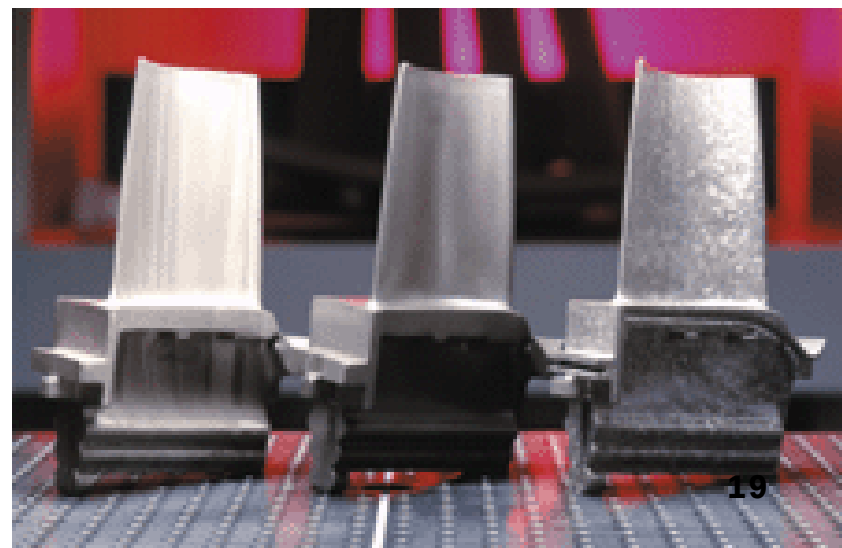
- O ensaio de fluência consiste na aplicação de uma carga constante em um material durante um período de tempo, em temperaturas elevadas;
- Essas condições são favoráveis a mudanças de comportamento dos materiais devido à difusão dos átomos, movimento de discordâncias, escorregamento e recristalização;
- Fenômeno ocorre em $T > 0,4T_f$ (acima de 0,4 da temp. absoluta de fusão).



(A) Aparelho de fluência

Ensaio de Fluência

- No ensaio de fluência pode-se obter apenas o tempo de ruptura total (ensaio de ruptura por fluência).
- Normalmente no ensaio de fluência são medidas as deformações que ocorrem no CP em função do tempo (ensaio de fluência).
- Entre os materiais ensaiados em fluência pode-se citar os empregados em instalações de refinarias petroquímicas, usinas nucleares, indústria aeroespacial, turbinas, forno craqueamento etc..



Ensaio de Fluência



O ensaio de fluência pode ser dividido em três estágios:

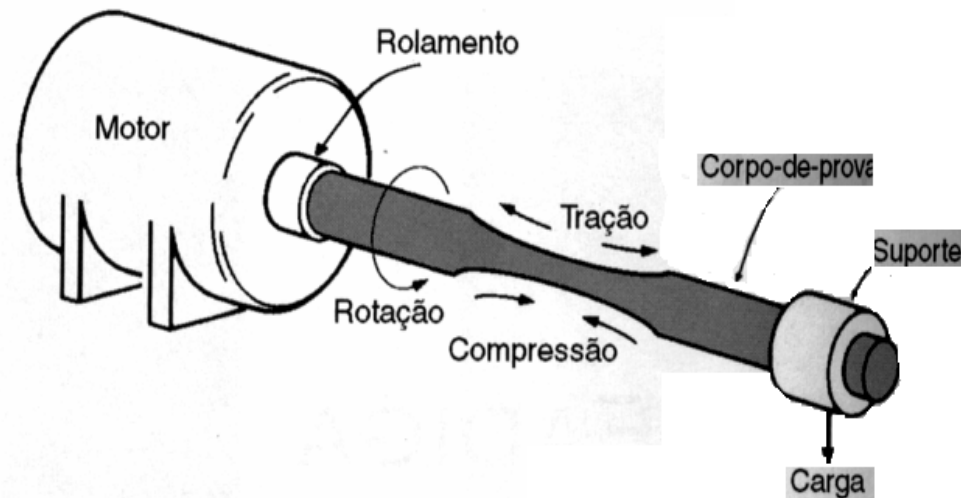
- Primário: decréscimo contínuo da taxa de fluência ($d\varepsilon/dt$) em função do aumento de resistência devido ao encruamento
- Secundário: taxa de fluência constante, função do equilíbrio entre encruamento e recuperação (devido temp.). O parâmetro mais importante (**taxa mínima de fluência**) consiste na inclinação da curva nesse estágio
- Terciário: aceleração da taxa de fluência devido a estricção do CP culminando na ruptura devido à formação e propagação de trincas



Ensaio de Fadiga



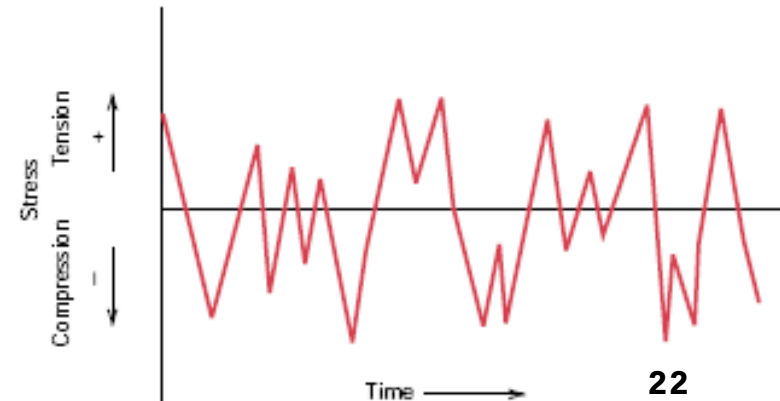
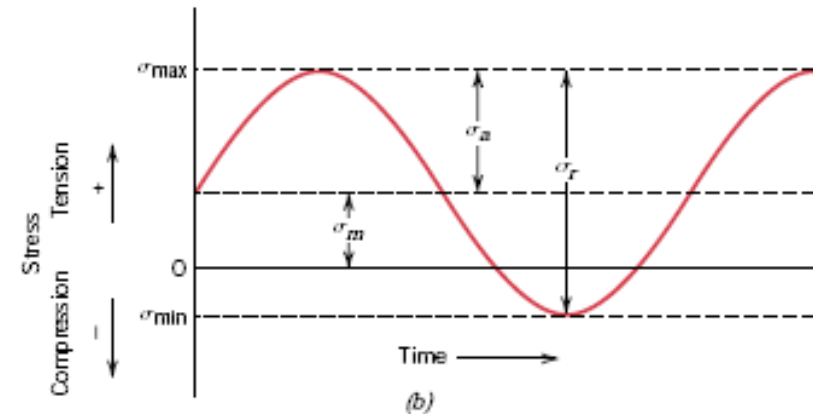
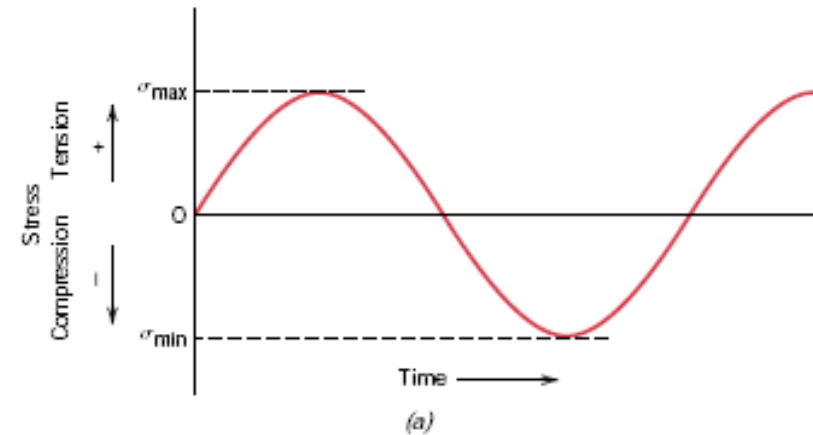
- Os materiais metálicos, quando submetidos a esforços cíclicos rompem-se a tensões inferiores àsquelas determinadas nos ensaios de tração e compressão. A ruptura que ocorre é denominada ruptura por fadiga
- O ensaio de fadiga consiste na aplicação de carga cíclica em corpo de prova padronizado



