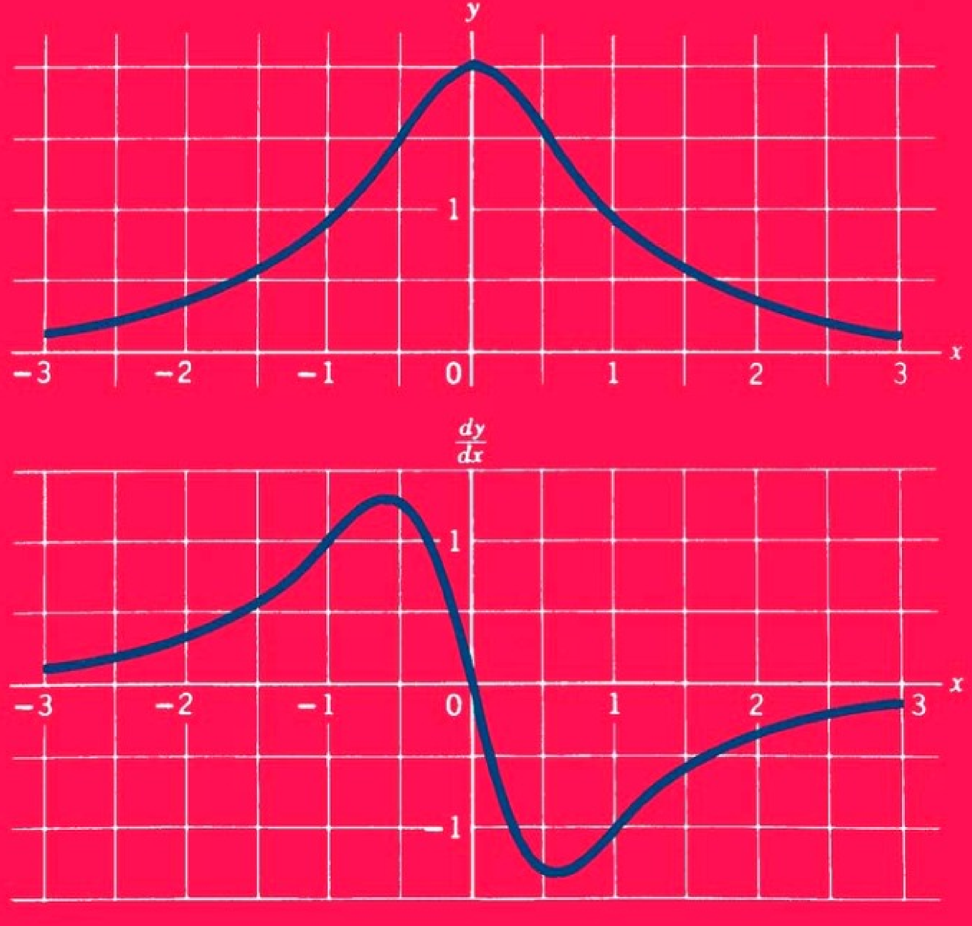
CÁLCULO
Rapidinho
2 EDIÇÃO
UM GUIA DE AUTOAPRENDIZADO



DANIEL KLEPPNER E NORMAN RAMSEY

Cálculo Rapidinho

Guerrilheiros do Cálculo
erratacalculorapidinho@gmail.com
Carnaval de 2022

Prefácio

Antes de você entrar de cabeça no *Cálculo Rapidinho*, talvez seja bom nós dizermos para que ele deverá servir. O *Cálculo Rapidinho* deve servir para lhe ensinar as técnicas elementares do cálculo diferencial e integral com um mínimo de esforço dispendido da sua parte; ele é planejado para que você estude por conta própria. Visto que, para qualquer pessoa, a melhor forma de aprender cálculo é resolvendo problemas, nós incluímos muitos problemas neste livro. Você vai sempre encontrar a solução para um problema assim que o resolver, e o que você fará a seguir vai depender da sua resposta. Via de regra, uma resposta correta vai encaminhá-lo para um tópico novo, enquanto uma resposta incorreta o levará para mais explicações e, talvez, um novo problema.

Esperamos que este livro seja útil para muitos tipos diferentes de leitores. A ideia de escrevê-lo veio do problema de ensinar o suficiente de cálculo para que os calouros pudessem começar a lidar com a física sem ter que esperar por um curso de cálculo universitário. Contudo, em pouco tempo se percebeu que o livro poderia ser útil de muitas outras maneiras. Por exemplo, tanto estudantes de pós-graduação quanto de graduação em economia, administração, medicina e nas ciências sociais precisam usar um pouco de cálculo elementar. Muitos deles nunca tiveram cursos de cálculo, ou querem revisar o curso que tiveram; esses estudantes poderão fazer bom uso deste livro. Alunos mais ousados do ensino médio, que queiram um começar os seus estudos universitários com uma boa vantagem, vão achar o *Cálculo Rapidinho* perfeito. Diferente da maioria dos textos de cálculo, ele enfatiza as técnicas e aplicações ao invés de teorias rigorosas, sendo assim especialmente apropriado para uma introdução ao assunto. Os iniciantes no cálculo que queiram uma visão diferente e mais simples do assunto vão achar o livro útil tanto para auto-aprendizado como para uso em sala de aula. Em particular, nós esperamos que este livro seja útil para as pessoas que desejam aprender cálculo só pela diversão que vem junto.

Por conta da variedade de formações das pessoas que vão utilizar este livro, começamos por uma revisão de alguns tópicos de álgebra e trigonometria que serão úteis para o cálculo elementar. Se você se lembra do que aprendeu desses assuntos no ensino médio, vai enveredar rapidamente pela matéria; já se você teve pouco contato com a matemática, ou se há muito não chega perto dela, poderá se demorar mais na revisão. Como verá, uma das virtudes do livro é a sua flexibilidade: o tempo que você gasta em cada trecho dependerá das suas necessidades particulares. Esperamos que esses fatores possam ajudá-lo a economizar algum tempo, e que você venha a achar o título do livro apropriado.

Daniel Kleppner

Norman Ramsey

Cambridge, Massachussets

Prefácio à segunda edição

A esperança que expressamos no prefácio da primeira edição, de que o *Cálculo Rapidinho* seria útil para muitos tipos diferentes de leitores, valeu a pena, pois mais de 250 mil cópias do livro já estão em uso. A principal mudança da segunda edição é o tratamento de integração. O Capítulo 3 foi completamente reescrito; muito do material foi simplificado, e um novo tópico foi adicionado: integração numérica. Adicionalmente, introduzimos no livro exercícios numéricos para serem resolvidos com calculadora. Eles não são parte essencial do texto, mas esperamos que os leitores que possuam calculadora possam considerá-los interessantes e úteis. Muitas melhorias de menor escopo foram feitas, e as referências foram atualizadas.

Daniel Kleppner

Norman Ramsey

Cambridge, Massachussets

Prefácio à tradução guerrilheira

Queridos calouros, este é o nosso presente de boas-vindas para cada um de vocês! Nós sabemos que é bem pouquinho diante da enormidade do desafio que está por vir, mas por favor aceitem, pois foi o que esteve dentro das nossas possibilidades de fazer (literalmente da noite para o dia) a fim de tornar mais calorosa e acolhedora a entrada de vocês nesta nossa comunidade de estudo, de trabalho e de vivência que é o IFUSP.

Logo após anunciarmos a tradução, alguém notou que esta é uma iniciativa de democratização do conhecimento. Na verdade, nem tínhamos pensado nesses termos. Para nós, tratava-se apenas de nos mobilizarmos para dar uma solução prática a um problema que é real: a falta de acesso de alguns ingressantes, por conta do idioma, a um recurso utilizado em Física I, e o que nos motivava era simplesmente o fato de que, apesar de ainda não nos conhecermos pessoalmente, já gostamos muito de vocês. Vamos passar tanto tempo e encarar tantos problemas juntos, cooperar e compartilhar tanto ao longo deste curso que às vezes é uma pedreira, que certamente faremos amizades que começam como meras parcerias de estudo e muitas vezes desenvolvem-se em laços de afeto que durarão pelo resto da vida. Na nossa guerrilha, por exemplo, convivem gerações de veteranos com quase 15 anos de diferença, e certos professores que vocês verão dando aula juntos neste ano sentaram-se lado a lado nas carteiras do IFUSP quando eram graduandos.

Agora, já que se falou em democratizar — esse sinônimo bem comportado para aquela outra palavrinha[1] —, precisamos admitir que, no fim das contas, é isso mesmo. Que outra coisa estamos fazendo senão promover uma iniciativa de bem viver comum, com e para os nossos

[1] socializar

colegas, orientada pela vontade de que cada um tenha acesso aos meios que utilizamos para tocar a vida com plenitude (no caso, o estudo)? Quando observamos que o conhecimento, em especial o técnico-científico, é o principal componente dos meios produtivos contemporâneos, se é que ele próprio já não seja um meio produtivo em si, aí é que nos damos conta do quanto é importante inserir conteúdo prático nessa expressão "democratizar o conhecimento", a fim de que ela possa fazer a diferença, até mesmo do ponto de vista material, na vida das pessoas.

Só que o conhecimento não se adquire nem se distribui da mesma forma que um pdf. Você precisa se envolver com ele. Tem que conviver na comunidade em que ele circula, tem que fazer cálculo na lousa com o orientador, mexer no instrumental do lab com o monitor, tem que escrever artigo a quatro, seis, muitas mãos, colaborar com os pares. Daí que só se aprende se for de forma autônoma, se você mesmo se dispuser e se expuser à participação, e daí que, ainda assim, tudo o que você vier a realmente saber será autoral, pois por mais que todos conheçamos, por exemplo, o Teorema Fundamental do Cálculo, a ideia dele que será formada na sua cabeça, a sua forma de falar sobre ele e a sua experiência efetiva com ele (bem como as cicatrizes que isso deixa no seu corpo) serão só suas. Por fim, a menos que você seja uma cianobactéria aprendendo a existir, o aprendizado não se dá a partir do nada, mas em diálogo (nem sempre harmonioso) com um conjunto de saberes organizados e avalizados por uma comunidade, isto é, um aprendizado genuinamente crítico somente ocorre a partir de uma autoridade, não de pessoas, mas do próprio conhecimento constituído e da visão de mundo que, quando você chega nele, está dada.

Tal como acontece com a palavra "democracia", esses conceitos precisam de conteúdo prático para fazerem sentido. Infelizmente, por falta de praticá-los, há quem confunda o estudo autônomo com o esforço individualista, a autoralidade dos saberes com a mera opinião, e a autoridade do professor com a opressão do estudante. É importante nunca perder de vista essas diferenças, nem deixar de ter sensibilidade para aquilo que de fato prende ou de fato impulsiona, se aproveita ou lhes aproveita, entristece ou alegra vocês, de segunda a sexta, das 8h às 23h, lá na Rua do Matão.

E sobretudo, nunca se deixar amargurar pelas coisas que ainda não são do jeito que vocês querem, nem esquecer de valorizar as que são. Por incrível que pareça, o curso do IFUSP é tudo menos tradicional, dado que ele já é produto de várias reelaborações que têm sido feitas continuamente ao longo da existência do instituto, por discentes e docentes que, como nós (e esperamos que em breve vocês), se incomodam que ainda não estejam vivendo a utopia e agem para que os ingressantes do ano seguinte a vivam.

Para sermos bem sinceros, um dos fatores que nos animou a montar a guerrilha é que nós temos um receio enorme de ficarmos parecidos com aquele tiozão molengão que existe nas suas, nas nossas, em todas as famílias, inclusive na família IFUSP, e que fica o dia inteiro reclamando de tudo, mas não arregaça a manga para resolver nada e ainda escarnece de quem faz. É verdade que, às vezes, grandes mobilizações precisam ser planejadas e estruturadas ao longo de um tempo que não cabe nos quatro anos da graduação, e que algumas grandes conquistas — como a democratização do acesso à USP pela política de cotas e a adesão ao SISU — passam por meio de instituições, assim que pelo menos alguns de nós acabam precisando jogar o jogo labirintoso e um tanto brochante delas. Mas, mesmo nesses casos, o que seria das grandes soluções se não partissem de uma base de experiências locais, de iniciativas-protótipo, de testes de conceito, de todo o arcabouço teórico que vamos acumulando no dia a dia dos experimentos práticos que tentam fazer da vida comum e do estudo melhores? O que haveria de democrático nelas?

A utopia, por exemplo, é algo que não teríamos como deixar pronto para vocês no prazo dos últimos dias. Mas a tradução sim, e a tradução nós fizemos. Aliás, não só a vocês, mas a nós mesmos nos oferecemos um presente, as quase 48 horas de intenso trabalho e prazerosa convivência entre bons amigos que há dois anos não se veem. Você serão a primeira turma, em muito tempo, a poder desfrutar da universidade de modo pleno; aproveitem como ninguém desse privilégio reconquistado, rachem de estudar, morem no IF, até quebrem o pau em alguma assembleia de vez em quando, e, o mais importante, sucesso, e sejam felizes.

E contem conosco![2]
E com mais ações de guerrilha!

São Paulo, 28 de fevereiro de 2022

[2]Sugestões e reclamações: erratacalculorapidinho@gmail.com

Capítulo 0
Sumário

Capítulo 1
Algumas Preliminares

Neste capítulo vamos explicar o planejamento do livro e revisar alguns conceitos matemáticos elementares. Até o fim do capítulo você terá se familiarizado com:

- A definição de uma função matemática
- Gráficos de funções
- As propriedades das funções mais utilizadas: funções lineares e quadráticas, funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Alguns problemas do *Cálculo Rapidinho* requerem o uso de uma calculadora científica: uma calculadora que fornece valores para as funções trigonométricas e logaritmos[1]. Contudo, esses problemas, que estarão claramente identificados, são opcionais. Você pode pulá-los e avançar no texto sem uma calculadora, embora resolver os problemas numéricos vá ajudar a aumentar o seu entendimento.

Introdução

1

Apesar do nome formidável, o cálculo não é um assunto particularmente difícil. É claro que você não vai se tornar um mestre da noite para o dia, mas com dedicação poderá aprender as suas ideias básicas bastante rápido.

[1]N. do T.: Caso você não possua uma, é possível encontrar aplicativos de celular ou mesmo *websites* que funcionam como calculadoras científicas. Ao buscar "calculadora científica" no Google, ele mesmo já fornece um painel que cumpre esse propósito.

Este manual vai introduzi-lo ao cálculo. Depois de trabalhar com ele, você deverá ser capaz de lidar com diversos problemas e estar preparado para aprender técnicas mais elaboradas se for precisar delas. Mas lembre-se: a palavra-chave é *trabalhar*, embora esperemos que você ache muito desse trabalho divertido.

Boa parte do seu trabalho vai ser responder a questões e resolver problemas. O caminho específico que você vai seguir dependerá das suas respostas. A recompensa por resolver um problema corretamente é seguir direto para um novo tópico. Por outro lado, se você cometer algum erro, a solução geralmente será explicada e você receberá problemas adicionais para ver se conseguiu entender. De toda maneira, você sempre vai poder verificar suas respostas imediatamente depois de resolver os problemas.

Muitos dos problemas terão respostas de múltipla escolha. As escolhas possíveis estarão agrupadas deste modo: $[\,a\,|\,b\,|\,c\,|\,d\,]$. Escolha a sua resposta circulando a alternativa. A resposta correta poderá ser encontrada no canto inferior da página da esquerda seguinte[2]. Algumas questões precisarão ser respondidas por extenso. O espaço para elas será indicado por uma lacuna, e você será redirecionado a uma outra lição para ver a resposta correta.

Se você acertar a resposta mas sentir que precisa de mais prática, apenas siga a caminho da resposta errada. Não há nenhum prêmio para completar este livro em tempo recorde.

Vá para a lição **2**.

2

Caso você queira saber o que está por vir, aqui está um pequeno sumário deste livro: o primeiro capítulo é uma revisão que será útil mais tarde; o Capítulo 2 é sobre cálculo diferencial; e o Capítulo 3 cobre cálculo integral. O Capítulo 4 contém um breve resumo de todo a matéria anterior. Há dois apêndices, um dando demonstrações formais de uma série de relações que usamos no livro, e o outro discutindo alguns tópicos suplementares. Há ainda uma lista extra de problemas, com as respostas, e uma seção com tabelas que você pode achar útil.

Um aviso sobre as próximas primeiras lições. Uma vez que precisamos começar com algumas definições, a primeira seção vai ter que ser um tanto mais formal que a maioria das outras partes do livro.

Primeiro, revisaremos a definição de uma função. Se você já está familiarizado com ela e com a ideia de variáveis dependentes e independentes, pule para a lição **14**. (Na verdade, neste capítulo há várias oportunidades para pular, se você já conhecer os tópicos. Por outro lado, parte deles pode ser nova para você, e pode ser bom gastar um pouquinho de tempo na revisão.)

---

[2] N. do T.: Isso, no livro original. Por questões de diagramação, pedimos que o leitor ignore essa orientação; para compensar, nós indicaremos a localização das respostas em cada caso.

Vá para **3**.

Funções

3

A definição de função faz uso da ideia de *conjunto*. Você sabe o que é um conjunto? Se sim, vá para **4**. Senão, continue lendo.

Um *conjunto* é uma coleção de objetos (não necessariamente objetos materiais) descrita de tal forma que não se têm dúvidas quanto a um objeto particular pertencer ou não a ela. Um conjunto pode ser descrito listando os seus elementos. Exemplo: o conjunto de números 23, 7, 5, 10. Outro exemplo: Marte, Roma e a França.

Também podemos descrever um conjunto por meio de uma regra, por exemplo: todos os inteiros positivos pares (esse conjunto contém um número infinito de objetos). Outro conjunto definido por uma regra é o conjunto de todos os planetas do nosso sistema solar.

Um conjunto particularmente útil é o conjunto de todos os números reais, o qual inclui todos os números como 5, -4, 0, $\frac{1}{2}$, -3,482, $\sqrt{2}$. O conjunto dos números reais *não* inclui quantidades que envolvam a raiz quadrada de números negativos (tais quantidades são chamadas de *números complexos*; neste livro vamos nos interessar somente pelos números reais).

O uso matemático da palavra "conjunto" é similar a uso dessa palavra na conversação usual, como "um conjunto de clubes de golfe".

Vá para **4**.

4

Na lacuna a seguir, liste os elementos do conjunto que consiste de todos os inteiros ímpares entre -10 e +10.

____

Vá para **5** para a resposta correta.

5

Aqui estão os elementos do conjunto de todos os inteiros ímpares entre -10 e +10:

$$-9, -7, -3, -5, -1, 1, 3, 5, 7, 9.$$

Vá para **6**.

6

Agora estamos prontos para falar sobre funções. Eis a definição.

Uma *função* é uma regra que associa cada elemento de um conjunto A a um e apenas um elemento de um conjunto B.

Essa regra pode ser especificada por uma fórmula matemática como $y = x^2$, ou por tabelas com números em associação, por exemplo a temperatura a cada hora do dia. Se x é um dos elementos do conjunto A, então o elemento do conjunto B que a função f associa com x é denotado pelo símbolo $f(x)$. [O símbolo $f(x)$ é o valor de f em x. Geralmente lê-se "f de x".]

