

Exemplo de aplicação do mt. de Newton, com pressão pré-fixada (1)

Após administrar A mg de um medicamento a um paciente, a concentração deste no sangue do paciente (em mg/L) é dada aproximadamente por uma função do tipo

$$c(t) = A\alpha t e^{-\beta t}$$

onde t é o tempo em horas após a administração da medicação ao paciente.

São administrados 500 mg de um medicamento a um paciente, com os parâmetros $\alpha = 0,066$ e $\beta = 0,2$.

(a) Esboce o gráfico de $c(t)$ nas primeiras 24 horas

$$c(t) = 500 \times 0,066 t e^{-0,2t} = 33 t e^{-0,2t}$$

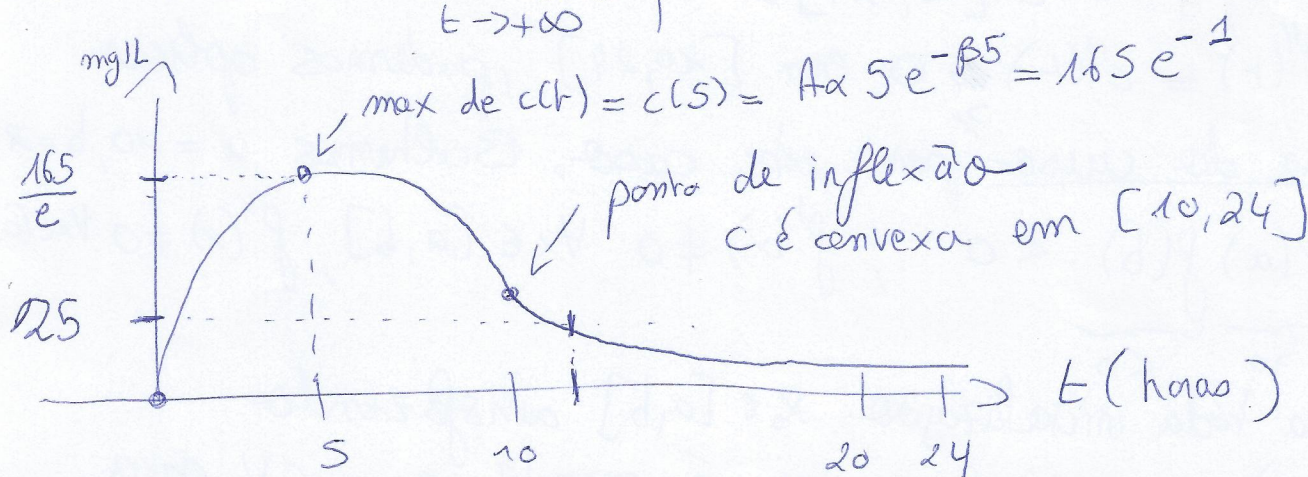
$$c'(t) = A\alpha e^{-\beta t} - \beta A\alpha t e^{-\beta t} = A\alpha e^{-\beta t} (1 - \beta t)$$

$$\begin{aligned} c''(t) &= A\alpha e^{-\beta t} (-\beta(1 - \beta t) - \beta) \\ &= A\alpha e^{-\beta t} (-2\beta + \beta^2 t) \end{aligned}$$

$$c'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - \beta t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\beta} \quad (\Leftrightarrow t = 5 \text{ para } \beta = 0,2)$$

$$c''(t) \geq 0 \Leftrightarrow -2\beta + \beta^2 t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{2}{\beta} \quad (\Leftrightarrow t \geq 10 \text{ para } \beta = 0,2)$$

temos também $c(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$



Como $c''(t) \leq 0$ em $[0, 10]$, c é concava em $[0, 10]$ e $t = 5$ é um máximo de $c(t)$

b) A concentração do medicamento não devea baixar de 25 mg/L . Utilize o método de Newton para determinar em que instante isto ocorrerá (com erro menor que 1 segundo), caso nova dose de medicamento não seja aplicada ao paciente. Justifique a CV do método de Newton. ②