Tensões Cíclicas

Em geral são possíveis três modalidades diferentes de tensão oscilante-tempo:

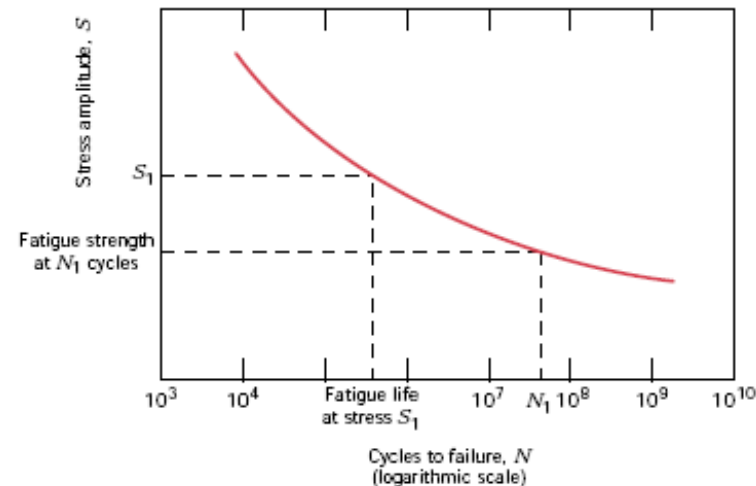
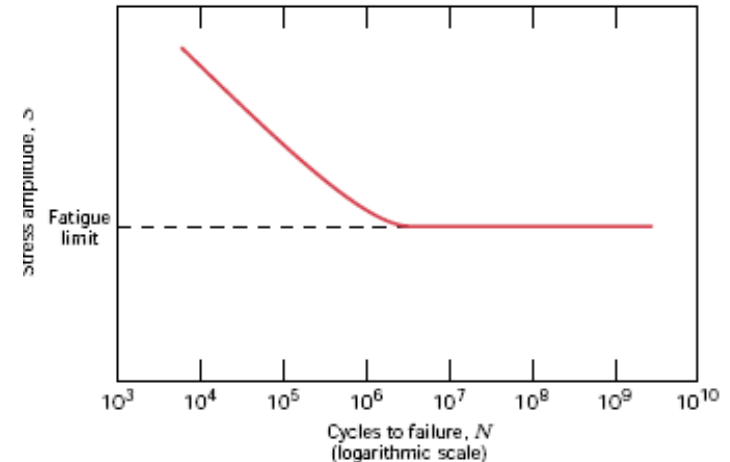
- Ciclo de tensões alternadas: dependência regular e senoidal em relação ao tempo, alternando entre uma tensão máxima de tração e uma tensão mínima de compressão de igual magnitude;
- Ciclo de tensões repetidas: valores máximos e mínimos são assimétricos e relação ao nível 0 de tensão;
- Ciclo de tensões aleatórias.