O conjunto A é chamado de *domínio* da função.

O conjunto B de todos os possíveis valores de $f(x)$ conforme x varia no domínio é chamado de *imagem* da função.

Em geral, A e B não precisam ficar restritos a conjuntos de números reais. No entanto, conforme mencionado na lição **3**, neste livro vamos nos interessar apenas aos números reais.

Vá para **7**.

7

Por exemplo, para a função $f(x) = x^2$ com domínio sendo todos os números reais, a imagem é:

____

Vá para **8**.

8

A imagem é *todos os números reais não negativos.*

Para uma explicação, vá para **9**.

Senão, Pule para **10**.

9

Lembre-se que o produto de dois números negativos é positivo. Assim, para qualquer valor real x, positivo ou negativo, x^2 é positivo. Quando x é 0, x^2 também é 0. Por conseguinte, a imagem de $f(x) = x^2$ é todos os números não negativos.

Vá para **10**.

10

Nosso interesse principal estará nas regras para calcular funções definidas por fórmulas. Se o domínio não for especificado, ficará subentendido que o domínio é o conjunto de todos os números reais para os quais a fórmula produz um valor real e para os quais ela faz sentido. Por exemplo:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$. Imagem = ________________________

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$. Imagem = ________________________

Vá para **11**.

11

$f(x)$ será real para x não negativo, de modo que a resposta para (a) é todos os números reais não negativos.

$\frac{1}{x}$ é definido para todos os valores de x exceto 0, de modo que a imagem em (b) é todos os números reais exceto 0.

Vá para **12**.

12

Quando uma função vem definida por uma fórmula como $f(x) = ax^3 + b$, x é chamada de variável independente, e $f(x)$ de variável dependente. Uma vantagem dessa notação é que o valor da variável dependente, por exemplo para $x = 3$, pode ser indicado por $f(3)$.

Entretanto, frequentemente se usa uma única letra para representar a variável dependente, como em

$$y = f(x).$$

Aqui, x é a variável independente e y é a variável dependente.

Vá para **13**.

13

Na matemática, o símbolo x costuma representar uma variável independente, f muitas vezes representa uma função, e $y = f(x)$ geralmente denota a variável dependente. No entanto, qualquer outro símbolo pode ser uado para a função, para a variável independente e para a variável dependente. Por exemplo, podemos ter $z = H(r)$, que se lê "z é igual a H de r". Aqui, r é a variável independente, z a dependente, e H é a função.

Agora que já sabemos o que significa uma função, sigamos para a discussão sobre gráficos.

Vá para **14**.

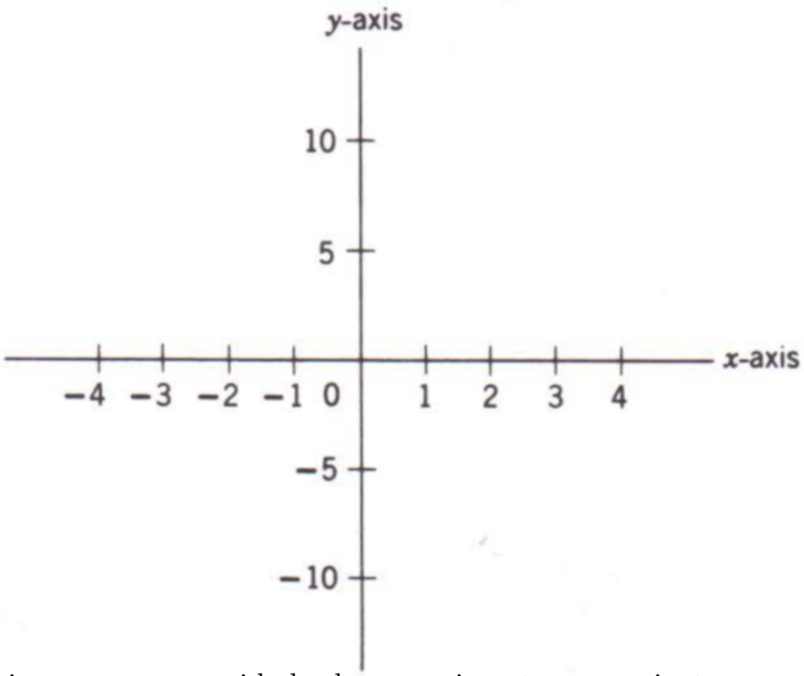
Gráficos

14

Se você sabe como plotar gráficos de funções, pode pular para a lição **19**.
Senão, Vá para **15**.

15

Uma maneira conveniente de representar uma função definida por $y = f(x)$ é plotar um gráfico. Começamos construindo eixos coordenados. Primeiro construímos um par de retas que se intersectam perpendicularmente, uma horizontal e outra vertical. A reta horizontal é comumente chamada de *eixo x*, e a vertical de *eixo y*. O ponto de intersecção entre elas é a *origem*, e os eixos tomados conjuntamente são chamados de *eixos coordenados*.

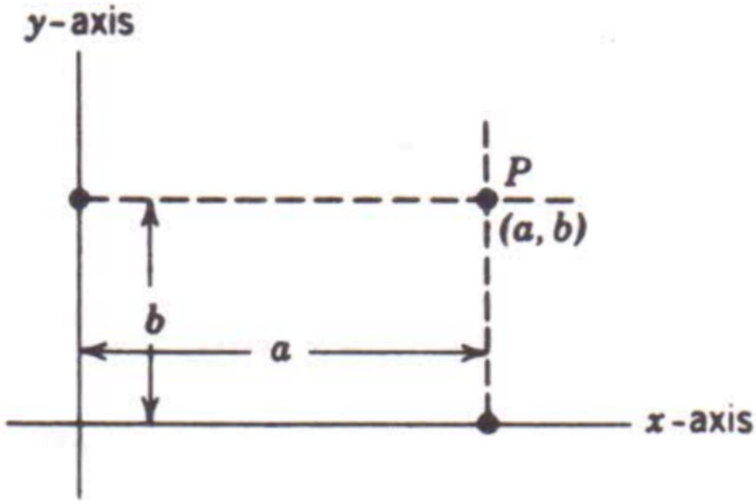


Em seguida, selecionamos uma unidade de comprimento conveniente e, partindo da origem, demarcamos uma escala sobre o eixo x, positiva para a direita e negativa para a esquerda. Da mesma forma demarcamos uma escala sobre o eixo y com números positivos indo para cima e negativos para baixo. A escala do eixo y não precisa ser a mesma daquela do eixo x (como no desenho). Na realidade, x e y podem ter unidades diferentes, como distância e tempo.

Vá para **16**.

16

Podemos representar um par específico de valores associados pela função da seguinte maneira: se a representa um valor particular para a variável independente x, e se b indica o valor correspondente de $y = f(x)$, então $b = f(a)$.



Agora desenhamos uma linha paralela ao eixo y a uma distância a desse eixo, e uma outra linha, paralela ao eixo x, a uma distância b dele. O ponto P no qual essas duas retas se intersectam é designado pelo par de valores (a, b) para x e y, respectivamente.

O número a é chamado de coordenada x de P, e o número b de coordenada y de P. (Às vezes a coordenada x é chamada de *abcissa*, e a coordenada y de *ordenada*.) Ao designar um ponto desse tipo pela notação (a, b), vamos sempre denotar a coordenada x primeiro, e a coordenada y depois.

Para uma revisão dessa terminologia, circule abaixo as respostas corretas. Para o ponto $(5, -3)$:

coordenada x: $[-5 \,|\, -3 \,|\, 3 \,|\, 5]$

coordenada y: $[-5 \,|\, -3 \,|\, 3 \,|\, 5]$

(Lembre-se que as respostas às questões de múltipla escolha geralmente serão dadas no canto inferior da página da esquerda seguinte[3]. Sempre verifique suas respostas antes de prosseguir.)

Vá para **17**.
Resposta em **18**.

17

A maneira mais direta de plotar o gráfico de uma função $y = f(x)$ é fazer uma tabela de valores de x moderadamente espaçados e dos valores correspondentes de $y = f(x)$. Então, cada par de valores (x, y) poderá ser representado por um ponto como na lição anterior. Obtém-se um gráfico da função ao conectar os pontos com uma curva suave. Claramente, os pontos da curva

[3]N. do T.: Somente ignore.

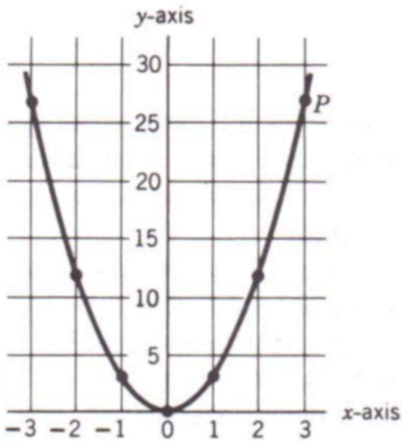
podem ser apenas aproximações. Se quisermos um *plot* acurado, precisaremos apenas ser muito cuidadosos e usarmos muitos pontos. (Por outro lado, *plots* rudimentares são bastante bons para vários propósitos.)

Vá para **18**.

18

Como exemplo, eis aqui um *plot* da função $y = 3x^2$. Exibimos uma tabela de valores de x e y e indicamos esses pontos no gráfico.

x	y
-3	27
-2	12
-1	3
0	0
1	3
2	12
3	27



Para testar-se, circule o par de coordenadas que corresponde ao ponto P indicado na figura.

[$(3, 27)$ | $(27, 3)$ | nenhum dos anteriores]

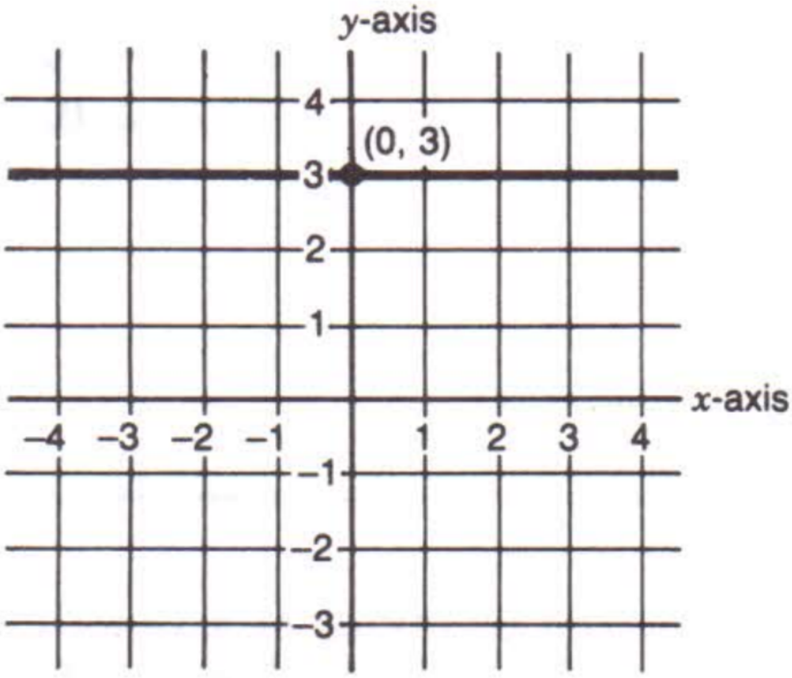
Confira a sua resposta. Se incorreta, reestude a lição **16** e então vá para **19**. Se correta,

Vá para **19**.
Resposta em **21**.

Resposta **16**: 5,-3.

19

Aqui está uma função um tanto quanto especial. É a chamada *função constante*, que associa um único número fico c a todos os valores da variável independente x. Assim, $f(x) = c$.



Essa é uma função peculiar, dado que o valor da variável dependente é o mesmo para todos os valores da variável independente. Não obstante, a relação $f(x) = c$ associa exatamente um valor de $f(x)$ a cada valor de x, como requer a definição de função; acontece que todos os valores de $f(x)$ são os mesmos.

Tente convencer-se de que o gráfico da função constante $y = f(x) = 3$ é uma linha reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(0, 3)$ como mostrado na figura.

Vá para **20**.

20

Outra função simples é a *função valor absoluto*. O valor absoluto de x é indicado pelo símbolo $|x|$. O valor absoluto de um número x determina o tamanho ou a magnitude do número sem preocupação com o sinal. Por exemplo:

$$|-3| = |3| = 3.$$

Definiremos agora x de forma geral. Mas antes lembremo-nos dos símbolos de desigualdade:

$a > b$ significa que a é maior que b.

$a \geqslant b$ significa que a é maior ou igual a b.

$a < b$ significa que a é menor que b.

$a \leqslant b$ significa que a é menor ou igual a b.

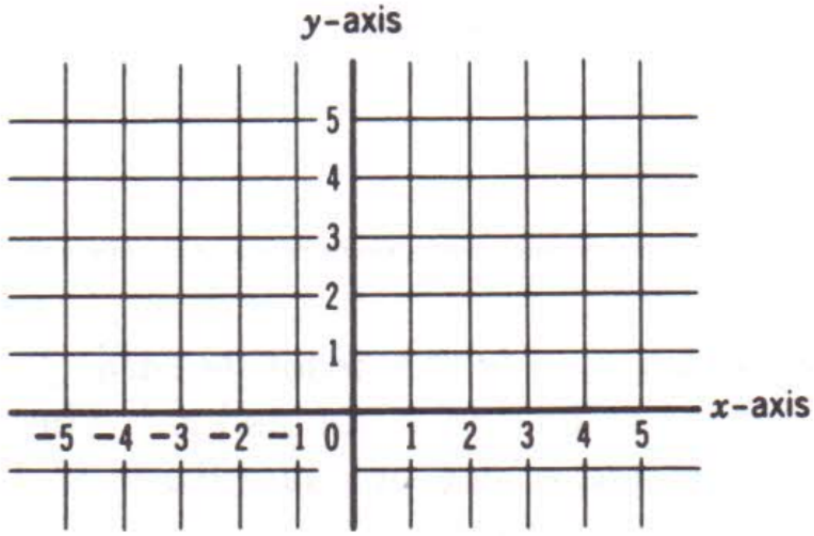
Com essa notação, podemos definir a função valor absoluto $|x|$ pelas duas regras seguintes:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Vá para **21**.

21

Uma boa maneira de mostrar o comportamento de uma função é plotando o seu gráfico. Assim, plote como exercício o gráfico da função $y = |x|$ na figura a seguir.

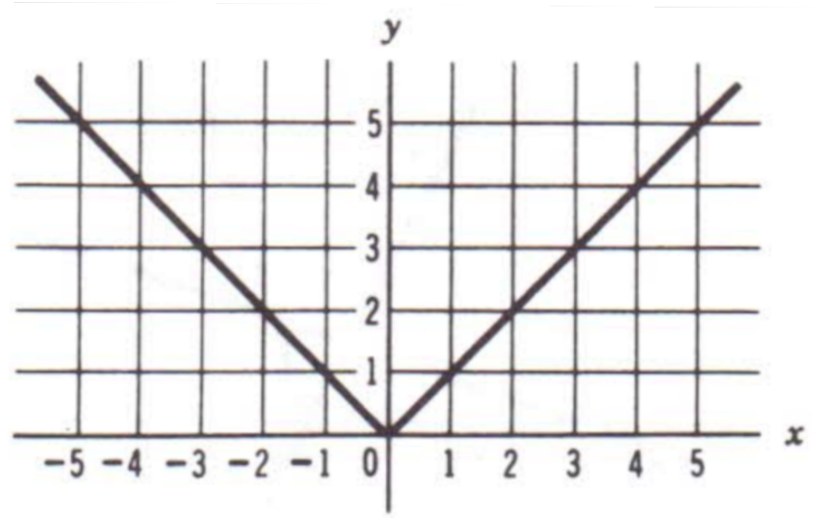


Para verificar sua resposta, vá para **22**.

Resposta **18**: $(3, 27)$

22

O gráfico correto para $|x|$ é:



Isso pode ser visto ao montarmos uma tabela de valores de x e y como segue:

x	$y = \mid x \mid$
-4	$+4$
-2	$+2$
0	0
$+2$	$+2$
$+4$	$+4$

Esses pontos podem ser plotados como nas lições **16** e **18**, e as linhas traçadas com os resultados na figura acima.

Com esta introdução sobre funções e gráficos, vamos agora dar uma olhada rápida em algumas funções elementares importantes. Você deverá tornar-se familiarizado com elas.

São elas as funções lineares, quadráticas, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Vá para **23**.

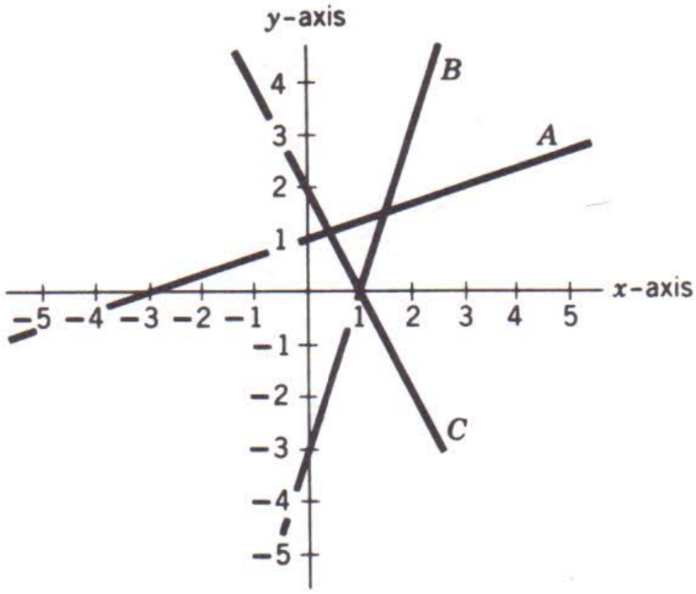
Funções lineares e quadráticas

23

Uma função definida por uma equação da forma $y = mx + b$, onde m e b são constantes, é dita ser uma função *linear*[4], porque o seu gráfico é uma reta. Essa é uma função simples e útil, e você deverá realmente tornar-se familiarizado com ela.

Eis aqui um exemplo: circule a letra que identifica o gráfico de:

[4]N. do T.: No Brasil, as funções que o livro chama de lineares são normalmente conhecidas como *funções afins*. Nós reservamos o termo "linear" para outros tipos de função, conforme você vai aprender em Vetores e Geometria e em Álgebra Linear.



$y = 3x - 3.$ $\quad$ [A | B | C]

A resposta correta está no canto inferior da próxima página[5]. Se você errou ou não se sente completamente seguro da sua resposta, vá para **24**.

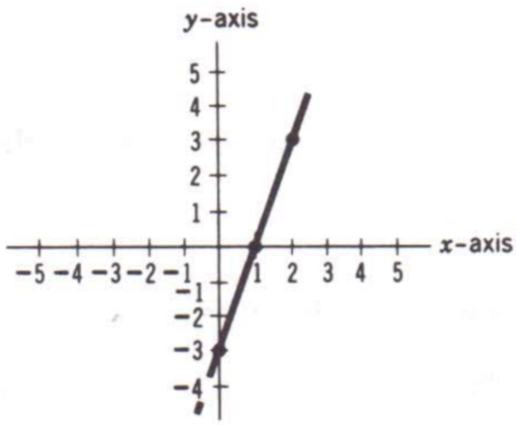
Senão, vá para **25**.