Solução: Vamos definir a função $f(t) = c(t) - 25$

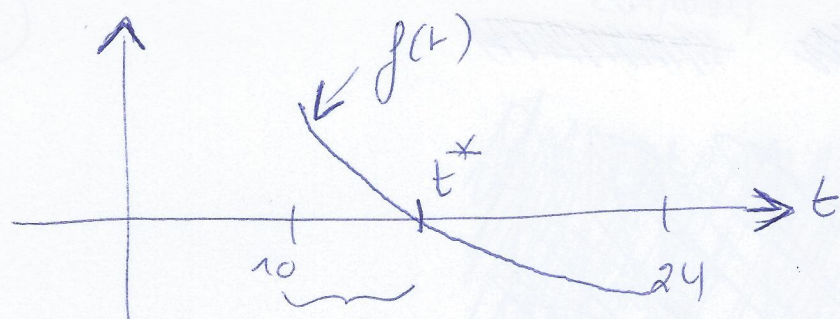
Como $f'(t) = c'(t) = A\alpha e^{-\beta t} (1 - \beta t)$
temos $f'(t) \geq 0$ para $t \leq \frac{1}{\beta}$ e $f'(t) \leq 0$ para $t \geq \frac{1}{\beta}$.
Então $f(t)$ crescente em $[0, \frac{1}{\beta}] = [0, 5]$ e $f(t)$ decrescente em $[\frac{1}{\beta}, 24] = [5, 24]$. Queremos que a concentração não baixe de 25 mg/L , isto é, queremos $f(t) \geq 0$ na parte decrescente $[5, 24]$ de $f(t)$. Como $f(t)$ é estritamente decrescente em $[5, 24]$ tem uma única raiz t^* de f em $[5, 24]$. É fácil calcular $f(10) = c(10) - 25$
$$= 330e^{-2} - 25$$
$$> \frac{330}{10} - 25 = 8 > 0.$$

Então a raiz $t^* \in [10, 24]$.

Como $f''(t) = c''(t) \geq 0$ em $[10, 24]$, podemos aplicar o teorema do curso para este caso. Escolhemos $a = 10, b = 24$,
temos $\underbrace{f(a)}_{>0} \underbrace{f(b)}_{<0} < 0$, $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$, $f''(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$.

Então para toda inicialização $x_0 \in [a, b]$ satisfazendo $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$, a sequência x_k é monótonica e CV para o único zero x^* de f em $[a, b] = [10, 24]$.

Temos $f''(t) \geq 0 \forall t \in [10, 24]$, então basta escolher x_0 tal que $f(x_0) > 0$ para satisfazer a condição



escolher x aqui

então, como f é decrescente, precisamos escolher $x_0 \in [10, t^*]$ para ter $f(x_0) > 0$

Então basta escolher $x_0 = 10$, e a sequência x_k será crescente com $x_k \rightarrow x^*$

Método de Newton

$$t_{k+1} = t_k - \frac{f(t_k)}{f'(t_k)} = t_k - \frac{33 t_k e^{-0,2 t_k} - 25}{33 e^{-0,2 t_k} (1 - 0,2 t_k)}$$

$$t_0 = 10$$

• Queremos um erro menor que 1 segundo = $\frac{1}{3600}$ horas
então $\delta = \frac{1}{3600}$ é a precisão pré-fixada.

Definimos $\phi(t) = -\frac{f(t)}{f'(t)}$, e vamos usar o algoritmo

de ponto fixo com precisão prefixada para sequências decrescentes.

$$t_0 = 10$$

$$t_1 = t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = 14,402230228$$

$$\phi(t_1 + 25) = \phi(14,402230228 + \frac{2}{3600}) \approx 0,47 > 0 \text{ continuamos}$$

$$t_2 = t_1 - \frac{f(t_1)}{f'(t_1)} = 14,8811313415$$

$$\phi(t_2 + 25) \approx 0,01 > 0 \text{ continuamos}$$

$$t_3 = t_2 - \frac{f(t_2)}{f'(t_2)} = 14,892414421186$$

$$\phi(t_3 + 2\delta) = -0,0005 < 0 \quad \text{paramos}$$

(4)

RETURN

$$\tilde{t} = t_3 + 2\delta = 14,8926922 \quad (\delta \simeq 0,0002777\ldots)$$

$\tilde{t}$ é a aproximação de t^* satisfazendo

$$|\tilde{t} - t^*| \leq \delta = \frac{1}{3600}$$

De fato, podemos verificar que

$$t^* = 14,892420717138 \quad (12 \text{ decimais exatos})$$

$$|\tilde{t} - t^*| \simeq 0,0002715 \leq \delta \simeq 0,0002777$$