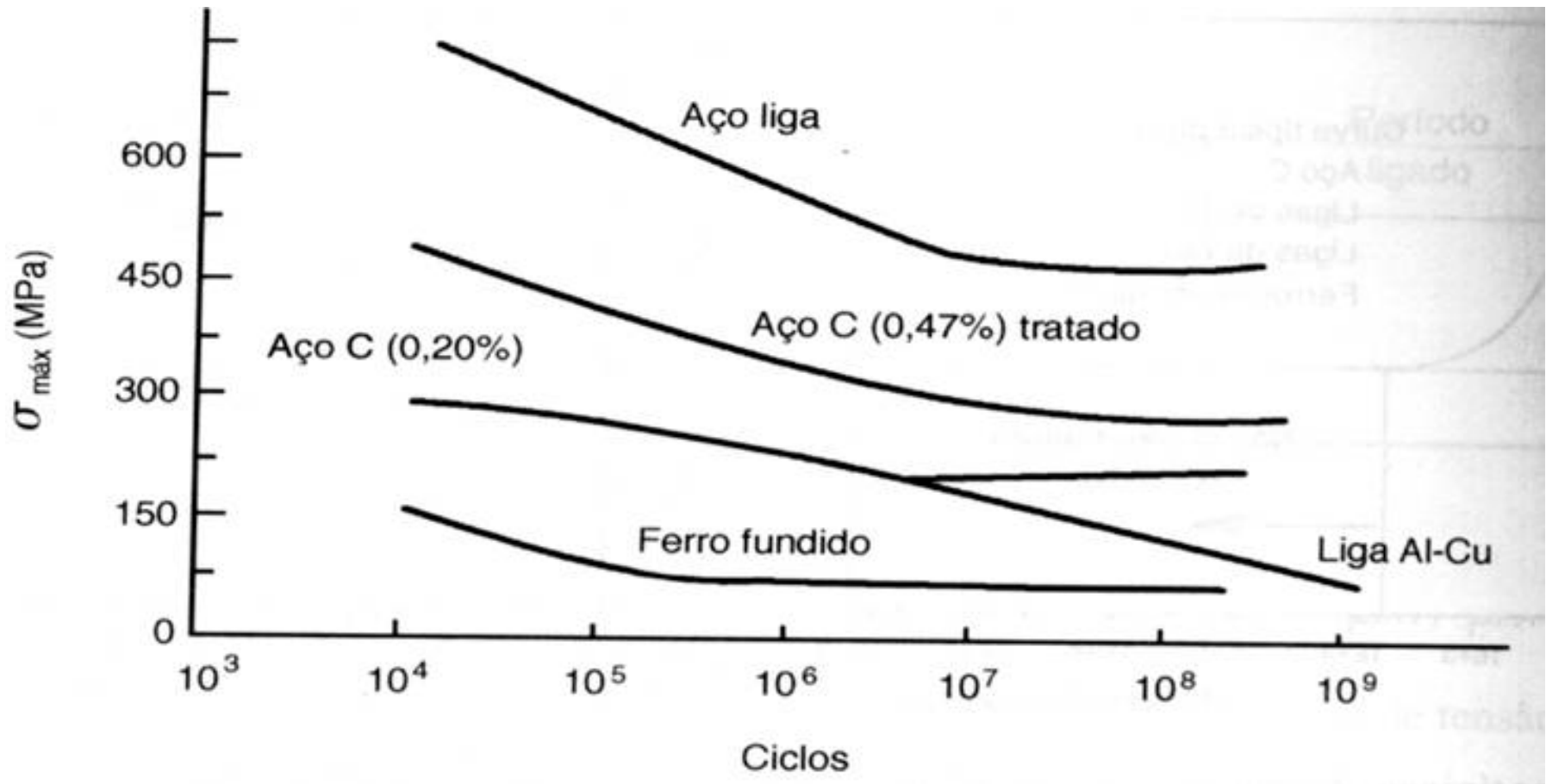
Curva σ -N ou Curva de Wöhler



- Em geral, a curva σ -N de materiais ferrosos (+ Ti) apresenta um **limite de resistência à fadiga**. Para valores abaixo desse limite o CP nunca irá sofrer ruptura por fadiga
- Para ligas não ferrosas a fadiga é caracterizada pela **resistência à fadiga**, tensão na qual ocorre ruptura por fadiga após um número de ciclos específicos (10^6 a 10^8)
- **Vida à fadiga** consiste no número de ciclos que causará a ruptura em determinado nível de tensão
- Em função do número de ciclos para haver ruptura o ensaio pode ser de **baixo ciclo** (10^4) ou de **alto ciclo** (acima desse limite)



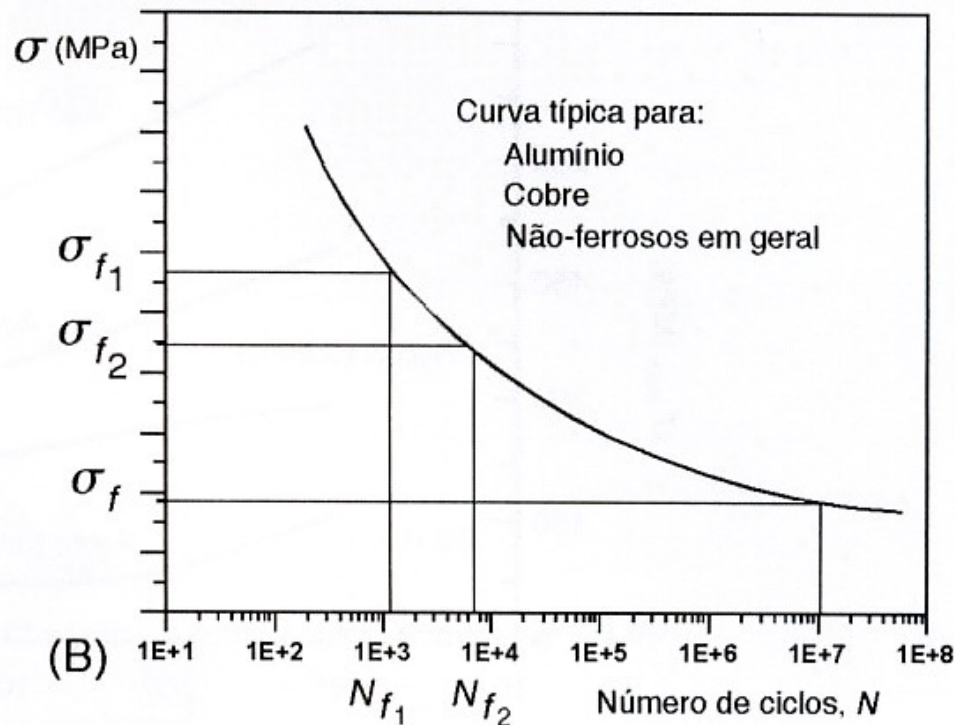
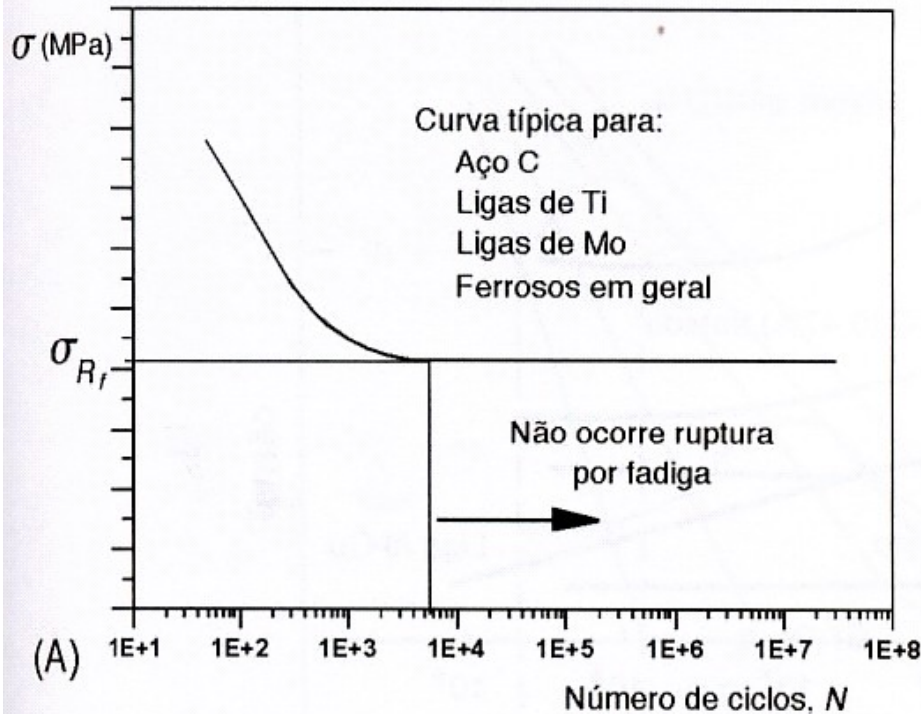
Curva σ -N ou Curva de Wöhler