Resposta em **27**.

24

Foi-lhe dada a função $y = 3x - 3$. A tabela abaixo fornece alguns valores de x e y.

x	y
−2	−9
−1	−6
0	−3
1	0
2	3



Alguns desses pontos estão mostrados no gráfico, e uma reta foi traçada através deles. Essa é a reta B da figura na lição **23**.

Vá para **25**.

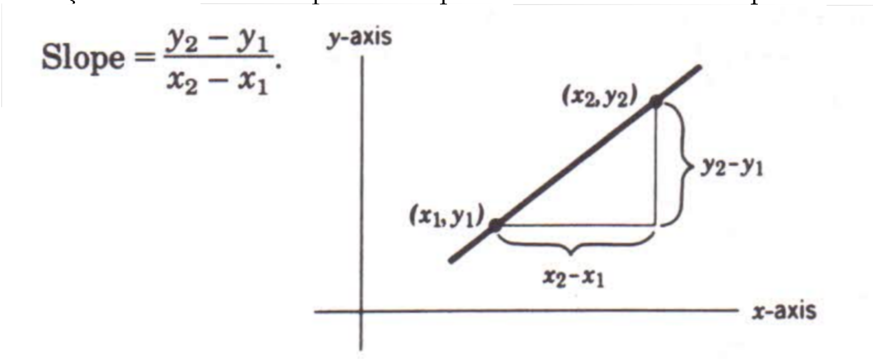
[5]N. do T.: Somente ignore.

25

Temos aqui o gráfico de uma função linear típica. Tomemos quaisquer dois pontos distintos sobre a reta, (x_2, y_2) e (x_1, y_1). Definimos a inclinação[6] da reta da seguinte maneira:

$$\text{inclinação} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

A ideia de inclinação será muito importante para o nosso trabalho posteriormente, por isso

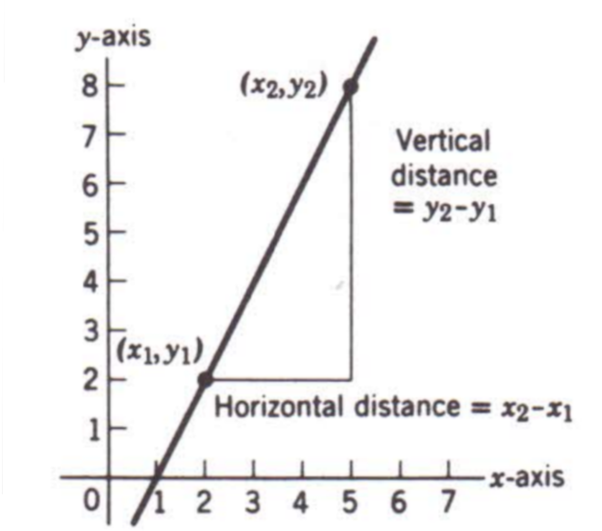


vamos gastar um pouco mais de tempo para aprender mais sobre ela.

Vá para **26**.

26

Se as escalas de x e y forem as mesmas, como na figura, então a inclinação é a razão entre a distância *vertical* e a distância *horizontal* segundo avançamos de um ponto sobre a reta para outro, contanto que tomemos o sinal de cada segmento de reta como na equação da lição **25**. Se a reta é vertical, a inclinação é infinita (ou, mais precisamente, indefinida). Deverá estar claro que a inclinação é a mesma para quaisquer pares de pontos separados sobre a reta.



Vá para **27**.

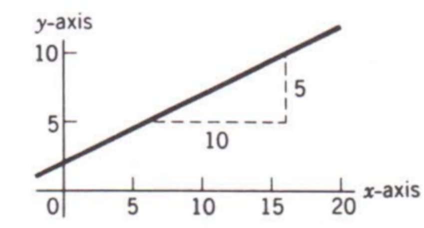
[6] N. do T.: No Brasil, também chamada de *coeficiente angular* da reta.

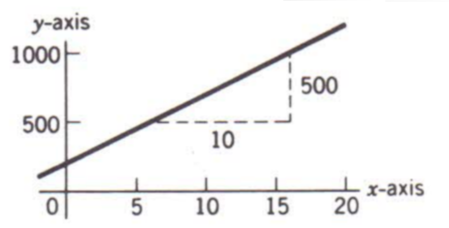
27

Se as escalas vertical e horizontal não forem as mesmas, a inclinação ainda será definida por

$$\text{inclinação} = \frac{\text{distância vertical}}{\text{distância horizontal}},$$

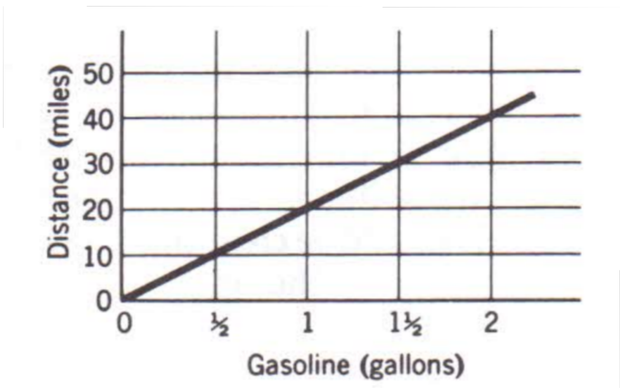
porém agora a distância será medida segundo a escala apropriada. Por exemplo, as duas figuras abaixo podem parecer semelhantes, mas as inclinações são bastante diferentes. Na primeira figura as escalas em x e em y são idênticas, e a inclinação é $\frac{1}{2}$. Na segunda figura, a escala em y foi alterada por um fator 100, e a inclinação é 50.





Dado que a inclinação é a razão entre dois comprimentos, ela será um número puro se os dois comprimentos forem números puros. No entanto, se as variáveis tiverem dimensões diferentes, a inclinação também terá uma dimensão.

Abaixo temos o gráfico da distância viajada por um carro × a quantidade de gasolina consumida.



Aqui a inclinação tem a dimensão ou unidade de milhas / galão (ou milhas por galão). Qual é a inclinação da reta mostrada?

$$\text{inclinação} = [\,10\,|\,20\,|\,30\,|\,40\,] \quad \text{milhas / galão}$$

Se acertou, vá para **29**.

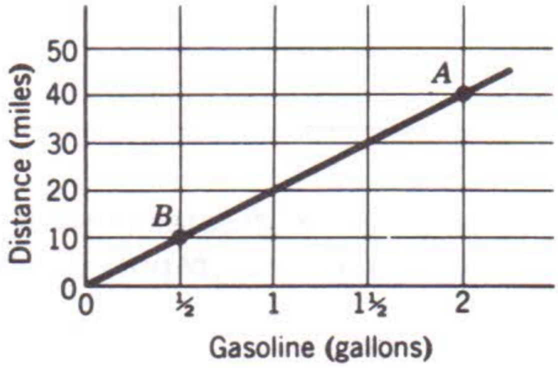
Senão, vá para **28**.

Resposta em **32**.

Resposta **23**: B.

28

A fim de calcular a inclinação, encontremos as coordenadas de dois pontos sobre a reta.



Por exemplo, A tem coordenadas $(2 \text{ galões}, 40 \text{ milhas})$, e B tem coordenadas $(\frac{1}{2} \text{ galão}, 10 \text{ milhas})$. Assim, a inclinação será:

$$\frac{(40-10) \text{ milhas}}{(2-\frac{1}{2}) \text{ galões}} = \frac{30 \text{ milhas}}{\frac{3}{2} \text{ galões}} = 20 \text{ milhas por galão.}$$

É óbvio que teríamos obtido o mesmo valor de inclinação independentemente de quais pontos ter usado, já que a razão entre as distâncias vertical e horizontal é a mesma em qualquer lugar.

Vá para **29**.

29

Eis aqui outra maneira de encontrar a inclinação de uma reta, se a sua equação for dada. Se a função linear for da forma $y = mx + b$, então a inclinação será dada por

$$\text{inclinação} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Substituindo y na expressão acima, obtemos

$$\text{inclinação} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 - mx_1}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m.$$

Qual é a inclinação de $y = 7x - 5$?

$$[\,\frac{5}{7}\,|\,\frac{7}{5}\,|\,-5\,|\,-7\,|\,5\,|\,7\,]$$

Se acertou, vá para **31**.

Senão, vá para **30**.

Resposta em **32**.

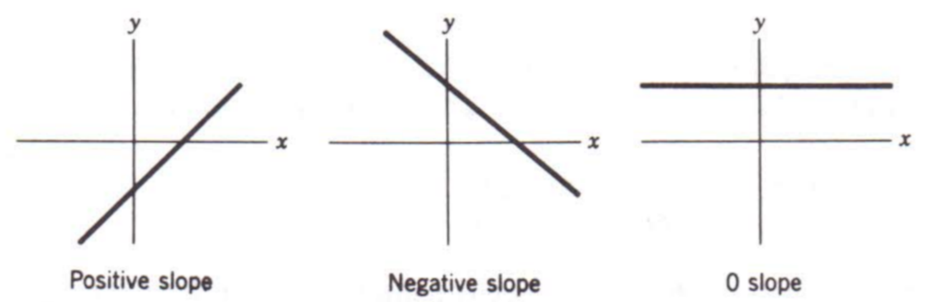
30

A equação $y = 7x - 5$ pode ser escrita na forma $y = mx + b$ tomando $m = 7$ e $b = -5$. Como inclinação $= m$, a reta dada tem inclinação de 7.

Vá para **31**.

31

A inclinação de uma reta pode ser positiva (maior que 0), negativa (menor que 0), ou 0. Um exemplo de cada é mostrado graficamente abaixo.



Note como a reta com inclinação positiva cresce indo da esquerda para a direita, enquanto a reta com inclinação negativa decresce indo da esquerda para a direita. (Foi observado na lição **26** que não se define a inclinação de uma reta vertical.)

Indique, circulando a sua escolha, se a inclinação do gráfico de cada uma das equações a seguir é positiva, negativa ou zero.

1. $y = 2x - 5$ $\quad [+ \mid - \mid 0]$
2. $y = -3x$ $\quad [+ \mid - \mid 0]$
3. $p = q - 2$ $\quad [+ \mid - \mid 0]$
4. $y = 4$ $\quad [+ \mid - \mid 0]$

Se acertou todas, vá para **33**.
Se cometeu algum ero, vá para **32**.
Resposta em **36**.

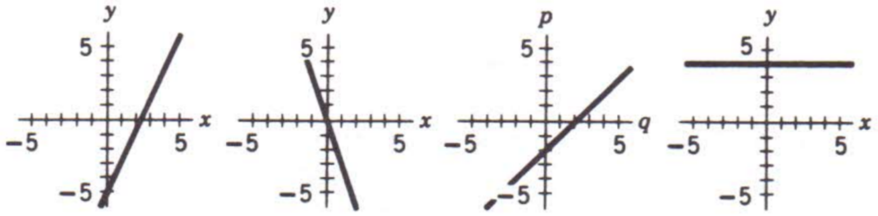
32

Damos abaixo explicações para as questões na lição **31**. Na lição **29**, vimos que para uma equação linear da forma $y = mx + b$, a inclinação é m.

1. $y = 2x - 5$. Aqui, $m = 2$, e a inclinação é 2. Claramente esse é um número positivo. Vide a Figura 1 abaixo.
2. $y = -3x$. Aqui, $m = -3$. A inclinação é -3, que é negativo. Vide a Figura 2 abaixo.

3. $p = q - 2$. Nesta equação, as variáveis são p e q, no lugar de y e x. Escrevendo-a na forma $p = mq + b$, fica evidente que $m = 1$, que é positivo. Vide a Figura 3 abaixo.

4. $y = 4$. Este é um exemplo de função constante. Aqui, $m = 0$, $b = 4$, e a inclinação é 0. Vide a Figura 4 abaixo.

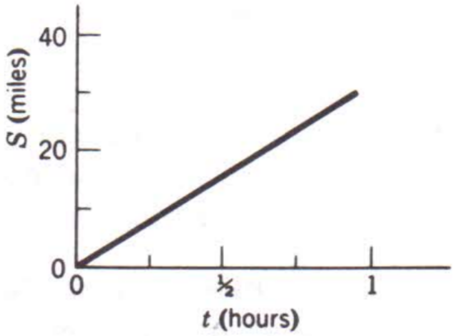


Positive slope	Negative slope	Positive slope	0 slope
$y = 2x - 5$	$y = -3x$	$p = q - 2$	$y = 4$
Figure 1	**Figure 2**	**Figure 3**	**Figure 4**

Vá para **33**.

33

Vejamos um exemplo de equação linear na qual a inclinação tem um significado familiar. O gráfico abaixo mostra a posição S, em uma estrada reta, de um carro em diferentes momentos. A posição $S = 0$ significa que o carro está no ponto de partida.



Tente encontrar a palavra correta para preencher a lacuna abaixo:

A inclinação da reta tem o mesmo valor que o/a ______________________ do carro.

Para ver a resposta correta, vá para **34**.

34

A inclinação da reta tem o mesmo valor que a *velocidade* do carro (ou a sua *rapidez*[7])

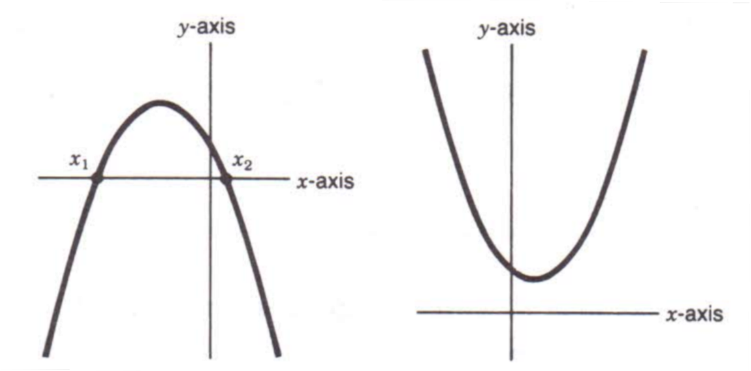
[7] N. do T.: No inglês, *velocity* pode significar a velocidade tanto no sentido popular, como no sentido de velocidade vetorial; já *speed* é sempre a velocidade tomada como valor absoluto. Alguns livros técnicos traduzem *velocity* por "velocidade" necessariamente como grandeza vetorial, e *speed* por "rapidez", sempre como grandeza escalar. Entretanto, no Brasil usamos "velocidade" para ambos os casos (às vezes dizendo explicitamente "velocidade vetorial" ou "velocidade escalar", "módulo da velocidade", quando houver risco de confusão). Há ainda a palavra *rapidity*, mas esse já é um termo técnico muito específico da Teoria da Relatividade, embora também possa ser traduzido por "rapidez". Até na Física e na Matemática, contexto é tudo.

A inclinação é dada pela razão entre a distância viajada e o tempo requerido. Porém, por definição, a velocidade é também a distância dividida pelo tempo. Assim, o valor da inclinação da reta é igual à velocidade.

Vá para **35**.

35

Vamos agora examinar um outro tipo de equação. Uma equação da forma $y = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes, é chamada de função *quadrática*, e o seu gráfico é chamado de *parábola*. Duas parábolas típicas estão mostradas na figura.



Vá para **36**.

36

Os valores de x em $y = 0$, indicados por x_1 e x_2 na figura da esquerda, na lição **35**, correspondem a valores de x que satisfazem a $ax^2 + bx + c = 0$, sendo chamados de *raízes* da equação. Nem todas as equações quadráticas têm raízes reais. (Por exemplo, a curva da direita representa uma equação sem nenhum valor real de x para quando $y = 0$.)

Ainda que você não vá precisar encontrar as raízes de nenhuma equação quadrática à frente, neste livro, você pode de qualquer maneira querer conhecer a fórmula. Caso queira ver uma discussão sobre ela, vá para **37**.

Senão, vá para **39**.
Resposta **31**: +,−,+,0.

37

A equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes, as quais são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Os índices 1 e 2 servem apenas para identificar as duas raízes. Eles podem ser omitidos, e as duas equações acima podem ser resumidas em

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Não vamos demonstrar esses resultados, embora eles possam ser verificados substituindo os valores de x na equação original.

Veja um problema prático de encontrar raízes: qual resposta fornece corretamente as raízes de $3x - 2x^2 = 1$?

(a) $\frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{17}\right)$; $\frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{17}\right)$

(b) -1; $-\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$

(d) 1; $\frac{1}{2}$

Circule a letra da alternativa correta.

$$[\, a \,|\, b \,|\, c \,|\, d \,]$$

Se acertou, vá para **39**.

Se errou, vá para **38**.

Resposta em **40**.

38

Aqui está a solução do problema da lição **37**. A equação $3x - 2x^2 = 1$ pode ser reescrita na forma canônica

$$2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Aqui, $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$.

$$x = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right] = \frac{1}{4}\left[-(-3) \pm \sqrt{3^2 - 4.2.1}\right] = \frac{1}{4}(3 \pm 1).$$

$$x_1 = \frac{1}{4}(3 + 1) = \frac{1}{4}.4 = 1.$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(3 - 1) = \frac{1}{4}.2 = \frac{1}{2}.$$

Vá para **39**.

39

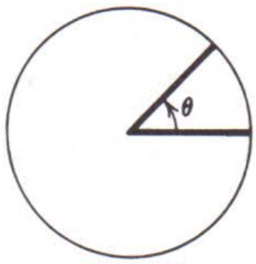
Isso encerra nossa breve discussão sobre as funções lineares e quadráticas. Talvez você queira um pouco mais de prática sobre esses tópicos antes de continuar. Se sim, experimente fazer os problemas de revisão 1 a 5 no final do livro. No Capítulo 4, há um sumário conciso da matéria que tivemos até agora, algo que você poderá achar útil.

Quanto estiver pronto, vá para **40**.

Trigonometria

40

A trigonometria envolve ângulos, por isso aqui vai uma rápida revisão das unidades que usamos para medir ângulos. Há duas importantes unidades: graus e radianos.



Graus: com frequência, ângulos são medidos em graus, com 360 graus (escreve-se 360°) correspondendo a uma revolução completa. [O grau é ainda subdividido em 60 minutos 60′, e o minuto subdividido em 60 segundos (60″). No entanto, aqui não vamos precisar de divisões tão finas.] Segue daí que um semicírculo contém 180°. Qual dos ângulos seguintes é igual ao ângulo θ (letra grega téta) indicado na figura?

[25° | 45° | 90° | 180°]

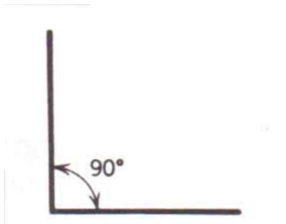
Se acertou, vá para **42**.
Senão, vá para **41**.

Resposta em **43**.

Resposta **37**: *d*.

41

Para encontrar o ângulo θ, olhemos primeiro para um exemplo parecido.