- Resultado de ensaio de fadiga para diferentes materiais

Diferença entre Limite à Fadiga e Resistência a Fadiga

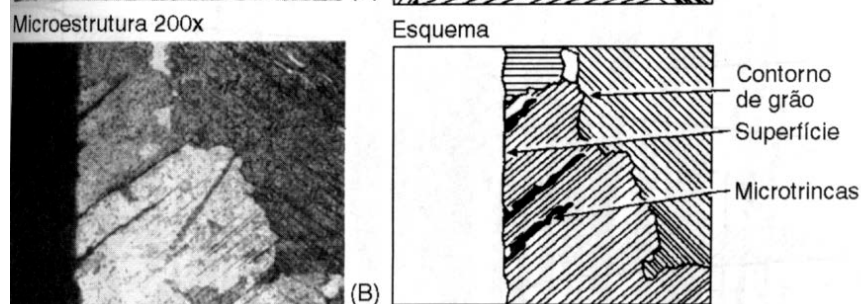
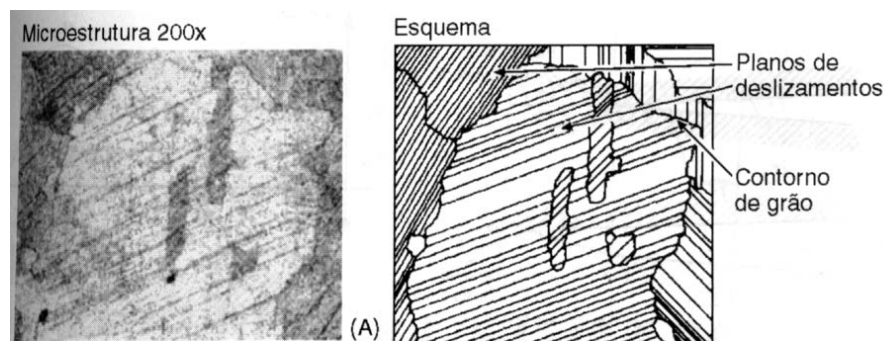
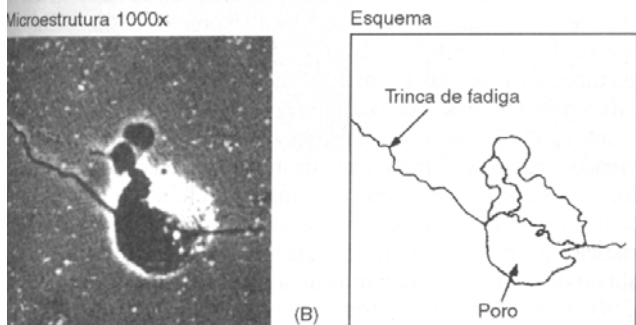
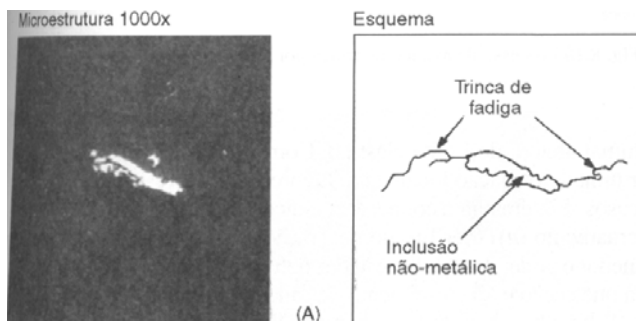
- **Limite de resistência à fadiga** (σ_{Rf}): em certos materiais (aços, titânio,...) abaixo de um determinado limite de tensão abaixo do qual o material nunca sofrerá ruptura por fadiga.
- **Resistência à fadiga** (σ_f): em alguns materiais a tensão na qual ocorrerá a falha decresce continuamente com o número de ciclos (ligas não ferrosas: Al, Mg, Cu,...). Nesse caso a fadiga é caracterizada por resistência à fadiga



Para os aços o limite de resistência à fadiga (σ_{Rf}) está entre 35-65% do limite de resistência à tração.

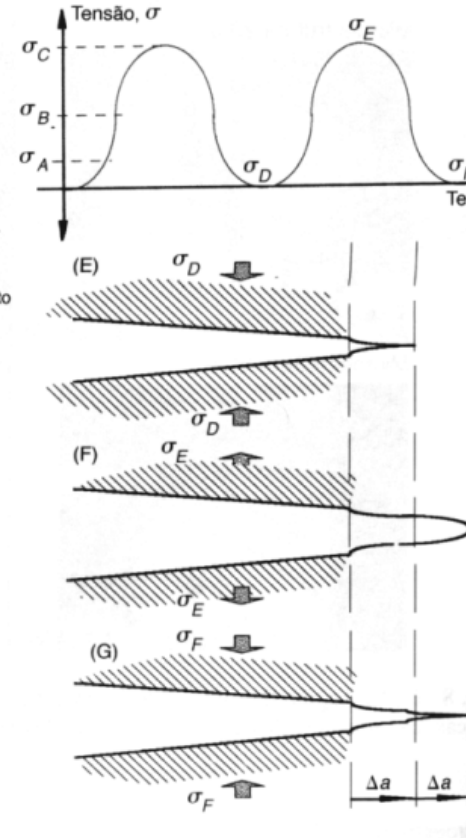
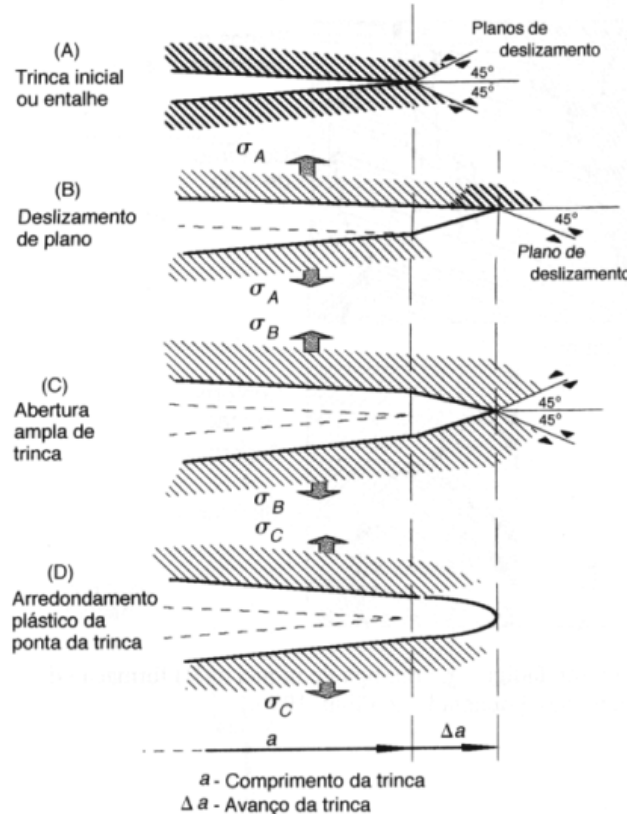
Nucleação da Trinca

- A ruptura do material por fadiga ocorre devido à formação e propagação de trincas;
- As trincas se iniciam principalmente em defeitos de superfície, entalhes, inclusões, contornos de grãos, defeitos de solidificação, pontos de corrosão e pontos que sofrem deformação localizada.