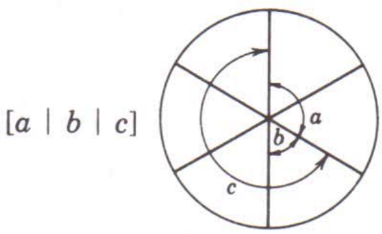


O ângulo indicado é um ângulo reto. Dado que há quatro ângulos retos em uma revolução completa, fica claro que esse ângulo dá

$$\frac{360°}{4} = 90°.$$

O ângulo θ mostrado na lição **40** é apenas metade do ângulo reto, portanto é de 45°.

Abaixo temos um círculo dividido por três linhas retas em segmentos iguais. Qual desses ângulos dá 240°?

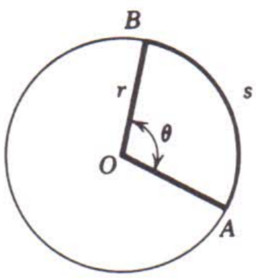


Vá para **42**.

Resposta em **43**.

42

A outra unidade de medida de ângulo, e a mais útil para o cálculo, é o *radiano*.



Para encontrar o valor de um ângulo em radianos, desenhamos um círculo de raio r em torno do vértice O desse ângulo, de modo a intersectar os lados do ângulo em dois pontos A e B, indicados na figura. O comprimento do arco entre A e B será designado por s. Assim,

$$\theta \text{ em radianos } = \frac{s}{r} = \frac{\text{comprimento do arco}}{\text{raio}}.$$

Para saber se você está acompanhando, responda a esta questão: o círculo tem 360°; quantos radianos ele tem?

$$[\,1\,|\,2\,|\,\pi\,|\,2\pi\,|\,360/\pi\,]$$

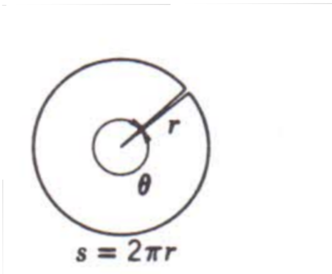
Se acertou, vá para **44**.

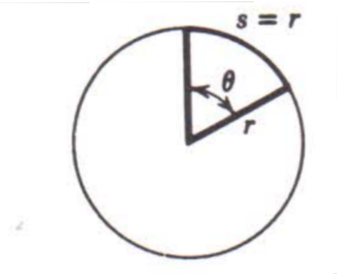
Senão, vá para **43**.

Resposta em **47**.

43

A circunferência de um círculo mede πd, onde d é o diâmetro, e r, o raio. O comprimento de um arco que envolve completamente um círculo é a circunferência, $2\pi r$, assim o ângulo descrito é de $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianos, como mostrado na figura da esquerda. Na figura da direita, o ângulo θ subentende um arco $s = r$. Circule a resposta que fornece θ.





$$\left[\ 1 \text{ rad} \ \middle|\ \frac{1}{4} \text{ rad} \ \middle|\ \frac{1}{2} \text{ rad} \ \middle|\ \pi \text{ rad} \ \middle|\ \text{nenhuma das anteriores}\ \right]$$

Vá para **44**.

Resposta **40**: 45°.

Resposta **41**: c.

44

Uma vez que as muitas das relações que vamos desenvolver à frente ficam muito mais simples quando os ângulos vêm medidos em radianos, vamos nos ater à regra que de *todos os ângulo serão dados em radianos, a menos que estejam marcados em graus.*

Às vezes, a palavra radiano virá escrita por extenso, às vezes abreviada como rad, mas no geral ela será completamente omitida. Assim: $\theta = 0,6$ significa 0,6 radianos; 27° significa 27 graus; $\frac{\pi}{3}$ rad significa $\frac{\pi}{3}$ radianos.

Vá para **45**.

45

Dado que 2π rad $= 360°$, a regra para converter ângulos de graus para radianos é

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi}.$$

Inversamente:

$$1^\circ = \frac{2\pi \text{ rad}}{360}.$$

Tente fazer os seguintes problemas (circule a resposta correta):

$60^\circ = \left[\, \frac{2\pi}{3} \,|\, \frac{\pi}{3} \,|\, \frac{\pi}{4} \,|\, \frac{\pi}{6} \,\right]$ rad

$\frac{\pi}{4} = \left[\, 22\frac{1}{2}^\circ \,|\, 45^\circ \,|\, 60^\circ \,|\, 90^\circ \,\right]$

Que ângulo é mais próximo de 1 rad? (Lembre-se que $\pi = 3,14....$)

$$[\, 30^\circ \,|\, 45^\circ \,|\, 60^\circ \,|\, 90^\circ \,]$$

Se acertou, vá para **47**.

Se cometeu algum erro, vá para **46**.

Resposta em **47**.

46

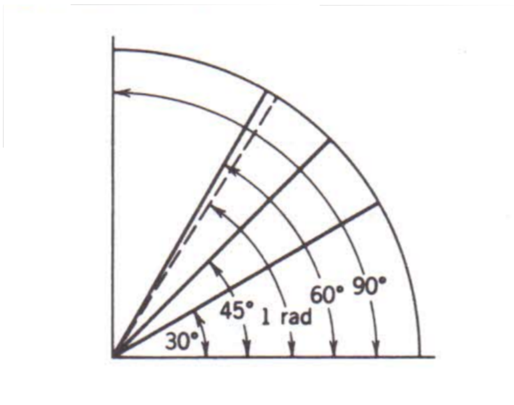
Aqui estão as soluções para os problemas da lição **45**. A partir das fórmulas na lição **45**, obtém-se

$$60^\circ = 60 \times \frac{2\pi \text{ rad}}{360} = \frac{2\pi \text{ rad}}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \times \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ.$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi}.$$

Como 2π é ligeiramente maior que 6, 1 rad é ligeiramente menos que $360^\circ/6 = 60^\circ$. (Uma aproximação melhor do radiano é de $57^\circ 18'$.) A figura abaixo mostra todos os ângulos desta questão.

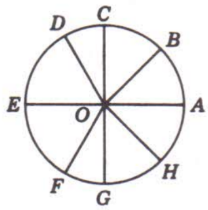


Vá para **47**.

47

No círculo exibido, CG é perpendicular a AE e

$$\text{arc } AB = \text{arc } BC = \text{arc } AH,$$
$$\text{arc } AD = \text{arc } DF = \text{arc } FA.$$



(Arco AB indica o comprimento do arco ao longo do círculo entre A e B, indo pelo caminho mais curto.)

Vamos denotar ângulos por três letras. Por exemplo, $\angle AOB$ (lê-se como "ângulo AOB") denota o ângulo entre OA e OB. Faça os seguintes testes:

$\angle AOD = [\,60° \,|\, 90° \,|\, 120° \,|\, 150° \,|\, 180°\,]$

$\angle FOH = [\,15° \,|\, 30° \,|\, 45° \,|\, 60° \,|\, 90 \text{ graus}\,]$

$\angle HOB = [\,1/4 \,|\, 1 \,|\, \pi/2 \,|\, \pi/4 \,|\, \pi/8\,]$

Se você acertou tudo, vá para **49**.
Se você cometeu algum erro, vá para **48**.

Resposta em **50**.

Resposta de **42**: 2π

Resposta de **43**: 1 rad

Resposta de **45**: $\pi/3$, 45 graus, 60°.

48

Dado que arco $AD =$ arco $DF =$ arco FA, e visto que a soma dos ângulos desses arcos é 360°, $\angle AOD = 360°/3 = 120°$.

$$\angle FOA = 120°, \quad \angle GOA = 90°, \quad \angle GOH = 45°.$$

Assim

$$\angle FOH = \angle FOG + \angle GOH = 30° + 45° = 75°$$

$$\angle HOB = \angle HOA + \angle AOB = 45° + 45° = 90°$$

Agora tente fazer o seguinte:

$90° = [\,2\pi \,|\, \pi/6 \,|\, \pi/2 \,|\, \pi/8 \,|\, 1/4\,]$

$3\pi = [\,240° \,|\, 360° \,|\, 540° \,|\, 720°\,]$

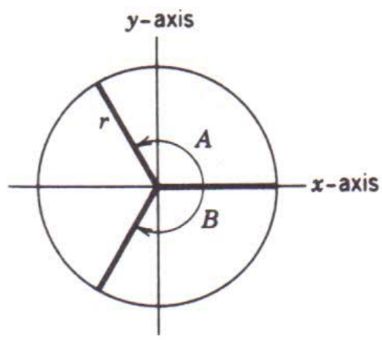
$\pi/6 = [\,15° \,|\, 30° \,|\, 45° \,|\, 60° \,|\, 90° \,|\, 120°\,]$

Vá para **49**.
Resposta em **50**.

49

Uma rotação pode ser em sentido horário ou anti-horário. Podemos indicar qual sentido é pretendido escolhendo uma convenção para o sinal do ângulo. Um ângulo formado por uma rotação em sentido anti-horário será positivo; um ângulo formado por uma rotação em sentido horário será negativo.

Abaixo há um círculo de raio r desenhado com os eixos x e y, como indicado:

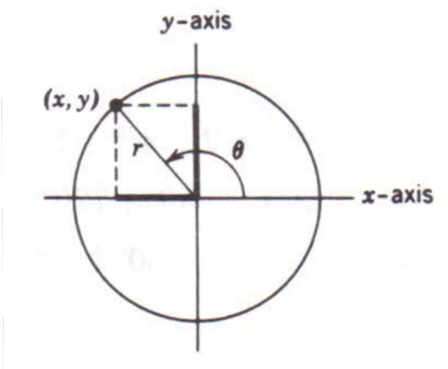


Escolheremos a parte positiva do eixo x como o lado inicial e, para os propósitos desta seção, mediremos os ângulos a partir do lado inicial, até o lado final ou terminal. Por exemplo, conforme mostrado na figura, o ângulo A é positivo, e B é negativo.

Vá para **50**.

50

Nosso próximo passo é revisar as funções trigonométricas. Um dos usos dessas funções é relacionar os lados dos triângulos, em especial dos triângulos retângulos, com os seus ângulos.



Voltaremos a essa aplicação em breve. De toda maneira, as funções trigonométricas podem ser definidas de um modo mais geral e mais útil.

Você conhece a definição geral das funções trigonométricas de um ângulo θ? Se conhece, teste-se com o *quiz* abaixo. Se não conhece, vá direto para a lição **51**.

As funções trigonométricas de θ podem ser expressas em termos das coordenadas x e y e do raio do círculo, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Isso tudo está indicado na figura. Tente preencher as lacunas (as respostas estão na lição **51**):

$\sin\theta =$ _______ $\qquad \cot\theta =$ _______

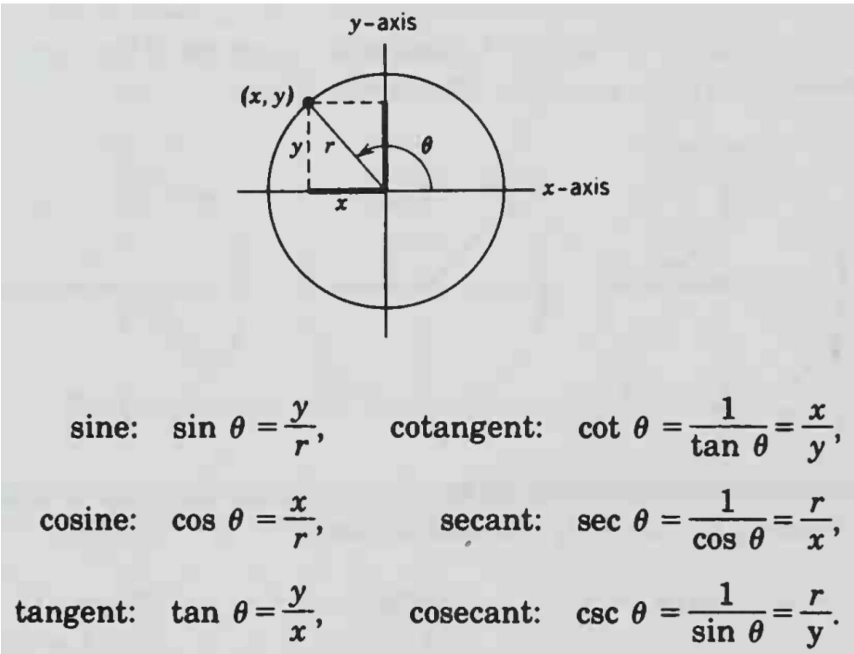
$\cos\theta =$ _______ $\qquad \sec\theta =$ _______

$\tan\theta =$ _______ $\qquad \csc\theta =$ _______

Vá para **51** para verificar suas respostas.

51

Aqui estão as definições de funções trigonométricas



Note que as três ultimas são meramente reciprocas das três primeiras. Para o ângulo mostrado na figura x é negativo e y é positivo ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é sempre positivo) de tal forma que $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$ e $\sec\theta$ são negativos.

Após ter estudado esses vá para a lição **52**.

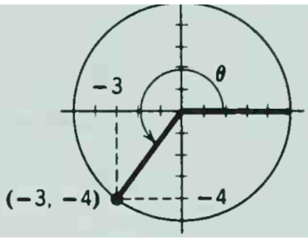
52

Abaixo pode-se ver um circulo de raio 5. O ponto mostrado é $(-3, -4)$. Se baseando na definição da lição anterior, você deve ser capaz de selecionar a opção correta:

$\sin\theta = [3/5 \mid 5/3 \mid 3/4 \mid -4/5 \mid -3/5 \mid 4/3]$

$\cos\theta = [3/5 \mid 5/3 \mid 3/4 \mid -4/5 \mid -3/5 \mid 4/3]$

$\tan\theta = [3/5 \mid 5/3 \mid 3/4 \mid -4/5 \mid -3/5 \mid 4/3]$

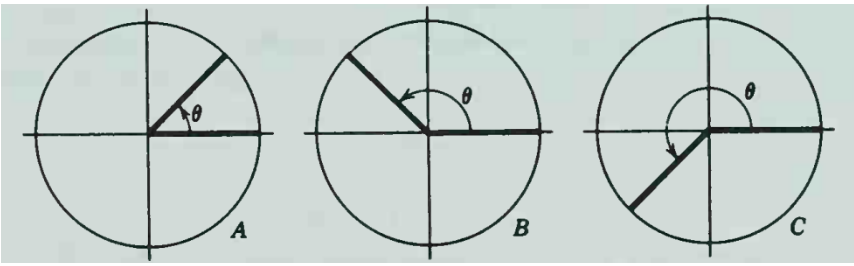


Se acertou todas, vá para a lição **55**.[8]

Caso contrário, vá para **53**.

53

Talvez você tenha tido dificuldade porque você não se deu conta que x e y tem sinais distintos em quadrantes diferentes (quartos do ciclo trigonométrico), ao passo que r, um raio, é sempre positivo. Tente isto.



Indique se a função requerida é positiva ou negativa, para cada uma das figuras, marcando as caixas corretamente.

	Figure *A*		Figure *B*		Figure *C*	
	+	−	+	−	+	−
sin θ						
cos θ						
tan θ						

Veja a lição **54** para as respostas corretas.

54

Veja aqui as soluções da lição **53**.

[8]Respostas: -4/5, -3/5, 4/3

	Figure A +	Figure A −	Figure B +	Figure B −	Figure C +	Figure C −
sin θ	√		√			√
cos θ	√			√		√
tan θ	√			√	√	

Vá para a lição **55**.

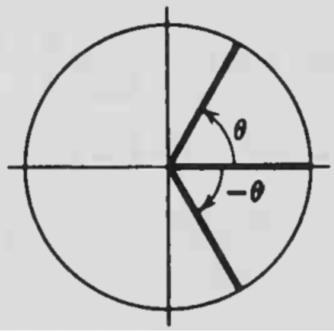
55

Na figura, ambos θ e $-\theta$ estão sinalizados. A relação entre as funções trigonométricas desses angulos é bem simples. Você consegue resolver esses problemas? Assinale a resposta correta.

$\sin(-\theta) = [+ \mid -] \sin\theta$

$\cos(-\theta) = [+ \mid -] \cos\theta$

$\tan(-\theta) = [+ \mid -] \tan\theta$

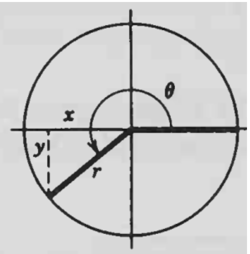


Vá para a lição **56**.[9]

56

Há muitas relações entre as funções trigonométricas. A exemplo de

$$\sin^2\theta = \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^2} = 1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 - \cos^2\theta.$$



Tente esses:

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = [\sec^2\theta \mid 1 \mid \tan^2\theta \mid \cot^2\theta]$
2. $1 + \tan^2\theta = [1 \mid \tan^2\theta \mid \cot^2\theta \mid \sec^2\theta]$
3. $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \left[1 - 2\cos^2\theta \mid 1 - 2\sin^2\theta \mid \cot^2\theta \mid 1\right]$

---

[9] Respostas: -, +, -

Se errou alguma, vá para a lição **57**.[10]

Caso contrário, vá para **58**.

57

Aqui estão as soluções para os problemas na lição **56**.

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$

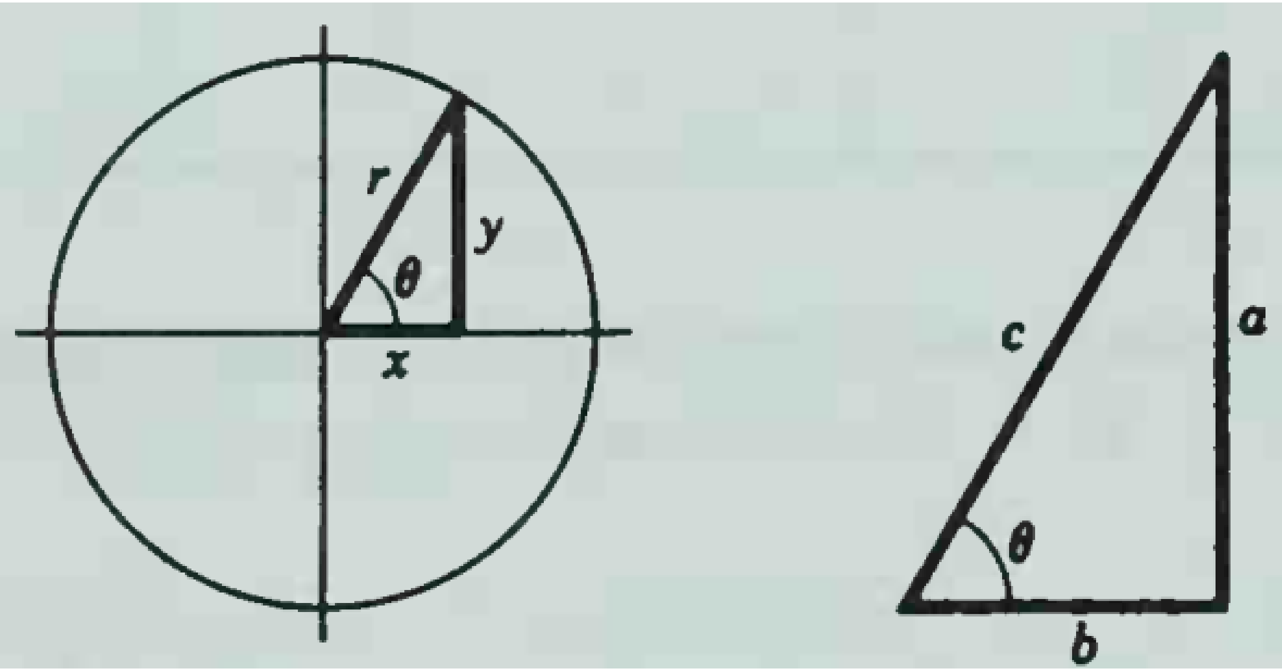
   Essa é uma identidade importante que vale a pena ser memorizada. As outras soluções são

2. $1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta.$

3. $\sin^2\theta - \cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta = 1 - 2\cos\theta.$

Vá para lição **58**.