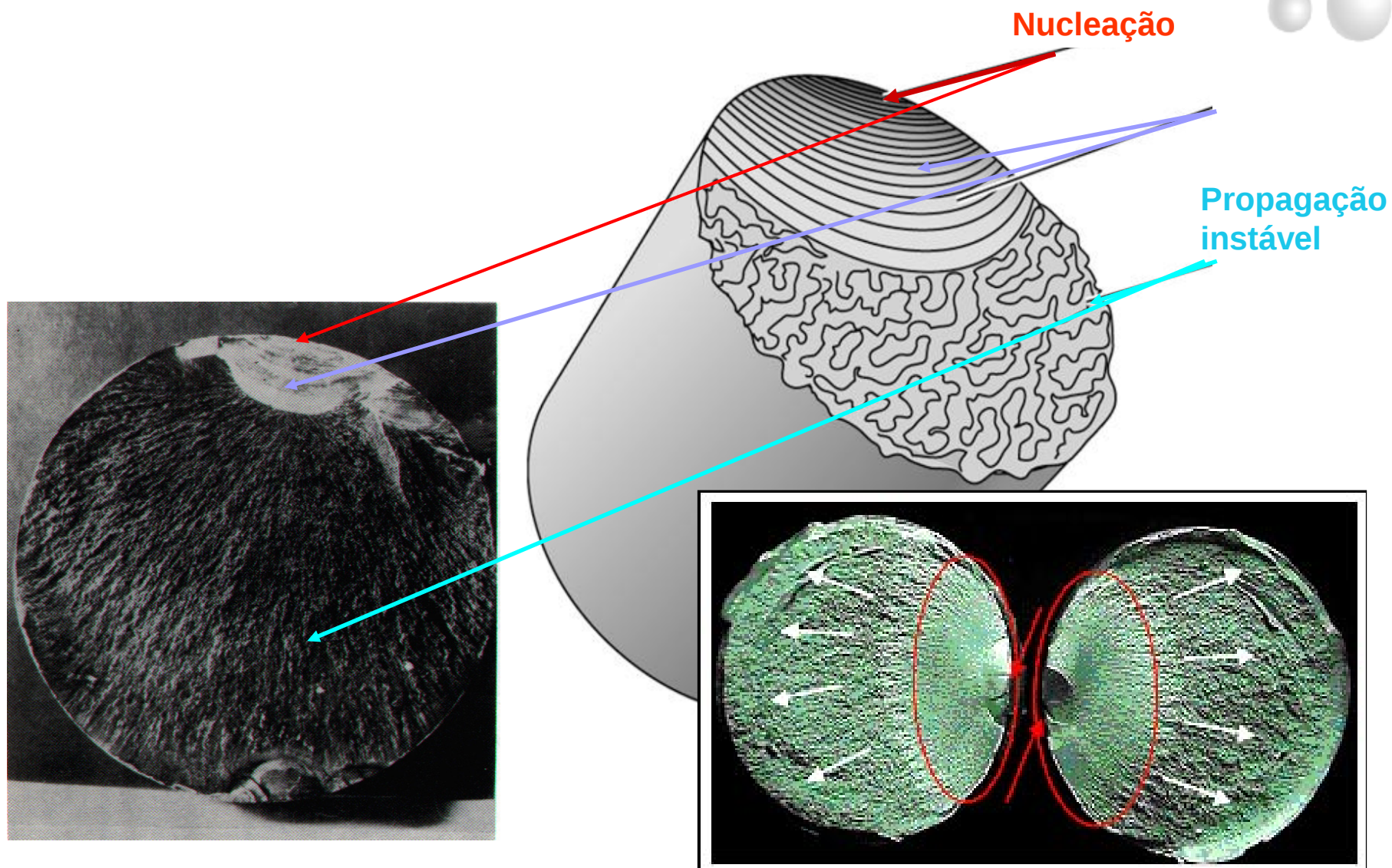


Propagação de Trincas

- A concentração de tensão (tração) na ponta da trinca favorece o deslizamento de planos em 45° (A, B e C)
- Em resposta à deformação plástica, a ponta da trinca torna-se curva (embota).
- Na recuperação da tensão (ou tensão de compressão) a ponta é comprimida, formando novamente uma ponta aguda e o processo volta a se repetir em cada ciclo

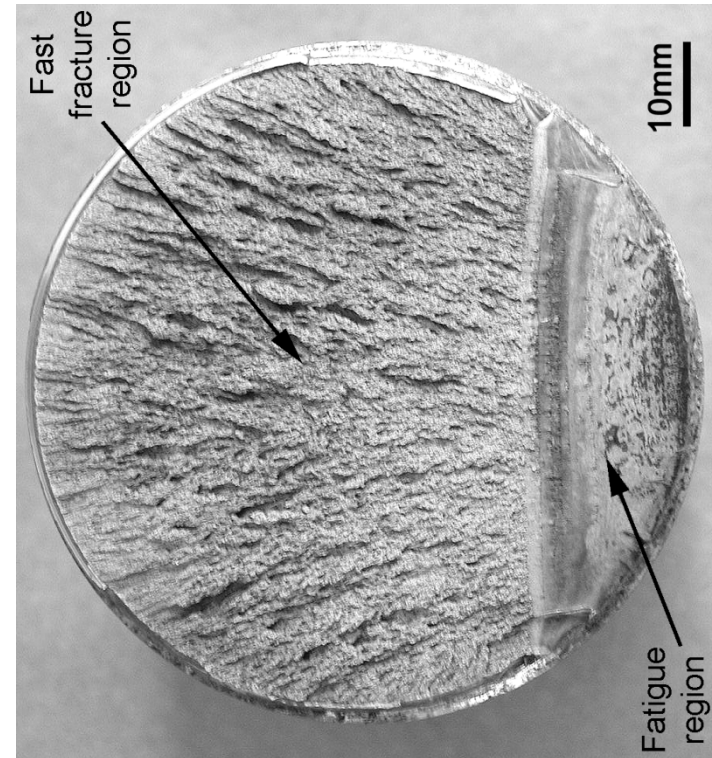
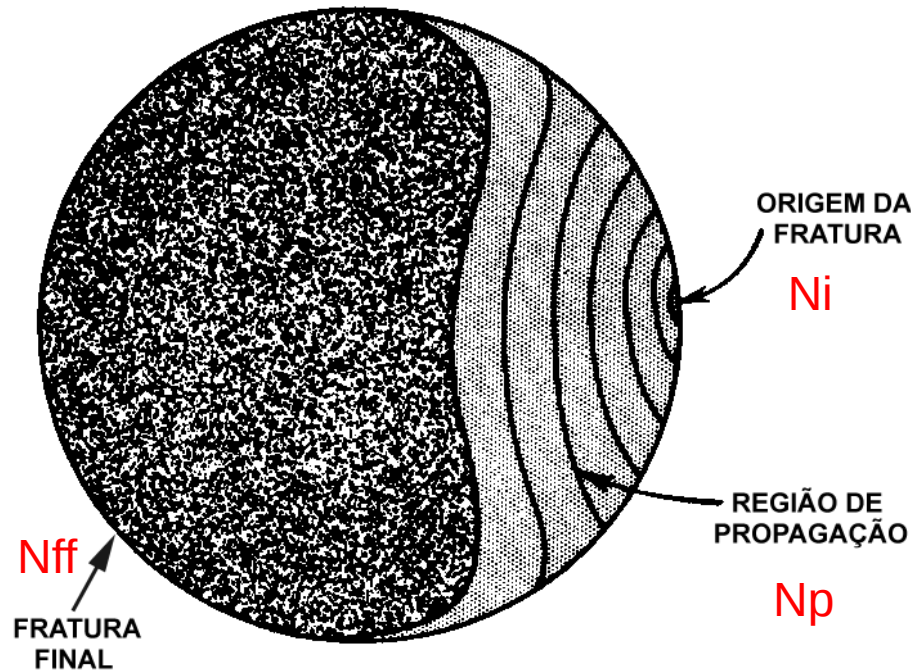


Características Macroscópicas



Características macroscópicas gerais de uma fratura por fadiga.

Modo Macroscópico de Propagação de Trinca por Fadiga



A superfície de uma fratura por fadiga apresenta duas regiões distintas:

- Região de propagação estável da trinca (aspecto polido, devido ao atrito das faces da trinca com possíveis marcas de progressão da trinca;
- Corresponde à área de fratura final não tendo ação do atrito (grosseiro, irregular, texturizado) – fratura frágil ou dúctil



Exercícios - Flexão

FLEXÃO - I

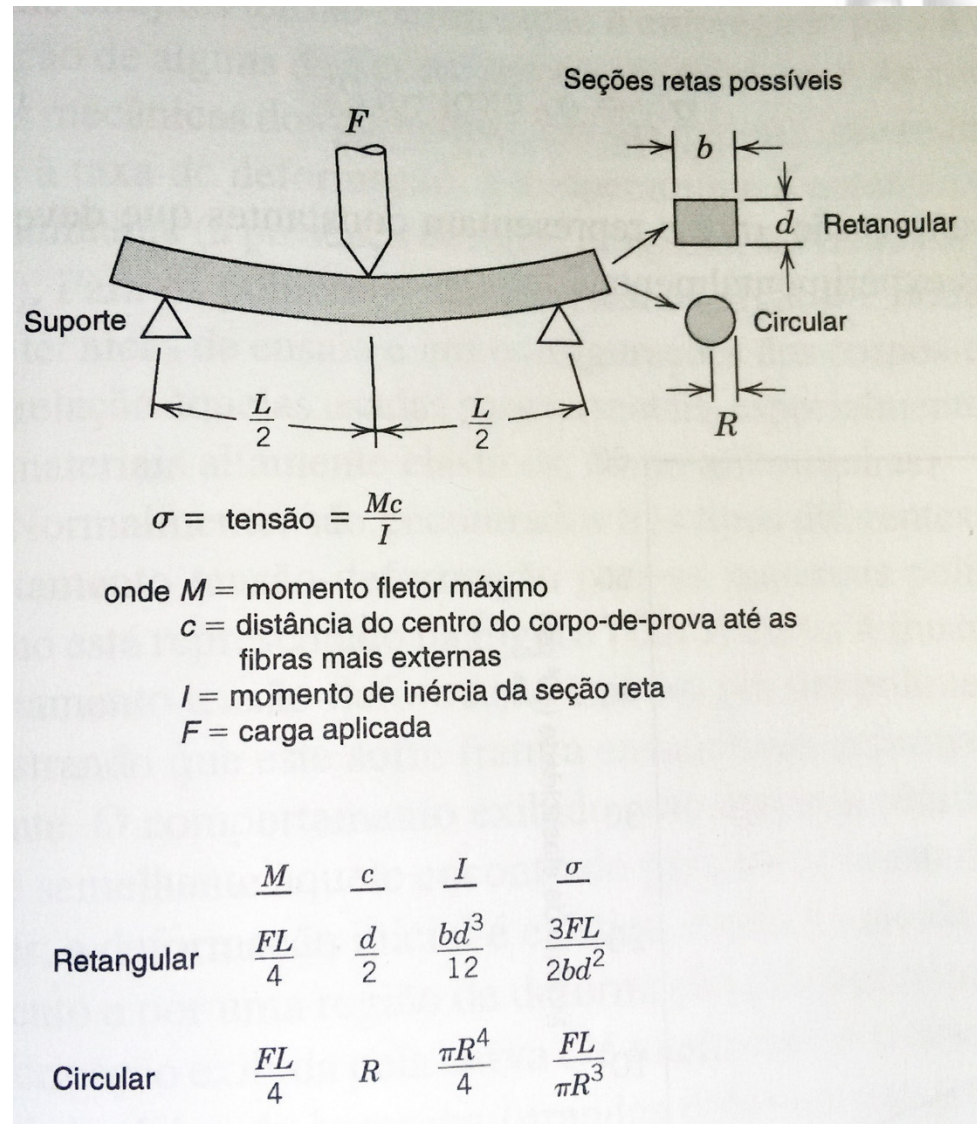
Um ensaio de flexão em três pontos é realizado com uma amostra de vidro que possui uma seção reta retangular com altura $d=5$ mm e largura $b=10$ mm; a distância entre os pontos de apoio é de 45 mm.

a) Calcular a resistência à flexão se a carga na fratura é de 290 N.

b) O ponto com deflexão máxima, Δy , ocorre no centro do corpo-de-prova, e pode ser descrito pela relação:

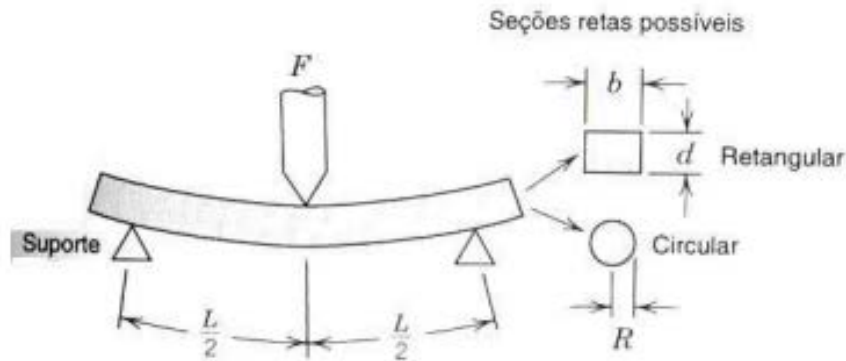
$$\Delta y = \frac{F.L^3}{48E.I}$$

na qual E representa o módulo de Young ($E=72,5$ GPa) e I o momento de inércia na seção reta. Calcular o valor de Δy para uma carga de 266 N.



$$b = 10 \text{ mm} = 0,01 \text{ m}$$

$$d = 5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m}$$



$$I = \frac{bd^3}{12}$$

$$I = \frac{0,01 \cdot (0,005)^3}{12}$$

$$\rightarrow I = 1,04 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$$

a)

$$\sigma_r = \frac{3FL}{2bd^2}$$

$$\sigma_r = \frac{3 \cdot 290 \cdot 0,045}{2 \cdot 0,01 \cdot 0,005^2}$$

$$\sigma_r = 78,3 \text{ MPa}$$

b)

$$\Delta y = \frac{F \cdot L^3}{48EI}$$

$$\Delta y = \frac{266 \cdot (0,045)^3}{48 \cdot 72,5 \cdot 10^9 \cdot I}$$

$$\Delta y = \frac{266 \cdot (0,045)^3}{48 \cdot 72,5 \cdot 10^9 \cdot 1,04 \cdot 10^{-10}}$$

$$\Delta y = 6,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

FLEXÃO - II



Um ensaio de flexão em três pontos foi realizado sobre um bloco de ZrO_2 de 8 in de comprimento, 0,50 in de largura e 0,25 in de espessura. A distância entre os suportes é de 4 in. Quando se aplica uma força de 400 lbf, a amostra sofre uma deflexão de 0,037 in e ocorre a fratura. Calcule:

a) a resistência à flexão;

b) o módulo de elasticidade em flexão, assumindo que não ocorre deformação plástica.