58



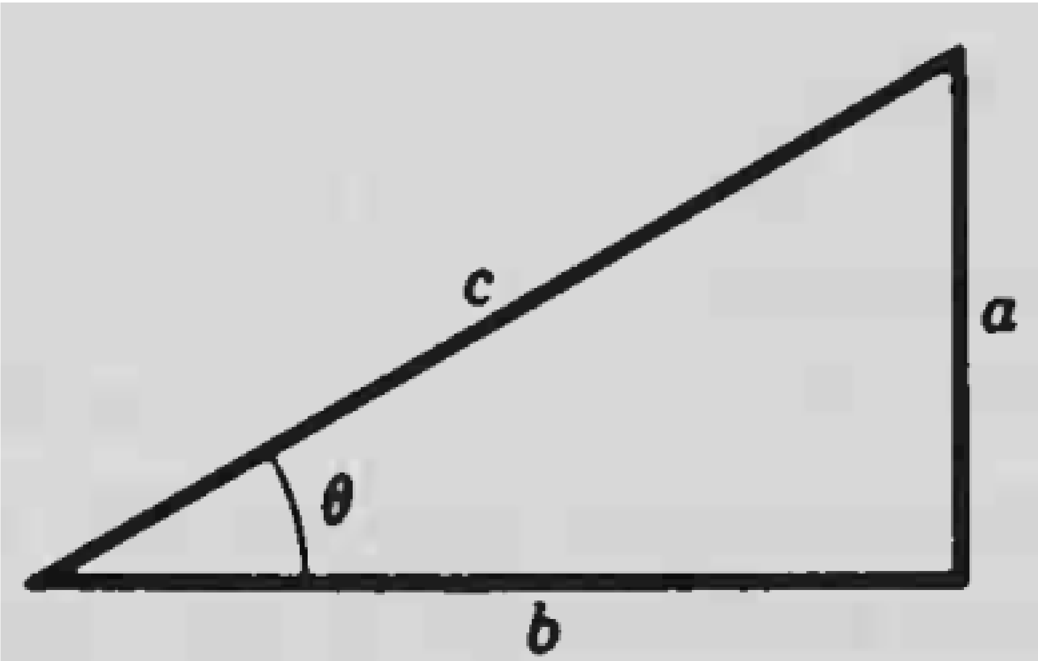
As funções trigonométricas são particularmente úteis quando aplicadas a triângulos retos (com um ângulo de 90° ou ângulo reto). Nesse caso θ é sempre agudo (menos de 90° ou $\pi/2$). Você pode então escrever as funções trigonométricas em função dos lados a, b do triângulo mostrado e sua hipotenusa c. Preencha os espaços

[10] 1, $\sec^2\theta$, $1 - 2\cos^2\theta$

$\sin\theta$ = __________	$\cot\theta$ = __________
$\cos\theta$ = __________	$\sec\theta$ = __________
$\tan\theta$ = __________	$\csc\theta$ = __________

Verifique suas respostas na lição **59**.

59



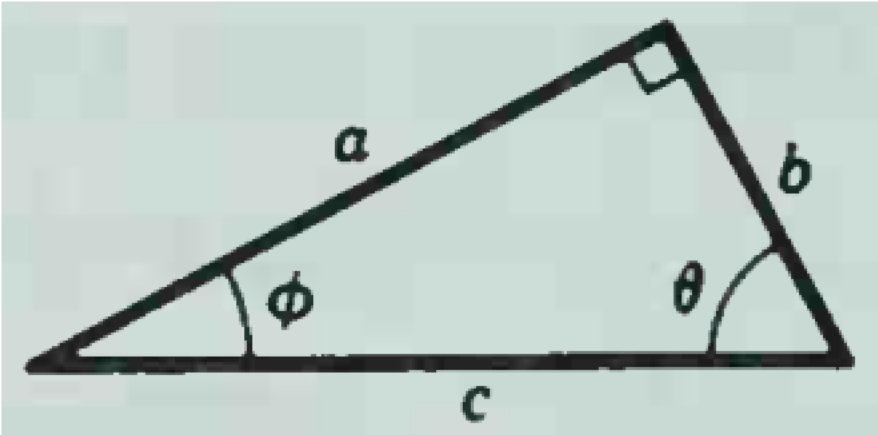
As respostas são:

$$\sin\theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{lado oposto}}{\text{hipotenusa}}, \qquad \cot\theta = \frac{b}{a} = \frac{\text{lado adjacente}}{\text{lado oposto}}$$
$$\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{lado adjacente}}{\text{hipotenusa}}, \qquad \sec\theta = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adjacente}}$$
$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{lado oposto}}{\text{lado adjacente}}, \qquad \csc\theta = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado oposto}}$$

Esses resultados seguem das definições na lição **51**, desde que se corresponda a, b e c com y, x e r, respectivamente. (Lembre-se que θ é menor que 90°.) Se você não esta familiarizado com os termos “lado adjacente”, “lado oposto” e “hipotenusa”, eles devem estar evidentes pela figura.

Vá para a lição **60**.

60



Os problemas a seguir se referem à figura mostrada. (ϕ é a letra grega "phi". O simbolo entre os lados a e b indica um ângulo reto.)

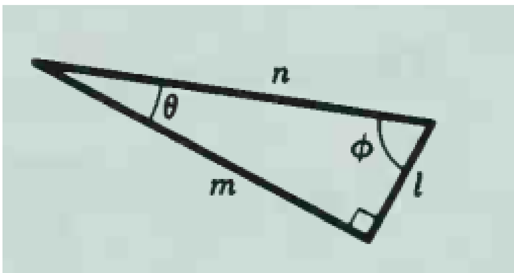
$$\cos\theta = [b/c \mid a/c \mid c/a \mid c/b \mid b/a \mid a/b]$$
$$\tan\theta = [b/c \mid a/c \mid c/a \mid c/b \mid b/a \mid a/b]$$

Se acertou todas, vá para a lição 62.[11]

Caso contrário, vá para **61**.

61

Você talvez tenha ficado confuso por causa do triângulo estar desenhado em uma posição diferente. Reveja as definições em **51**, e depois faça o problema a seguir:



$$\sin\theta = [l/n \mid n/l \mid m/n \mid m/l \mid n/m \mid l/m]$$

$$\tan\phi = [l/n \mid n/l \mid m/n \mid m/l \mid n/m \mid l/m]$$

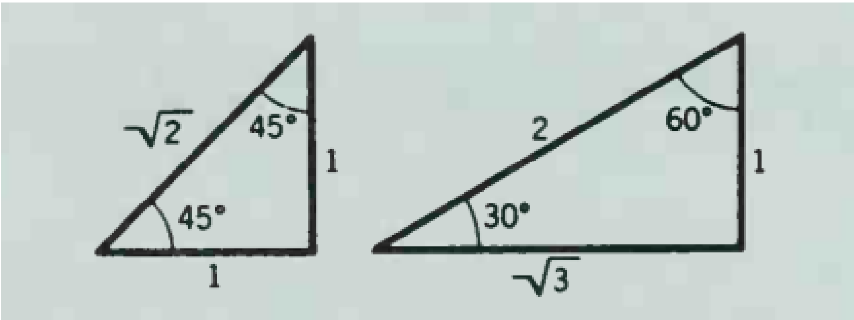
Se você errar qualquer um dos dois problemas, recomendo que gaste mais tempo aprendendo e memorizando as definições.

[11] Respostas: b/c, a/b

Enquanto isso, vá para **62**.

62

É muito útil estar familiarizado com as funções trigonométricas dos ângulos 30°, 45° e 60°. Os triângulos com esses ângulos são bem simples:



Agora, tente resolver esses problemas:

$$\cos 45° = [1/2 \mid 1/\sqrt{2} \mid 2\sqrt{2} \mid 2]$$

$$\sin 30° = [3 \mid \sqrt{3/2} \mid 2/3 \mid 1/2\ ]$$

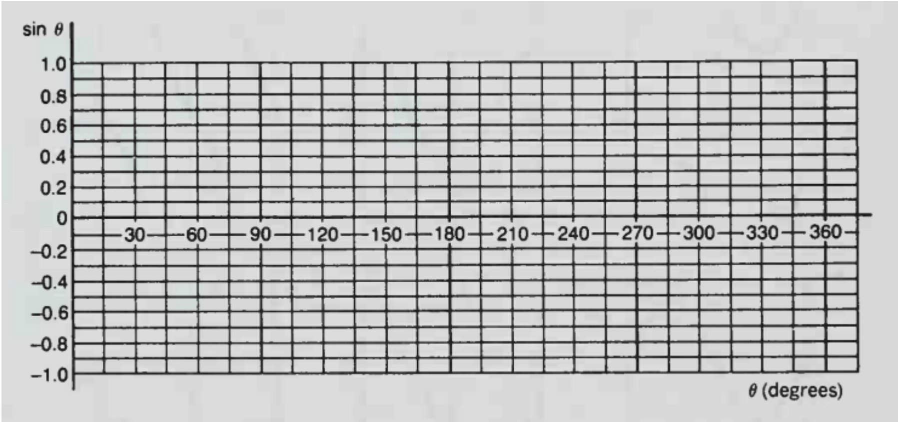
$$\sin 45° = [1/2 \mid 1/\sqrt{2} \mid \sqrt{2/2} \mid 2]$$

$$\tan 30° = [1 \mid \sqrt{3} \mid 1/\sqrt{3} \mid 2]$$

Certifique-se que você realmente entendeu esses problemas. Em seguida vá para **63**.

63

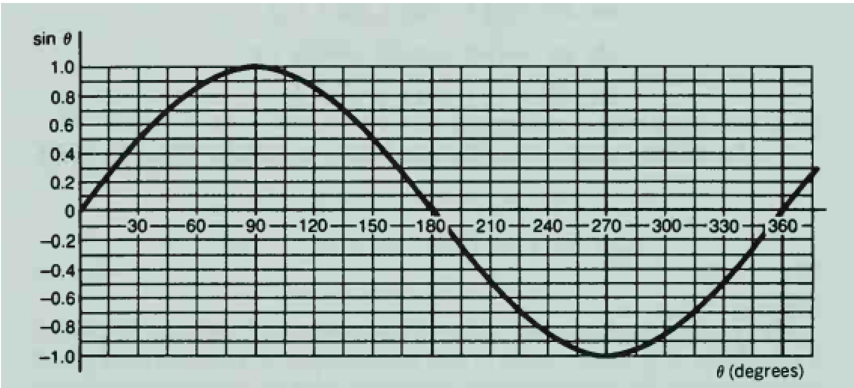
Muitas calculadoras apresentam funções trigonométricas. Com tais calculadoras, é bem simples de desenhar pontos o suficiente para fazer um bom gráfico dessas funções. Se você tiver uma calculadora assim, desenhe $\sin\theta$ para valores entre 0° e 360° no plano cartesiano abaixo, e então compare seu resultado com a imagem em **64**. Se você não tiver uma calculadora adequada, vá direto para **64** e verifique que a função $\sin\theta$ apresenta os valores corretos para os ângulos que você conhece.



Vá para **64**.

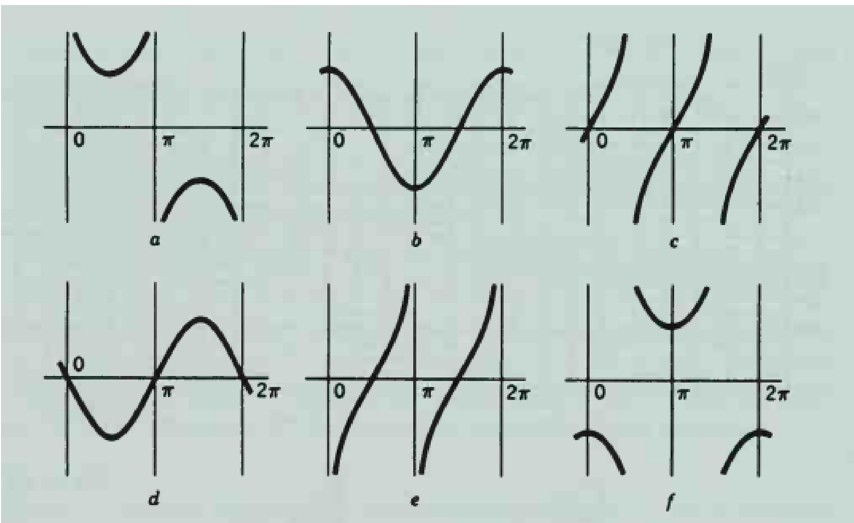
64

Aqui está o gráfico da função seno:



Vá para **65**.

65



Tente descobrir qual gráfico representa qual função abaixo:

$$\cos\theta : [a \mid b \mid c \mid d \mid e \mid f \mid \text{nenhuma das alternativas}]$$

$$\tan\theta : [a \mid b \mid c \mid d \mid e \mid f \mid \text{nenhuma das alternativas}]$$

$$\sin(-\theta) : [a \mid b \mid c \mid d \mid e \mid f \mid \text{nenhuma das alternativas}]$$

$$\tan(-\theta) : [a \mid b \mid c \mid d \mid e \mid f \mid \text{nenhuma das alternativas}]$$

Se você acertou todas, vá para **67**.
Caso contrário, vá para **66**.

66

Saber alguns valores das funções trigonométricas em pontos importantes ajuda a identificar tais funções. Tente esses (∞ é o símbolo para infinito):

$$\sin 0° = [0 \mid 1 \mid -1 \mid -\infty \mid \infty]$$

$$\cos 90° = [0 \mid 1 \mid -1 \mid -\infty \mid \infty]$$

$$\tan 45° = [0 \mid 1 \mid -1 \mid -\infty \mid \infty]$$

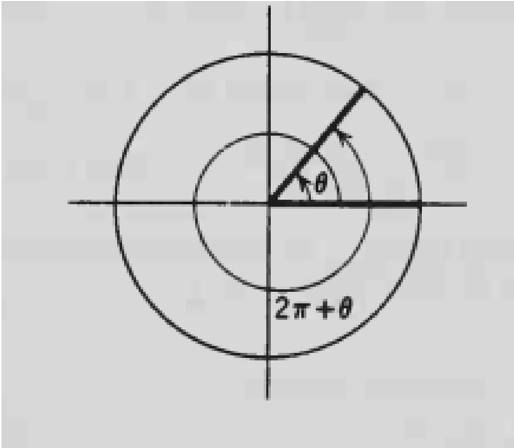
$$\sin 30° = [1 \mid 1/2 \mid \sqrt{3} \mid \sqrt{3}/2]$$

$$\cos 60° = [1 \mid 1/2 \mid \sqrt{3} \mid \sqrt{3}/2]$$

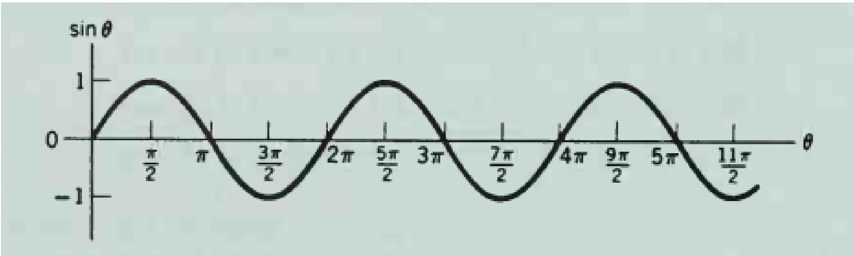
Vá para **67**.

67

Pelo fato de que o ângulo $\theta + 2\pi$ seja equivalente ao ângulo θ (pelo menos no que se refere as funções trigonométricas), podemos adicionar 2π a qualquer ângulo sem mudar o valor das funções trigonométricas. Assim, as funções seno e cosseno repetem seus valores sempre que θ aumenta em 2π; nós dizemos que as funções são *periódicas* em θ com período 2π ou período $360°$.



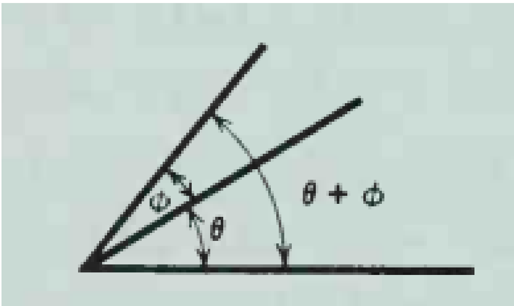
Utilizando essa propriedade, você pode expandir o gráfico da função $\sin\theta$ na lição **64** da seguinte forma. (Para variar um pouco, os ângulos aqui são em radianos.)



Vá para **68**.

68

É útil saber o seno e cosseno da soma e diferença de dois ângulos quaisquer.



Você se lembra das fórmulas, de suas antigas aulas de trigonometria? Se não, vá direto para **69**. Se sim, tente escrevê-las abaixo:

$$\sin(\theta + \phi) = \underline{\hspace{6cm}}.$$
$$\cos(\theta + \phi) = \underline{\hspace{6cm}}.$$

Vá para **69** e veja as respostas corretas.

69

Aqui estão as fórmulas. Elas são deduzidas no Apêndice A1.

$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi,$$
$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi.$$

[Note que $\tan(\theta + \phi)$ e $\cot(\theta + \phi)$ podem ser obtidos através dessas fórmulas e da relação $\tan\theta = (\sin\theta)/(\cos\theta)$.]

Usando as relações já conhecidas, circule o sinal correto em cada uma das fórmulas a seguir:

(a) $\sin(\theta - \phi) = [+ \mid -]\ \sin\theta\cos\phi\ [+ \mid -]\ \cos\theta\sin\phi$

(b) $\cos(\theta - \phi) = [+ \mid -]\ \cos\theta\cos\phi\ [+ \mid -]\ \sin\theta\sin\phi$

Se você acertou as duas, vá para **71**.

Caso contrário, vá para **70**.

70

Se você cometeu erros na lição **69**, você deve recordar da lição **55** que:

$$\sin(-\phi) = -\sin(\phi)$$
$$\cos(-\phi) = +\cos(\phi)$$

Então:

$$\begin{aligned}\sin(\theta - \phi) &= \sin\theta\cos(-\phi) + \cos\theta\sin(-\phi)\\ &= \sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\\ \cos(\theta - \phi) &= \cos\theta\cos(-\phi) - \sin\theta\sin(-\phi)\\ &= \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\end{aligned}$$

Vá para **71**.