$$a) \quad \sigma_f = \frac{3FL}{2bd^2}$$

$$\sigma_f = \frac{3.400.4}{2.0,50.0,25^2}$$

$$\sigma_f = 76.800 \text{ lbf} / \text{in}^2 (\text{PSI})$$

$$\sigma_f = 76,8 \text{ KSI} = 529 \text{ MPa}$$

$$b) \quad E_f = \frac{FL^3}{4bd^3v}$$

$$E_f = \frac{400.4^3}{4.0,50.0,25^3 0,037}$$

$$E_f = 22,14 \text{ Mlbf} / \text{in}^2$$

$$E_f = 152,65 \text{ GPa}$$

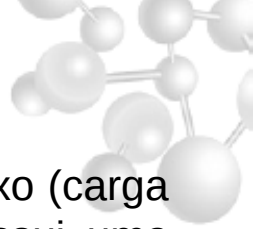
1 lbf = 4,448 N

1 in = 25,4 mm

1 lbf/in² = 0,00689476 MPa

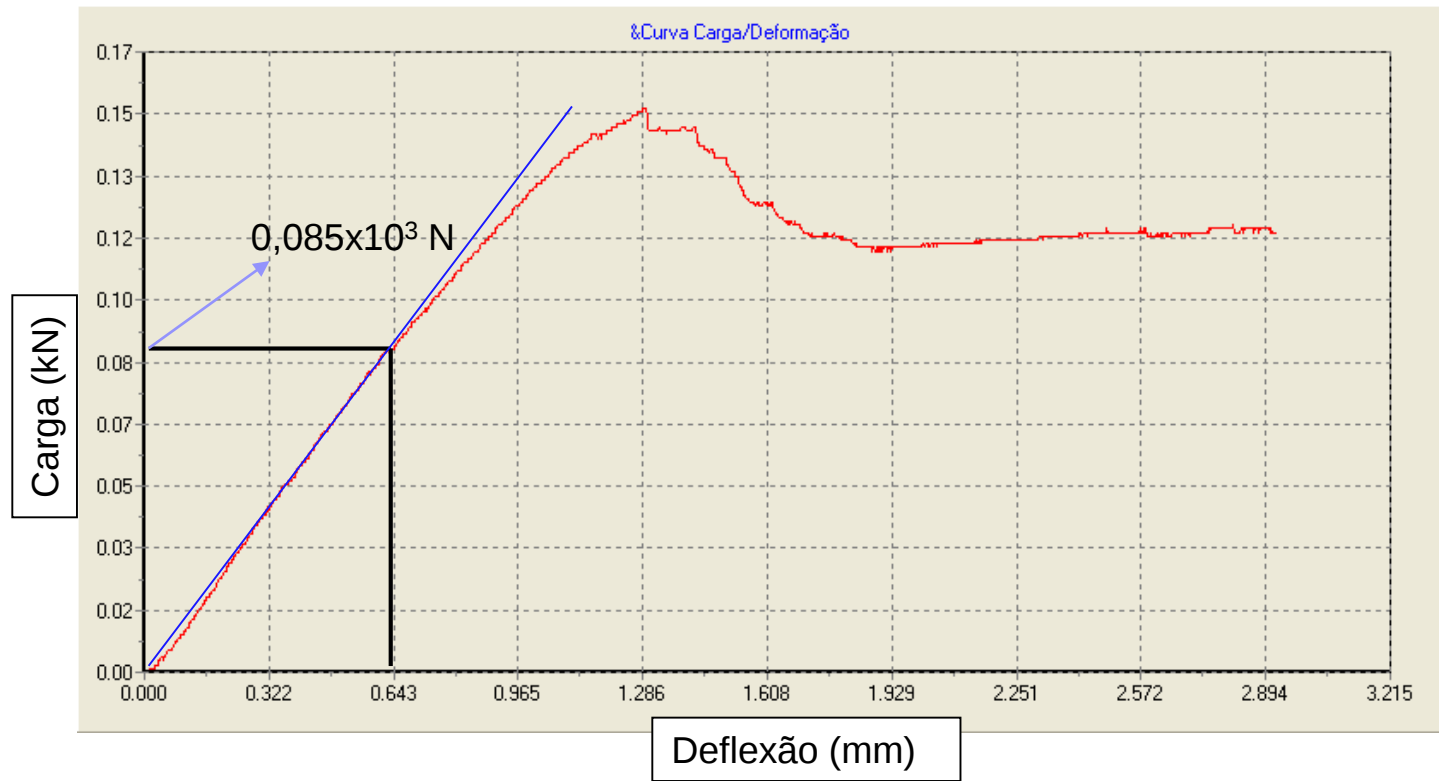
Como a amostra trata-se de um material cerâmico não possui região plástica logo o calculo de E torna-se correto utilizando a carga na ruptura

FLEXÃO - III



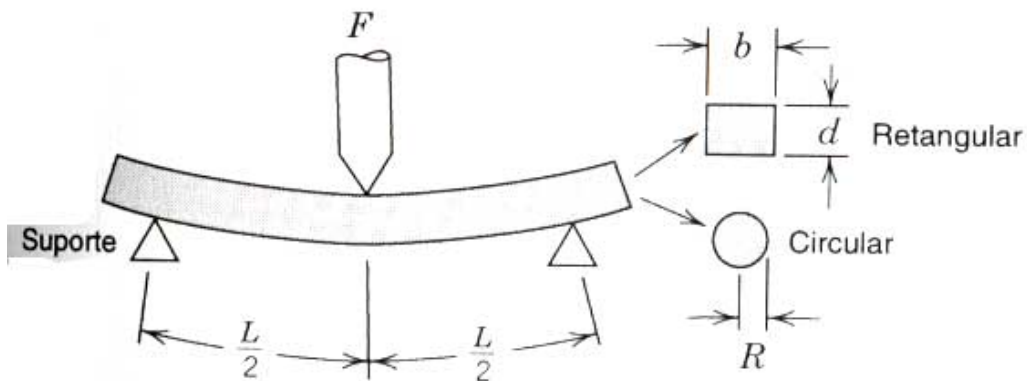
Um ensaio de flexão em três pontos foi realizado gerou dados conforme a figura abaixo (carga em função da deflexão) com uma amostra de compósito fibra vidro/epoxi que possui uma seção reta retangular com altura $d=3,05$ mm e largura $b=26,74$ mm; sendo a distância entre os pontos de apoio L de 50 mm.

- a) Calcular o modulo de ruptura a flexão;
- b) Calcular o modulo de elasticidade em flexão E ;
- c) Calcular a resiliência em flexão;
- b) Calcular a tenacidade em flexão.