71

Utilizando a expressão para $\sin(\theta + \phi)$ e $\cos(\theta + \phi)$, pode-se obter as fórmulas para $\sin 2\theta$ e $\cos 2\theta$. Simplesmente fazendo $\theta = \phi$. Preencha as lacunas.

$$\sin 2\theta = \underline{\hspace{3cm}}$$
$$\cos 2\theta = \underline{\hspace{3cm}}$$

Veja **72** para as respostas corretas.

72

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1\end{aligned}$$

[Note, por convenção, $(\sin\theta)^2$ é normalmente escrito como $\sin^2\theta$, e $(\cos\theta)^2$ é normalmente escrito como $\cos^2\theta$.]

Vá para **73**.

73

É comumente útil e conveniente usar *função trigonométrica inversa*, que é o valor do ângulo para o qual a função trigonométrica tem um valor especificado. O seno inverso de x é denotado por $\sin^{-1} x$. (Cuidado: Esta notação é padrão, mas pode ser confusa. $\sin^{-1} x$ sempre representa o seno inverso de x, não $1/\sin x$. Este seria escrito como $(\sin x)^{-1}$. Uma notação mais antiga para $\sin^{-1} x$ é $\arcsin x$.)

Por exemplo, como o seno de 30° é 1/2, $\sin^{-1} 1/2 = 30°$. Note, no entanto, que o seno de 150° é também 1/2. Além disso, as funções trigonométricas são periódicas: há uma sequência sem fim de ângulos (todos diferindo por 360°) que possuem o mesmo valor de seno, cosseno, etc.

Como a definição de função (lição **6**) especifica a atribuição de um e apenas um valor de *f(x)* para cada valor de x, a imagem da função trigonométrica inversa deve ser devidamente restrita.

As funções inversas são definidas por

$y = \sin^{-1} x$	Domínio: $-1 < x < +1$	Imagem: $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$
$y = \cos^{-1} x$	Domínio: $-1 < x < +1$	Imagem: $0 < y < +\pi$
$y = \tan^{-1} x$	Domínio: $-\infty < x < +\infty$	Imagem: $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$

Vá para **74** [12]

74

Tente estes problemas:

(a) $\sin^{-1}(1/\sqrt{2}) = [\ 30° \mid 60° \mid \pi/4 \mid \pi/2]$

(b) $\tan^{-1} 1 = [\ \pi/6 \mid \pi/4 \mid \pi/3 \mid \pi]$

(c) $\cos^{-1}(1/2) = [\ \pi/6 \mid \pi/4 \mid \pi/3 \mid \pi]$

Se você tem uma calculadora com funções trigonométricas inversas, tente os seguintes:

(d) $\sin^{-1} 0.8 = [\ 46.9 \mid 28.2 \mid 53.1 \mid 67.2\ ]$

(e) $\tan^{-1} 12 = [\ 0.82 \mid 1.49 \mid 1.62 \mid 1.83\ ]$

(f) $\cos^{-1} 0.05 = [\ 4.3 \mid 12.6 \mid 77.2 \mid 87.1\ ]$

Verifique suas respostas, e então siga para a próxima seção, que é a última nas nossas revisões.

Vá para **75**.

Exponenciais e logaritmos

75

Você já está familiarizado com exponenciais? Se não, vá para **76**. Se está, tente estes breves desafios.

$$\begin{aligned}
a^5 &= [\ 5^a \mid 5\log a \mid a\log 5 \mid \text{nenhuma das alternativas}\ ]\\
a^{b+c} &= [\ a^b \times a^c \mid a^b + a^c \mid ca^b \mid (b+c)\log a\ ]\\
a^f/a^g &= [\ (f-g)\log a \mid a^{f/g} \mid a^{f-g} \mid \text{nenhuma das alternativas}\ ]\\
a^0 &= [\ 0 \mid 1 \mid a \mid \text{nenhuma das alternativas}\ ]\\
(a^b)^c &= [\ a^b \times a^c \mid a^{b+c} \mid a^b c \mid \text{nenhuma das alternativas}\ ]
\end{aligned}$$

Se errou alguma, vá para **76**.

Caso contrário, vá para **77**.

76

[12]**Respostas:(69a)**+,-;(**69b**)+,+

Por definição a^m, onde m é um inteiro positivo, é o produto de m fatores de a. Então,

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \qquad \text{and} \qquad 10^2 = 10 \times 10 = 100.$$

Além disso, por definição $a^{-m} = 1/a^m$. É fácil ver, então, que

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= a^{m+n}, \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}, \\ a^0 &= \frac{a^m}{a^m} = 1 \qquad (m \text{ pode ser qualquer inteiro}), \\ (a^m)^n &= a^{mn}, \\ (ab)^m &= a^m b^m. \end{aligned}$$

Note que a^{m+n} é calculado como $a^{(m+n)}$; a expressão na exponencial é sempre calculada antes de qualquer outra operação ser executada.

Se você não tentou os desafios na lição **75**, vá para **75**. Caso contrário,

Vá para **77**.

77

Aqui há alguns problemas:

$$\begin{aligned} 3^2 &= [\ 6 \mid 8 \mid 9 \mid \text{nenhuma das alternativas}\ ] \\ 1^3 &= [\ 1 \mid 3 \mid \frac{1}{3} \mid \text{nenhuma das alternativas}\ ] \\ 2^{-3} &= [\ -6 \mid \frac{1}{8} \mid -9 \mid \text{nenhuma das alternativas}\ ] \\ \frac{4^3}{4^5} &= [\ 4^8 \mid 4^{-8} \mid 16^{-1} \mid \text{nenhuma das alternativas}\ ] \end{aligned}$$

Se acertou todas, vá para **79**.

Se errou alguma, vá para **78**.

13

78

---

[13] **Respostas:(74)**(a)$\pi/4$, (b)$\pi/4$, (c)$\pi/3$, (d) 53.1°, (e)1.49, (f) 87.1°;
(**75**) Nenhuma das alternativas, $a^b \times a^c$, a^{f-g}, 1, a^{bc}

Abaixo estão as soluções do problema **77**. Volte para as regras em **76** se você tiver problema entendendo a solução.

$$\begin{aligned} 3^2 &= 3 \times 3 = 9, \\ 1^3 &= 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad 1^m = 1 \text{ para qualquer m}, \\ 2^{-3} &= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \\ \frac{4^3}{4^5} &= 4^{3-5} = 4^{-2} = \frac{1}{16} = 16^{-1}. \end{aligned}$$

Agora tente estes:

$$\begin{aligned} (3^{-3})^3 &= [\ 1 \mid 3^{-9} \mid 3^{-27} \mid \text{nenhuma das alternativas}\ ] \\ \frac{5^2}{3^2} &= [\ \left(\frac{5}{3}\right)^2 \mid \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} \mid 5^{-6} \mid \text{nenhuma das alternativas}\ ] \\ 4^3 &= [\ 12 \mid 16 \mid 2^6 \mid \text{nenhuma das alternativas}\ ] \end{aligned}$$

Verifique suas respostas e tente procurar quaisquer erros.

Então vá para **79**.

79

Aqui estão mais alguns problemas.

$$\begin{aligned} 10^0 &= [\ 0 \mid 1 \mid 10\ ] \\ 10^{-1} &= [\ -1 \mid 1 \mid 0.1\ ] \\ 0.00003 &= [\ \frac{1}{3} \times 10^{-3} \mid 10^{-3} \mid 3 \times 10^{-5}\ ] \\ 0.4 \times 10^{-4} &= [\ 4 \times 10^{-5} \mid 4 \times 10^{-3} \mid 2.5 \times 10^{-5}\ ] \\ \frac{3 \times 10^{-7}}{6 \times 10^{-3}} &= [\ \frac{1}{2} \times 10^{10} \mid 5 \times 10^4 \mid 0.5 \times 10^{-4}\ ] \end{aligned}$$

Se estiverem todas corretas, vá para **81**.

Se cometeu algum erro, vá para **80**.

80

Aqui estão as soluções dos problemas **79**:

$$
\begin{aligned}
10^0 &= \frac{10}{10} = 1, \\
10^{-1} &= \frac{1}{10} = 0.1, \\
0.00003 &= 0.00001 \times 3 = 3 \times 10^{-5}, \\
0.4 \times 10^{-4} &= (4 \times 10^{-1}) \times 10^{-4} = 4 \times 10^{-5} \\
\frac{3 \times 10^{-7}}{6 \times 10^{-3}} &= \frac{3}{6} \times \frac{10^{-7}}{10^{-3}} = \frac{1}{2} \times 10^{-7+3} = 0.5 \times 10^{-4}.
\end{aligned}
$$

Vá para **81**.

81

Vamos brevemente rever as regras dos expoentes fracionários. Se $b^n = a$, então b é chamado de $n-$ésima raiz de a, e escrevemos $b = a^{1/n}$. Por isso que $16^{1/4} = (\textit{raiz quarta de 16}) = 2$. Isto é, $2^4 = 16$.

Se $y = a^{m/n}$, onde m e n são inteiros, então $y = (a^{1/n})^m$. Por exemplo:

$$8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4 \tag{1.1}$$

Tente isto:

$$
\begin{aligned}
27^{-2/3} &= [\ 1/18 \mid 1/81 \mid 1/9 \mid -18 \mid \textit{nenhum destes}\ ] \\
16^{3/4} &= [\ 12 \mid 8 \mid 6 \mid 64\ ]
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Se você acertou, vá para a lição **84**.
Se errou, prossiga para a lição **82**.

82

$$
\begin{aligned}
27^{-2/3} &= (27^{1/7})^{-2} = 3^{-2} = 1/9 \\
16^{3/4} &= (16^{1/4})^3 = 2^3 = 8
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Resposta: **(77)** $9, 1, 1/8, 16^{-1}$
(78) $3^{-9}, (5/3)^2, 2^6$

(79) 1, 0.1, 3×10^{-5}, 4×10^{-5}, 0.5×10^{-4}.

Faça estes problemas:

$$25^{3/2} = [125 \mid 5 \mid 15 \mid \textit{nenhum destes}\ ] \tag{1.4}$$
$$(0.00001)^{-3/5} = [0.001 \mid 1000 \mid 10^{-15} \mid 10^{-25}]$$

Se você respondeu corretamente, vá para a lição **84**.
Caso contrário, prossiga para lição **83**.

83

Existem as soluções para os problemas da lição **82**:

$$25^{3/2} = (25^{1/2})^3 = 5^3 = 125 \tag{1.5}$$
$$(0.00001)^{-3/5} = (10^{-5})^{-3/5} = 10^{15/5} = 10^3 = 1000 \tag{1.6}$$

Aqui estão mais alguns problemas. Circule a resposta correta.

$$(27/64 \times 10^{-6})^{1/3} = [3/400 \mid 3/16 \times 10^{-2} \mid 9/64 \times 10^{-4}\ ] \tag{1.7}$$
$$(49 \times 10^{-4})^{1/4} = [\sqrt{7}/10 \mid (10 \times 7)^{-2} \mid \sqrt{7}/1000\ ]$$

Vá para a lição **84** após checar suas respostas.

84

Embora nossa definição original de a^m é aplicada somente para valores inteiros de m, nós também podemos definir $(a^m)^{1/n} = a^{m/n}$, onde ambos m e n são inteiros. Então nós temos um significado para a^p, onde p é ou um número inteiro ou uma fração (razão de dois números inteiros).

Nós ainda não sabemos como calcular a^p se p é um número irracional, tal como π ou $\sqrt{2}$. Entretanto, nós podemos aproximar um número irracional tão proximamente quanto se queira por uma fração. Por exemplo, π é aproximadamente 31416/10000. Isto está na forma m/n, onde m e n são inteiros, e nós sabemos como calcular isto. Portanto, $y = a^x$, onde x é qualquer número real, é uma expressão bem definida no sentido de que nós podemos calcula-la com a precisão que desejarmos. (Um tratamento mais rigoroso dos expoentes irracionais pode ser baseado nas propriedades dos logaritmos.)

Tente resolver o seguinte problema:

$$\frac{a^\pi a^x}{a^3} = [a^{\pi x/3} \mid a^{\pi+x-3} \mid a^{3\pi x} \mid a^{(\pi+x)/3}\,] \tag{1.8}$$

Se você acertou, vá para a lição **86**.

Se errou, vá para a lição **85**.

85

As regras fornecidas na lição **76** aplicam-se aqui como se todos os expoentes fossem inteiros. Por isso:

$$\frac{a^\pi a^x}{a^3} = a^{\pi+x-3} \tag{1.9}$$

Aqui é outro problema:

$$\pi^2 \times 2^\pi = [1 \mid (2\pi)^{2\pi} \mid 2\pi^{2+\pi} \mid \text{ nenhum destes }] \tag{1.10}$$

Se você acertou, vá para a lição **87**.

Se errou, prossiga para a lição **86**.

86

$\pi^2 \times 2^\pi$ é o produto de dois números distintos para dois expoentes diferentes. Nenhuma das nossas regras se aplicam para isto e, de fato, não há modo de simplificar esta expressão.

Agora, vá para a lição **87**.

87

Se você não se lembra claramente dos logaritmos, vá para a seção **88**. Se você se lembre, tente o seguinte teste.

Suponha que x é qualquer número positivo, e deixe $\log(x)$ representar o logaritmo de x na base 10. Então responda:

$$10^{\log(x)} = \underline{\qquad\qquad\qquad} \,. \tag{1.11}$$

Vá para a lição **88** para visualizar a resposta correta.

Respostas: (81) $1/9$, 8 **(82)** $125, 1000$ **(83)** $3/400, \sqrt{7}/10$ **(84)** $a^{\pi+x-3}$.

88

A resposta para a lição **87** é x; de fato nós iremos tomar o logaritmo de x na base 10 como definido por:

$$10^{\log(x)} = x \tag{1.12}$$

Ou seja, o logaritmo de um número x é a potência para o qual o 10 deve ser elevado de tal forma que o resultado seja o próprio número x. Esta definição é aplicada somente para $x > 0$. Aqui estão dois exemplos:

$$100 = 10^2,\ \text{então:}\ \log(100) = 2 \tag{1.13}$$

$$0.001 = 10^{-3},\ \text{então:}\ \log(0.001) = -3 \tag{1.14}$$

Agora tente estes problemas:

$$\log(1000000) = [1000000 \mid 6 \mid 60 \mid 600] \tag{1.15}$$

$$\log(1) = [0 \mid 1 \mid 10 \mid 100] \tag{1.16}$$

Se você acertou, vá para a lição **90**.
Se errou, vá para a lição **89**.

89

$$\log(1000000) = \log\left(10^6\right) = 6 \tag{1.17}$$

$$\log(1) = \log\left(10^0\right) = 0 \tag{1.18}$$

Tente os seguintes problemas:

$$\log\left(10^4/10^{-3}\right) = [\ 10^7 \mid 1 \mid 10 \mid 7 \mid 70\ ] \tag{1.19}$$
$$\log(10^n) = [\ 10n \mid n \mid 10^n \mid 10/n\ ] \tag{1.20}$$
$$\log\left(10^{-n}\right) = [\ -10n \mid\ -n \mid\ -10^n \mid\ -10/n\ ] \tag{1.21}$$

Se você sentiu dificuldade com estes problemas, reveja o material desta seção. Assegure-se de que você entendeu estes problemas.

Após isto, vá para a lição **90**.

90

Há três importantes relações para a manipulação de logaritmos. Sendo a e b quaisquer números reais positivos:

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \tag{1.22}$$
$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b) \tag{1.23}$$
$$\log(a^n) = n\log(a) \tag{1.24}$$

Se você está familiarizado com estas regras, vá para a lição **92**. Se você quer ver como elas são derivadas,

então prossiga para a lição **91**.

91

Podemos derivar essas regras da seguinte forma. Da definição de $\log x$, $a = 10^{\log a}$ e $b = 10^{\log b}$. Consequentemente, das propriedades de exponenciais,

$$ab = 10^{\log a} \times 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}$$

Aplicando o log em ambos os lados da igualdade acima e, novamente, usando que $\log 10^x = x$, teremos:

$$\log ab = log10^{\log a + \log b} = \log a + \log b$$

Similarmente,

$$a/b = 10^{\log a}10^{-\log b} = 10^{\log a - \log b}$$

$$\log(a/b) = \log a - \log b$$

Da mesma forma,

$$a^n = (10^{\log a})^n = 10^{n \log a}$$

Portanto

$$\log a^n = n \times \log a$$

Vá para **92**.

Respostas: **(85)** Nenhum desses **(86)** 6, 0, **(89)** 7, n, -n

92

Tente resolver esses problemas:

$$\text{se} \log n = -3,\ n = [1/3 \mid 1/300 \mid 1/1000]$$

$$10^{\log 100} = [10^{10} \mid 20 \mid 100 \mid \text{ nenhuma das anteriores}]$$

$$\frac{\log 1000}{\log 100} = [\frac{3}{2} \mid 1 \mid -1 \mid 10]$$

Se você acertou, vá para **94**.

Se você errou, vá para **93**.

93

$$10^{\log n} = n, \text{ logo se} \log n = -3, n = 10^{-3} = 1/1000.$$

Pela mesma razão:

$$10^{\log 100} = 100$$

$$\frac{\log 1000}{\log 100} = \frac{\log 10^3}{\log 10^2} = \frac{3}{2}$$

Tente esses problemas:

$$\frac{1}{2}\log 16 = [2 \mid 4 \mid 8 \mid \log 2 \mid \log 4]$$

$$\log(\log 10)) = [10 \mid 1 \mid 0 \mid -1 \mid -10]$$

vá para **94**.

94

Nessa seção discutimos apenas logaritmos na base 10. Contudo, qualquer número positivo, com exceção de 1 pode ser usado como base. Bases distintas de 10 são usualmente indicadas por um subscrito. Por exemplo, o logarítmo de 8 na base 2 é escríto como $\log_2 8$. E seu valor é 3, pois $2^3 = 8$. Se nossa base é denotada por r, então a equação que define o $\log_r x$ é:

$$\boxed{r^{\log_r x} = x}$$

Todas as relações explicadas na lição **91** são verdades para logaritmos em qualquer base (desde que a mesma base seja usada em todos os logaritmos em cada equação).

Nós iremos a seguir discutir o logaritmo natural, para o qual a base é o número de Euler ($e = 2.71828...$). Logaritmos naturais são usualmente designados pelo símbolo $\ln x = \log_e x$. Muitas calculadoras fornecem ambos, ou sejam tanto $\log x$[i.e. $\log_{10} x$] e $\ln x$.

Vá para **95**.

95

Através da definição de logaritmo na última lição podemos obter a regra de mudança de base para os logaritmos de uma base para outra, por exemplo, da base 10 para a base e.

Tomemos $\log_{10}$ nos dois lados da equação definidora $e^{\ln x} = x$

$$\log\left(e^{\ln x}\right) = \log x$$

Porque $\log x^n = n \log x$ (lição **91**), isso fornece:

$$(\ln x)(\log e) = \log x$$

Ou seja, o expoente do logaritmando vai para frente do logaritmo multiplicando. Ou:

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e}$$

O valor numérico de $\log e$ é $1/2.303...$, então:

$$\ln x = (2.303...) \log x$$

Se você tiver uma calculadora que é capaz de fornecer tanto $\ln x$ quanto $\log x$, cheque essa relação para alguns valores de x.

Vá para **96**

Respostas: **(92)** 1/1000, 100, 3/2 **(93)** $\log 4, 0$

96

Isso conclui nossa revisão. Para fazer contas com funções trigonométricas e logaritmos, você precisará de seus valores numéricos. Você pode obtê-los através de uma calculadora científica, ou de tabelas, ou mesmo na internet. Além disso, cientístas da computação invariavelmente tem programas para gerar tais funções.

Antes de avançar, existem recursos desse livro que você deveria saber. O último capítulo, Capítulo 4, resume os 3 primeiros capítulos para te ajudar a revisar o que você aprendeu. Dê uma olhada no sumário se você sentir necessidade. Adicionalmente, a partir da página 245 [ATUALIZAR PÁGINA NO FINAL], existem uma coleção de problemas de revisão com respostas. Além do índice no fim do livro, existe uma lista de símbolos na página 261.

Assim que você estiver pronto, vá para o Capítulo 2.

Capítulo 2
Cálculo Diferencial

Neste capítulo você aprenderá

- O que significa o limite de uma função
- Como se define a derivada de uma função
- Como interpretar derivadas graficamente
- Alguns atalhos para encontrar derivadas
- Como reconhecer a derivadas de algumas funções comuns
- Como encontrar o máximo e mínimo valores de funções
- Como aplicar o cálculo diferencial para uma variedade de problemas

Limites

97

Antes de enfrentar o cálculo diferencial, precisamos aprender sobre limites. A ideia do limite pode ser nova para você, mas é o coração do cálculo e é importante entender o material dessa seção antes de avançar. Assim que você entender limites, você será capaz de compreender as ideias do cálculo diferencial prontamente.

Limites são tão importantes no cálculo que iremos discutir eles por dois diferentes pontos de vista. Primeiro, iremos discutir limites do ponto de vista intuitivo. Então, nós iremos fornecer uma definição matemática precisa.

Vá para **98**

98

Aqui vai um pouco de notação matemática que será útil nessa seção.

Suponha que uma variável x tem valores num intervalo com as seguintes propriedades:

1. O intervalo rodeia algum número a.
2. A diferença entre x e a é menor que outro número B.
3. x não assume o valor particular a. (Veremos futuramente porque esse ponto é excluído).

As três afirmações acima podem ser sumarizadas pelo seguinte:

$$|x - a| > 0 \text{ (A primeira desigualdade significa que } x \text{ não pode ter o valor } a.)$$

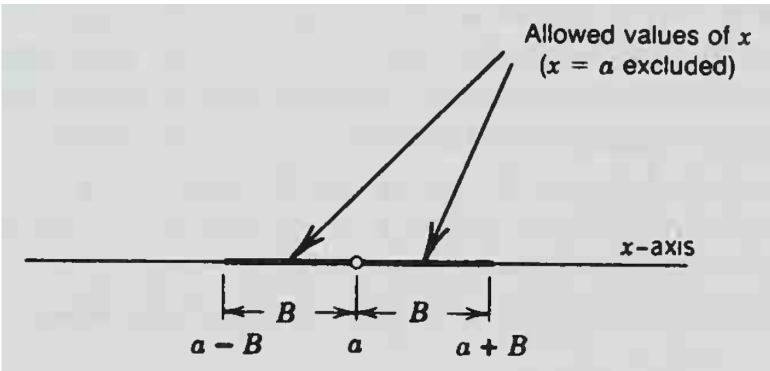
$$|x - a| < B \text{ (A magnitude da diferença entre } x \text{ e } a \text{ é menor que } B.)$$

Essas relações podem ser combinadas numa única afirmação:

$$0 < |x - a| < B$$

(Se você precisa revisar os símbolos usados aqui, veja a lição **20**.)

Os valores de x que satisfazem $0 < |x - a| < B$ são indicados pelo intervalo ao longo do eixo x mostrado na figura.

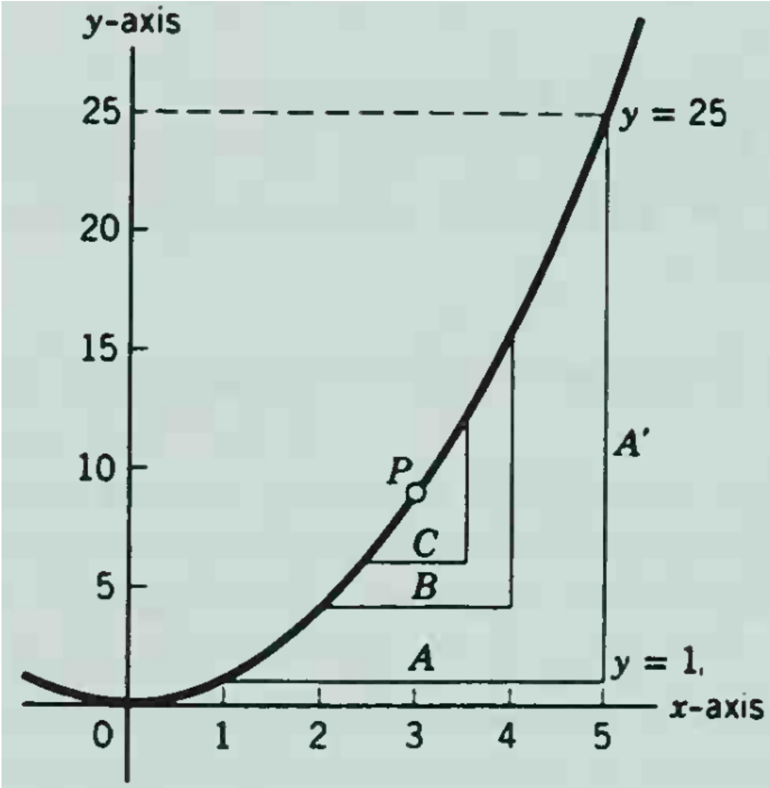


A primeira desigualdade significa que x não pode ter o valor a.

Vá para **99**

99

Nós começamos nossa discusão de limites com um exemplo. Iremos trabalhar com a equação $y = f(x) = x^2$, como mostrada no gráfico. P é o ponto na curva correspondente a $x = 3$, $y = 9$.



Vamos nos concentrar no comportamente de y para valores de x num intervalo entorno de $x = 3$. Por razões que veremos em breve, é importante excluir o ponto particular de interesse P, e para nós lembrarmos disso, o ponto em questão está circulado na curva, como pode ser visto na imagem.

Começamos considerando valores de y correspondendo a valores de x num intervalo próximo de $x = 3$, vivendo entre $x = 1$ e $x = 5$. Com essa notação da última lição, isso pode ser escrito como $0 < |x - 3| < 2$. Esse intervalo para x é mostrado pela linha A na figura. O correspondente intervalo de y é mostrado pela linha A' e inclui pontos entre $y = 1$ e $y = 25$, com exceção de $y = 9$.

Um intervalo menor de x é mostrado pela linha B. Aqui $0 < |x - 3| < 1$, e o intervalo correspondente para y é $4 < y < 16$, com $y = 9$ excluído.

O intervalo para x mostrado pela linha C é dado por $0 < |x - 3| < 0.5$. Escreva o intervalo correspondente para y no espaço a seguir, assumindo que $y = 9$ é excluído.

____

Para encontrar a resposta correta, vá para **100**

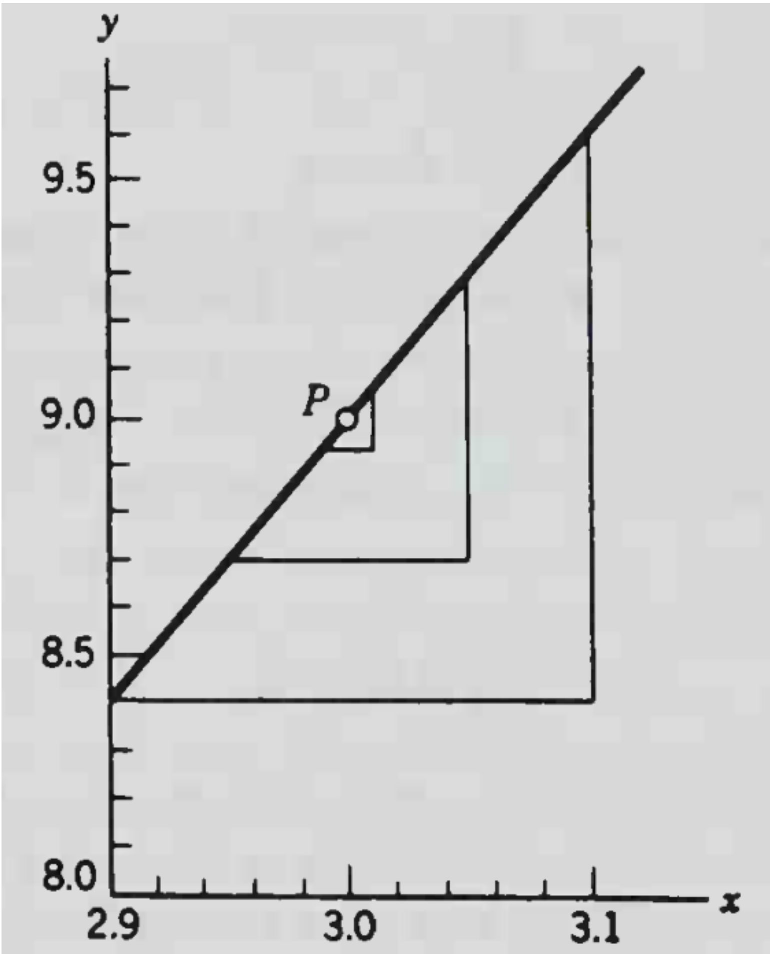
100

O intervalo que corresponde à $0 < |x - 3| < 0.5$ é

$$6.25 < y < 12.25$$

Que você pode checar substituindo os valores 2.5 e 3.5 por x em $y = x^2$ para encontrar os valores de y em cada ponto extremo do intervalo.

Até aqui nós consideramos três sucessivos intervalos de x cada vez menores entorno de $x = 3$ e os respectivos intervalos de y. Suponha que continuemos o processo. O desenho a seguir mostra o gráfico de $y = x^2$ para valores de x entre 2.9 e 3.1 (esse é um pedaço do gráfico da figura da lição **99**. Para essa pequena distância a parábola parece praticamente uma reta.)



Três pequenos intervalos de x entorno de $x = 3$ são mostrados com seus correspondentes intervalos em y. A tabela abaixo mostra os valores de y, correspondendo as fronteiras de x em cada extremo do intervalo. (A última entrada é para um intervalo muito pequeno para ser mostrado no desenho.)

Vá para **101**.

Intervalo de x	Correspondente intervalo de y
1-5	1-25
2-4	4-16
2.5-3.5	6.25-12.25
2.9-3.1	8.41-9.61
2.95-3.05	8.70-9.30
2.99-3.01	8.94-9.06
2.999-3.001	8.994-9.006

101

Esperamos que seja aparente da discussão nas últimas duas lições que à medida que diminuímos o intervalo em torno de $x = 3$, os valores de $y = x^2$ se agrupam mais e mais ao redor de $y = 9$. De fato, parece que podemos fazer os valores de y se agruparem o quão perto quisermos ao redor de $y = 9$ simplesmente limitando os valores de x a um intervalo suficientemente pequeno ao redor de $x = 3$. Por isso ser verdade, dizemos que *o limite de* x^2, quando x se aproxima de 3, é 9, e escrevemos

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

Botemos isto em termos mais gerais.

Se uma função $f(x)$ é definida para valores de x ao redor de um número fixo a, e se, à medida que x é confinado a um intervalo menor e menor ao redor de a, $f(x)$ se confina a um intervalo menor e menor ao redor de um número L, o número L é chamado de *limite* de $f(x)$ quando x tende a a. A afirmação que 'o limite de f(x) quando x tende a a é L' é comumente abreviado por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

No exemplo no início da lição, $f(x) = x^2$, $a = 3$, e $L = 9$.

A ideia importante nesta definição é que os intervalos que usamos estão ao redor de um ponto a de interesse, mas que o ponto em si não está incluso. De fato, $f(a)$, o valor da função em a, pode ser totalmente diferente de $\lim_{x \to a} f(x)$, como veremos mais pra frente.

Vá para **102**.

102

Você talvez esteja se perguntando por que estamos fazendo uma discussão tão complicada sobre um problema aparentemente simples. Por que se importar com $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ quando é óbvio que $x^2 = 9$ para $x = 3$?

A razão é que frequentemente o valor da função para um $x = a$ em particular não é definido, enquanto o limite à medida que x tende a a é perfeitamente bem definido.

Por exemplo, em $\theta = 0$ a função $\frac{\sin \theta}{\theta}$ tem valor $\frac{0}{0}$, que não significa nada. Quando chegarmos

à lição 110 veremos que $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$.
Para outro exemplo considere

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Para $x = 1$, $f(1) = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$, que não é definido. No entanto, podemos dividir por $x - 1$ *dado que* x é diferente de 1, e obtemos

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x + 1$$

Portanto, mesmo que $f(1)$ não seja definido,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$$

Uma justificação formal desses passos é dada no Apêndice A2, junto com uma série de regras para manipular limites. Não há necessidade de ler o apêndice agora, exceto se você tiver muito interesse.
Também poderíamos ter obtido o resultado acima graficamente ao estudar o comportamento da função na vizinhança de $x = 1$, como fizemos na lição **99**.

Vá para **103**.

103

Para conferir se você entendeu bem, encontre os limites das funções ligeiramente mais complicadas abaixo usando procedimentos similares aos acima. (Você provavelmente terá que resolvê-los no papel. Ambos envolvem manipulações algébricas.)

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$ = [1 | x | -1 | 2]

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{1-(1+x)^3}{x}$ = [1 | x | 3 | -3]

Caso acerte, vá a **105**.
Caso contrário, vá a **104**.

104

Aqui estão as soluções dos problemas em **103**:

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(1 + 2x + x^2) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{2x + x^2}{x} = \lim_{x \to 0}(2 + x) = \lim_{x \to 0} 2 + \lim_{x \to 0} x = 2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)^3}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)(1+x)(1+x)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+3x+3x^2+x^3)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}(-3-3x-x^2)\\
&= \lim_{x\to 0}(-3)+\lim_{x\to 0}(-3x)+\lim_{x\to 0}(-x^2) = -3
\end{aligned}$$

Mais uma vez, se você quiser ver a justificação dos passos utilizados nestas soluções, veja o Apêndice A2.

Vá para **105**.

105

Até o momento discutimos limites usando expressões como 'confinado a um intervalo menor e menor' e 'se agrupando mais e mais próximo'. Essas expressões comunicam a noção intuitiva de um limite, mas não são afirmações matemáticas precisas. Agora estamos prontos para uma definição precisa de limite. [Dado que é um costume quase universal, na definição de limites usaremos as letras gregas δ (delta) e ϵ (epsilon).]

Definição de limite

Seja $f(x)$ uma função definida para todos x em um intervalo ao redor de a. Se existir um número L tal que para cada número positivo ϵ existe um número positivo correspondente δ com

$$|f(x)-L|<\epsilon \text{ dado que } 0<|x-a|<\delta$$

dizemos que L é o limite de $f(x)$ quando x tende (ou se aproxima) de a, e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Para ver como aplicar esta definição,

vá para **106**.

106

A definição formal de limite na lição **105** dá uma clara base para decidir uma disputa sobre se o limite existe e é igual a L. Suponha que afirmemos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, mas um oponente discorde. Como um primeiro passo, a pedimos que escolha um número positivo ϵ, tão pequeno quanto desejar, diga 0.001, ou se quiser ser difícil, 10^{-100}. Nosso objetivo é encontrar algum outro número δ, tal que para todo x no intervalo $0<|x-a|<\delta$, a diferença entre $f(x)$ e L seja menor que ϵ. Se sempre pudermos fazer isso, vencemos a discussão - o limite existe e é L.

Esses passos são ilustrados para uma função particular nos desenhos abaixo

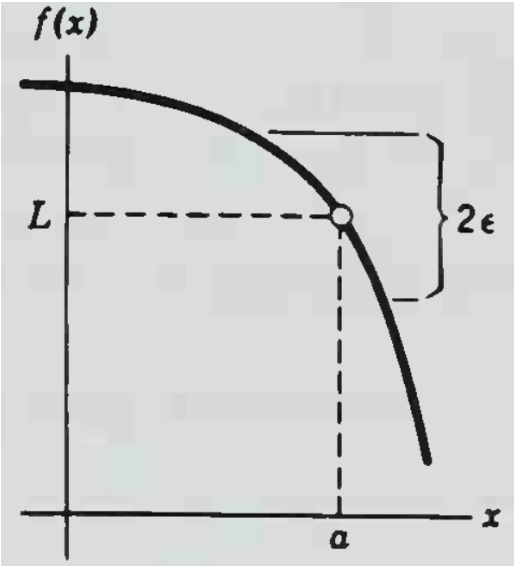


Figura 2.1: Nossa oponente nos desafiou a encontrar um δ para encaixar este ϵ.

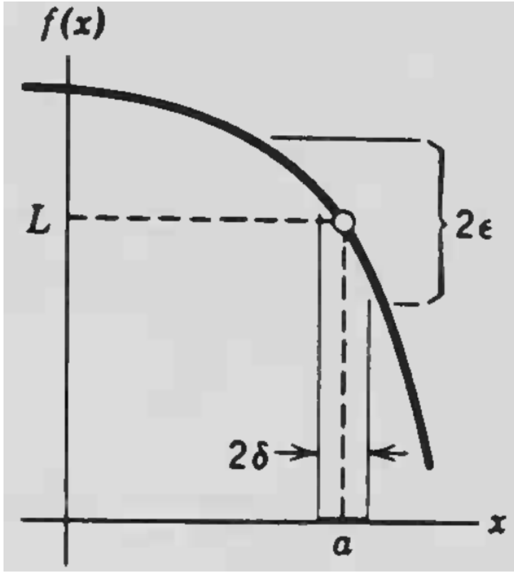


Figura 2.2: Aqui temos uma escolha de δ. Obviamente, para todos valores de x no intervalo mostrado, $f(x)$ satisfará $|f(x) - L| < \epsilon$.

Pode ser que nossa oponente encontre um ϵ tal que não podemos achar um δ, não importa quão pequeno, que satisfaça os requerimentos. Nesse caso, ela vence e $f(x)$ não possui limite L. (Na lição **114** chegaremos ao exemplo de uma função que não possui limite.)

Vá para **107**.

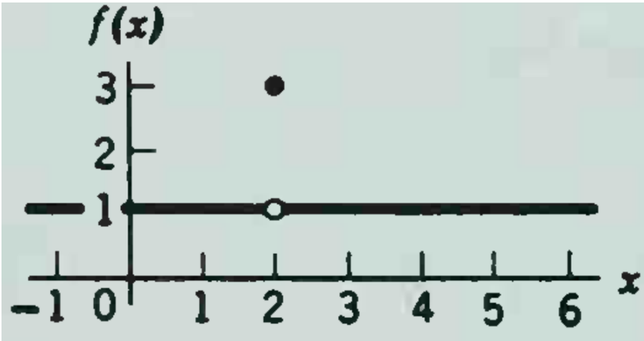
107

Nos exemplos estudados até agora, a função foi expressada por uma única equação. No entanto, este não é necessariamente o caso. Aqui está um exemplo para mostrar isso

$$f(x) = 1 \text{ para } x \neq 2$$
$$f(x) = 3 \text{ para } x = 2$$

(O símbolo $\neq$ significa 'não é igual')

Um esboço sugestivo desta função é mostrado abaixo. Você deve ser capaz de se convencer que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$, enquanto $f(2) = 3$.