Seções retas possíveis



$$\sigma = \text{tensão} = \frac{Mc}{I}$$

onde M = momento fletor máximo

c = distância do centro do corpo-de-prova até as fibras mais externas

I = momento de inércia da seção reta

F = carga aplicada

$$d = 3,05 \text{ mm}$$

$$b = 26,74 \text{ mm}$$

$$L = 50 \text{ mm}$$

$$U_{rf} = \frac{\sigma_p^2 I_z}{6E y^2 S} \rightarrow \text{Resiliência}$$

$$U_{tf} = \frac{2P_{\max} v_{\max}}{3Sl} \rightarrow \text{Tenacidade}$$

	$\frac{M}{FL}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{I}{bd^3}$	$\frac{\sigma}{3FL/2bd^2}$
Retangular	$\frac{FL}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{bd^3}{12}$	$\frac{3FL}{2bd^2}$
Circular	$\frac{FL}{4}$	R	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{FL}{\pi R^3}$

$$v = \frac{Pl^3}{4Eb d^3}$$

$$E = \frac{Pl^3}{4b d^3 v}$$

$$\sigma_{fu} = \frac{3P_{\max} l}{2b d^2}$$



a) Calcular o modulo de ruptura a flexão;

$F_{\text{máx}} = 0,15 \times 10^3 \text{ N} = 150 \text{ N}$ – Obtido do gráfico

$$\sigma_{fu} = \frac{3 F_{\text{máx}} l}{2 b d^2} = \frac{3 \times 150 \times 50}{2 \times 26,74 \times (3,05)^2} = 45,22 \text{ MPa}$$

b) Calcular o modulo de elasticidade em flexão E;

Par de pontos na região elástica ($P = 0,085 \times 10^3$; $v = 0,643 \text{ mm}$)

$$E = \frac{P l^3}{4 b d^3 v} = \frac{85 \times (50)^3}{4 \times 26,74 \times (3,05)^3 \times 0,643} = \frac{1,0625 E7}{1,9513 E3} = 5,45 E3 \text{ MPa}$$

$$E = 5,45 \text{ GPa}$$

c) Calcular a resiliência em flexão;

$$U_{rf} = \frac{\sigma_p^2 I_z}{6E y^2 S}$$

Sendo que: $I_z = \frac{b d^3}{12}$

$$I_z = \frac{b d^3}{12} = \frac{26,74 \cdot 10^{-3} \times (3,05 \cdot 10^{-3})^3}{12} = 6,32 \cdot 10^{-11} m^4$$

→ Cálculo da área da seção transversal

$$S = 3,05 \cdot 10^{-3} \times 26,74 \cdot 10^{-3}$$

$$S = 8,156 \cdot 10^{-5} m^2$$

→ Cálculo da tensão limite de proporcionalidade

Par de pontos no limite de proporcionalidade – vide gráfico ($P=0,085 \times 10^3$; $v=0,643$ mm)

$$\sigma_p = \frac{3 F_p l}{2 b d^2} = \frac{3 \times 85 \times 50}{2 \times 26,74 \times (3,05)^2} = 25,63 MPa$$

$$d = 3,05 \text{ mm}$$

$$b = 26,74 \text{ mm}$$

$$L = 50 \text{ mm}$$

U_{rf} = módulo de resiliência em flexão, (Nm/m³)
 σ_p = tensão limite de proporcionalidade, (N/m²)
 I_z = momento de inércia da seção transversal em relação a linha neutra, (m⁴)
 y = dist. da linha neutra à fibra externa onde se deu a ruptura, (m)
 S = área da seção transversal, (m²)

$Y = d/2$ (linha neutra encontra-se no meio do CP)

$$E = 5,45 GPa$$

Enfim, calculo da resiliência:

$$U_{rf} = \frac{\sigma_p^2 I_z}{6E y^2 S} = \frac{(25,63 \cdot 10^6)^2 \times 6,32 \cdot 10^{-11}}{6 \times 5,45 \cdot 10^9 \times \left(\frac{3,05 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2 \times 8,156 \cdot 10^{-5}}$$

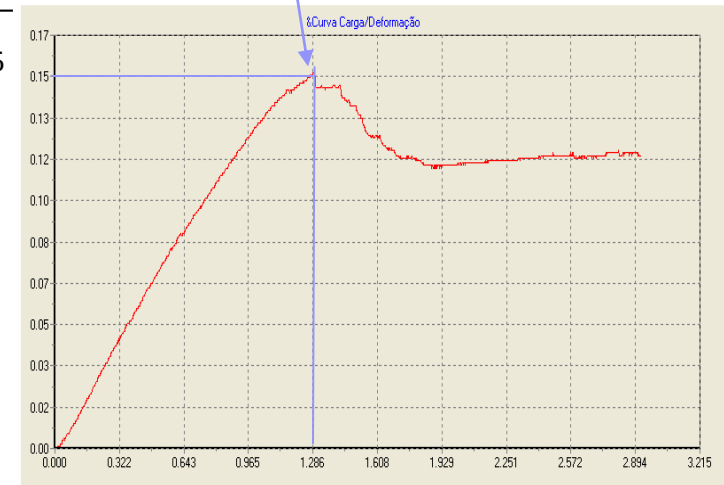
$$U_{rf} = \frac{\sigma_p^2 I_z}{6E y^2 S} = \frac{4,15 \cdot 10^4}{6,2} = 2,05 \cdot 10^3 \text{ Nm} / \text{m}^3$$

b) Calcular a tenacidade em flexão.

Admitindo que a fratura (falha) ocorreu no ponto de carga máxima e descreve uma parabólica podemos utilizar a formula abaixo. É razoável esta admissão pois em um compósito a uma falha principal e posteriormente inúmeras falhas secundárias em fibras remanescentes.

Par de pontos na carga máxima ($P=0,15 \times 10^3$; $v=1,286$ mm)

Admitir falha neste ponto ($P_{\text{máx}}$)



U_{tf} = modulo de tenacidade em flexão, (Nm/m³)

$P_{\text{máx}}$ = carga máxima (de ruptura) atingida no ensaio, (N)

$v_{\text{máx}}$ = flexa máxima atingida na carga máxima, (m)

l = comprimento do CP, (m)

S = área da seção transversal (m²)

$$S = 8,156 \cdot 10^{-5} m^2$$

$$P_{\max} = 0,15 \times 10^3 \text{ N}$$

$$v_{\max} = 1,286 \text{ mm} = 1,286 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 3,05 \text{ mm}$$

$$b = 26,74 \text{ mm}$$

$$L = 50 \text{ mm} = 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$U_{tf} = \frac{2 P_{\max} v_{\max}}{3 S l} = \frac{2 \times 0,15 \cdot 10^3 \times 1,286 \cdot 10^{-3}}{3 \times 8,156 \cdot 10^{-5} \times 50 \cdot 10^{-3}} = \frac{0,3858}{1,22 \cdot 10^{-5}} = 31,62 \cdot 10^3 \text{ Nm} / m^3$$

$$U_{tf} = 31,62 \cdot 10^3 \text{ Nm} / m^3$$



Bibliografia



- ❑ Ciência e Engenharia de Materiais – uma Introdução, Willian D. **Callister**, Jr. LTC 5. edição.
- ❑ The Science and Engineering of Materials, 4th ed Donald R. **Askeland** – Pradeep P. Phulé.
- ❑ **Dieter**, G.E. Metalurgia Mecânica 2.ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.
- ❑ Ensaaios Mecânicos de Materiais Metálicos, Fundamentos teóricos e práticos. 5º. Edição. Sérgio Augusto de **Souza**
- ❑ AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM E8M-01A (2001)**. Standard test methods of tension testing of metallic materials. Metric. Philadelphia.
- ❑ AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM E9-89a00 (2000)**. Standard Test Methods of Compression Testing of Metallic Materials at Room Temperature



OBRIGADO PELA
ATENÇÃO !!!