Se você quiser uma explicação mais detalhada disto,

vá para **108**.

108

Para cada valor de x exceto $x = 2$, o valor de $f(x) = 1$. Consequentemente, $f(x) - 1 = 0$ para todo x exceto $x = 2$. Já que 0 é menor que o menor número positivo ϵ que sua oponente poderia escolher, segue da definição de limite que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$, ainda que $f(2) = 3$.

Vá para **109**.

109

Aqui está outra função que possui um limite bem definido em um ponto mas não pode ser avaliada nesse ponto: $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Avaliar valor de $f(x)$ em $x = 0$ pode ser bem complicado. No entanto, é possível achar $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{1/x}$.
A maioria das calculadoras científicas tem a função y^x. Se você possui uma destas calculadoras, determine os valores na seguinte tabela

x	$(1 + x)^{1/x}$
1	
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	
0.00001	

O limite de $(1 + x)^{1/x}$ com $x \to 0$ terá um papel importante no nosso estudo de logaritmos.

Lhe é dado um símbolo especial: e. Assim como π, e é um decimal sem fim e sem repetição; é um irracional. O valor de e é 2.7182818... Se você tentou avaliar e com uma calculadora, a última entrada da tabela deve dar valores corretos para os 4 primeiros dígitos após a virgula.

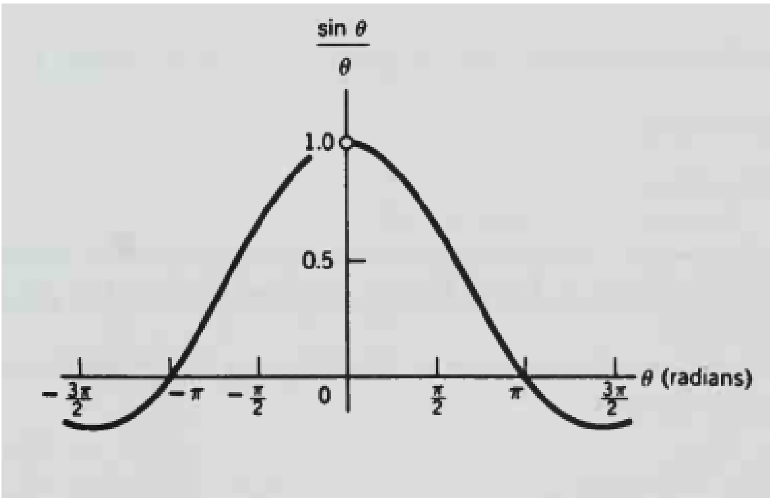
Vá a **110**.

110

O procedimento realmente utilizado para encontrar limites varia de problema a problema. Existe um número de teoremas para encontrar limites de funções simples no Apêndice A2, o qual você deve ser se se interessar. O resultado mencionando antes,

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

é provado no Apêndice A3.



Você pode ver que este resultado é razoável fazendo o gráfico de $\frac{\sin \theta}{\theta}$ como mostrado acima. Se você tem uma calculadora, explore por si os valores de $\frac{\sin \theta}{\theta}$ à medida que θ se aproxima de 0. Se tentar avaliar a função em $\theta = 0$, a maioria das calculadoras vai indicar um erro. E é assim que deveria ser, dado que a função não é definida para $\theta = 0$. De qualquer forma, seu limite é bem definido e vale 1.

Vá para **111**.

111

Até o momento, na maior parte de nossa discussão sobre limites, nós tomamos o cuidado de excluir o valor de $f(x)$ no ponto de interesse, a. Na verdade, $f(a)$ nem precisa estar definida para que o limite exista (vide a última lição). Apesar disso, é usual que $f(a)$ esteja definida. Se esse for o caso, e valer que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

então dizemos que a função é *contínua no ponto a*. Para finalizar, complete as lacunas:

Uma função f é contínua no ponto $x = a$ se:

1. $f(a)$ é ________________.
2. $\lim_{x \to a} f(x) =$ ________________ .

Confira suas respostas na lição **112**.

112

Aqui estão as respostas corretas: uma função f é contínua no ponto $x = a$ se

1. $f(a)$ é definida.
2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

De forma mais pitoresca, uma função contínua é aquela cujo gráfico pode ser desenhado sem que você retire a ponta do lápis do papel.

Tente determinar quais das funções abaixo são contínuas nos pontos devidos pontos indicados.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{9 - x^2}$.

   No ponto $x = 3$, $f(x)$ é [contínua | descontínua]

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

   No ponto $x = 1$, $f(x)$ é [contínua | descontínua]

3. $f(x) = |x|$.

   No ponto $x = 0$, $f(x)$ é [contínua | descontínua]

4. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

   No ponto $x = 0$, $f(x)$ é [contínua | descontínua]

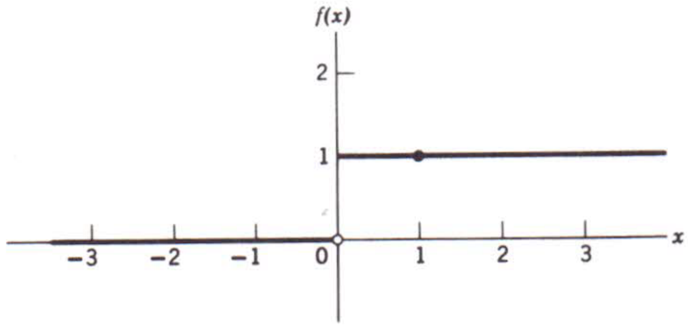
Se você cometeu algum erro ou gostaria de maiores explicações, prossiga para a lição **113**.
Caso contrário, pule para a lição **114**.

113

Aqui estão algumas explicações para os problemas da lição **112**.

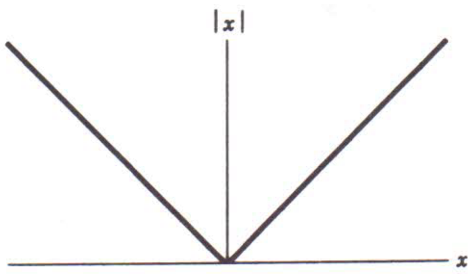
1. No ponto $x = 3$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{9 - x^2} = \dfrac{12}{0}$. Esta é uma expressão indefinida, portanto a função não é contínua em $x = 3$.

2. Aqui está o gráfico da função dada:



Esta função satisfaz ambas as condições para continuidade em $x = 1$, portanto ela é contínua nesse ponto. (Apesar disso, ela é descontinua $x = 0$).

3. Aqui está o gráfico de $f(x) = |x|$:



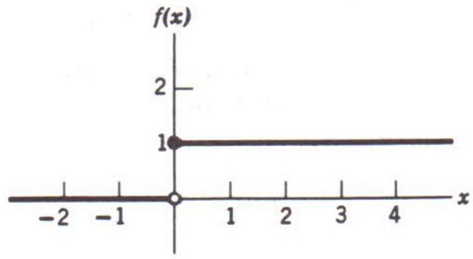
Esta função é contínua em $x = 0$, já que satisfaz os requisitos formais de continuidade num ponto.

4. Como discutido na lição **110**, $\dfrac{\sin x}{x}$ não é definida em $x = 0$. (Ela é, no entanto, contínua todos outros valores de x).

Vá para a lição **114**.

114

Antes de terminarmos o tópico de limites, vale a pena olhar alguns exemplos de funções que não possuem limites em algum ponto. Um exemplo deste tipo de função foi descrito no problema 2 da última lição. O gráfico dessa função encontra-se na figura abaixo. Nós podemos mostrar que esta função não possui limite no $x = 0$ caso sigamos os procedimentos descritos na definição de limite.



Para fins de ilustração, suponhamos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Depois, nosso oponente escolhe o valor $1/4$ para ε. Agora, para $|x - 0| < \delta$, onde δ é qualquer número positivo,

$$|f(x) - 1| = \begin{cases} |1-1| = 0, & x > 0 \\ |0-1| = 1, & x < 0. \end{cases}$$

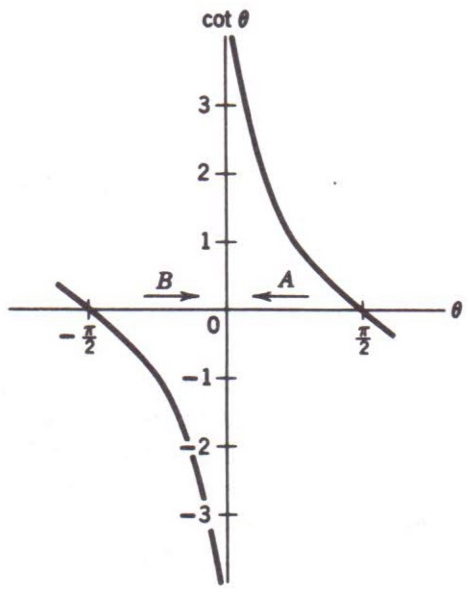
Desta forma, para todos os valores negativos de x no intervalo, $|f(x) - 1| = 1$, que é maior que $\varepsilon = 1/4$. Logo, 1 não é o limite. Você deve convencer-se de que não existe algum número L que satisfaz o critério de limite, já que $f(x)$ muda em 1 quando x passa dos valores negativos para os valores positivos.

Vá para a lição **115**.

Respostas: (**112**) (1) descontínua, (2) contínua. (3) contínua, (4) descontínua

115

Aqui temos outro exemplo de uma função que não possui limite num ponto. Pelo gráfico, é evidente que $\cot\theta$ não possui limite quando $\theta \to 0$. Em vez de se aproximar cada vez mais de algum número L, o valor dessa função cresce vertiginosamente à medida em que $\theta \to 0$ na direção indicada por A, e decresce vertiginosamente à medida em que $\theta \to 0$ na direção indicada por B.



Aqui, concluímos nosso estudo sobre limites (por ora). Caso você deseje familiarizar mais com limites, confira os problemas de revisão 21 até 28.
Agora, estamos prontos para ir para a próxima seção.

Vá para a lição **116**.

Velocidade

116

Até o momento lidamos bastante com abstrações, assim, antes de iniciarmos o cálculo diferencial, vamos discutir algo um pouco mais pé no chão: movimento. Com efeito, Leibniz e Newton inventaram o Cálculo, pois ambos debruçavam-se sobre problemas ligados ao movimento de corpos. Isto indica que problemas deste tipo são um boa forma de iniciarmos nossos estudos sobre cálculo.

Vá para a lição **117**.

117

Um problema como aquecimento. Neste capítulo, os movimentos são sempre retilíneos.

Um trem desloca-se com uma velocidade v km/h. No tempo $t = 0$, ele situa-se a uma distância S_0 de nós. (O subscrito em S_0 é para evitar confusão. S_0 é uma distância particular e é uma constante; S é uma variável.) Escreva a equação para a distância do trem até nós, S, em termos do parâmetro t. Utilize a unidade de t como sendo horas.

$$S = \underline{\qquad\qquad\qquad} \ .$$

Vá para a lição **118** para obter a resposta.

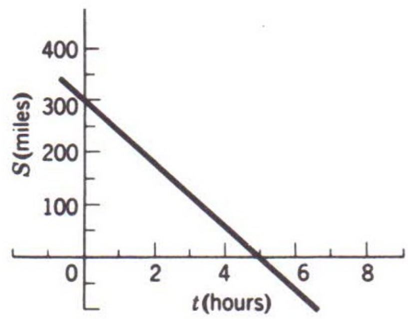
118

Se você escreveu $S = S_0 + vt$, você está certo. Vá para a lição **119**.

Se sua resposta não foi equivalente à acima, busque se convencer que ela é a resposta certa. Note que essa resposta implica em $S = S_0$ para $t = 0$, como desejado. Ainda, a equação da resposta é representa uma reta (talvez seja uma boa ideia revisar a seção sobre funções lineares, nas lições 23 a 39). Quando você estiver satisfeito que esta equação é a correta,

Vá para a lição **119**.

119



Aqui está um gráfico das posições em diferentes instantes do trem percorrendo uma linha reta. Obviamente, isso representa uma equação linear. Escreva a equação da posição do trem (em km) em termos de tempo (em horas).

$$S = \underline{\qquad\qquad\qquad} \ .$$

Ache a velocidade do trem a partir de sua equação.

$$v = \underline{\qquad\qquad\qquad} \ .$$

Vá para **120** para as respostas corretas.

120

Aqui estão as respostas para as perguntas da lição **119**.

$$S = -60t + 300\,km,$$

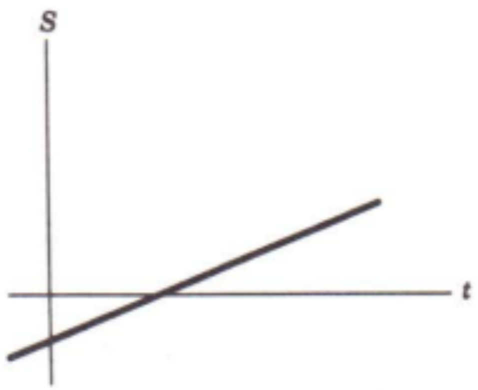
$$v = -60\,km/h.$$

A velocidade é negativa porque S decresce com a passagem do tempo. (Note que a velocidade ao longo de uma reta é positiva ou negativa, dependendo da direção do movimento. A *rapidez*, que é a magnitude da velocidade, é sempre positiva.) Para uma discussão mais aprofundada, reveja as lições **33** e **34**.

Vá para a lição **121**.

121

Aqui está outro gráfico da posição de um trem viajando em linha reta. A propriedade da reta



que representa a velocidade do trem é ________________ da reta.

Vá para **122** para a resposta.

122

A propriedade da reta que representa a velocidade do trem é <u>*o coeficiente angular*</u> da reta.

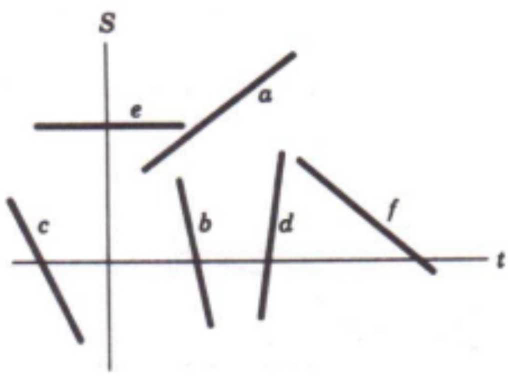
Se você escreveu isso, vá direto para a lição **123**.

Se você escreveu qualquer outra resposta, ou então não escreveu nada, então você pode ter esquecido o que revisamos nos tópicos **23-39**. É aconselhável estudar esta seção novamente (particularmente os tópicos **33** e **34**) e pensar sobre este problema antes de prosseguir. Pelo menos se convença de que a inclinação realmente representa a velocidade.

Vá para **123**.

123

A seguir, temos gráficos de posição vs tempo de seis objetos se movendo retilineamente.



Qual gráfico corresponde ao objeto que:

(i) tem a maior velocidade para frente[1] ? [a | b | c | d | e]

(ii) está se movendo para trás mais rapidamente? [a | b | c | d | e]

(iii) está em repouso? [a | b | c | d | e]

Se acertou todas, vá para **125**.
Se errou alguma, vá para **124**.

124

A velocidade do objeto é dada pela inclinação do gráfico de distância pelo tempo. Não confunda a inclinação de uma reta com sua localização (no gráfico). Uma inclinação positiva significa

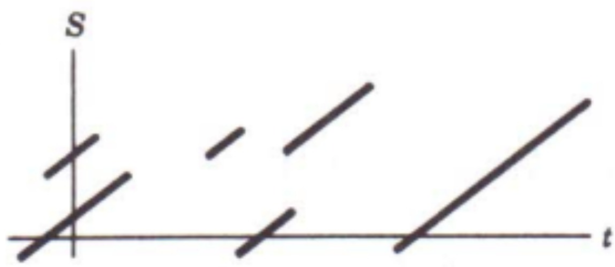


Figura 2.3: Todas as linhas acima têm a mesma inclinação.

que a distância está aumentando com o tempo, o que corresponde a uma velocidade positiva. Analogamente, a inclinação negativa significa que a distância está decrescendo com o tempo, o que corresponde a uma velocidade negativa. Se você precisar revisar a ideia de inclinação, veja os tópicos **25-27** antes de continuar. Qual das linhas na figura 2.4 tem

[1] em relação à orientação do eixo de espaço definido

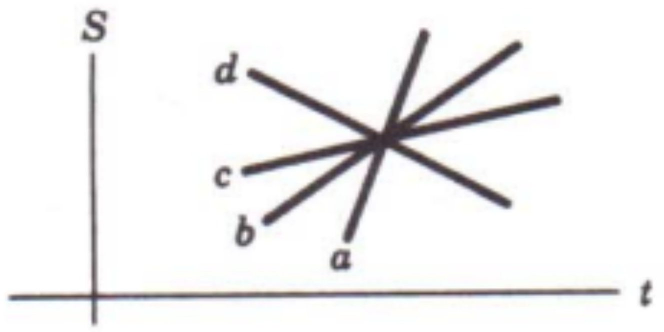


Figura 2.4: Todas as linhas acima têm diferentes inclinações.

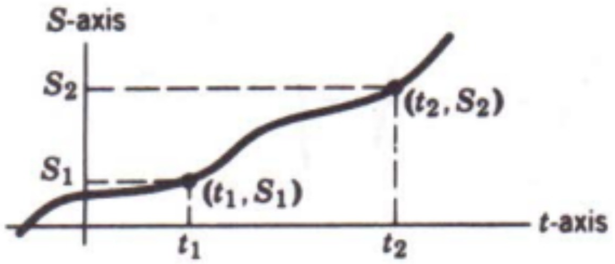
(i) uma inclinação negativa? [a | b | c | d]

(ii) uma inclinação positiva? [a | b | c | d]

Vá para **125**.

125

Até agora, as velocidades que consideramos foram constantes no tempo. Mas e se a velocidade muda? Aqui está um gráfico de posição de um carro viajando com velocidade variável ao longo



de uma linha reta. Para descrever este movimento, introduzimos a *velocidade média* $\bar{v}$, que é a razão entre a distância total viajada pelo tempo levado para percorrê-la. Por exemplo, entre os instantes de tempo t_1 e t_2, o carro percorreu uma distância total de $S_2 - S_1$, logo $(S_2 - S_1)/(t_2 - t_1)$ foi sua ____________________ durante o intervalo de tempo.

Vá para **126**.

126

A resposta do tópico **125** é

"$(S_2 - S_1)/(t_2 - t_1)$ foi sua <u>*velocidade média*</u> durante o intervalo de tempo."
(Utilizar unicamente a palavra "velocidade" não é a resposta correta.)

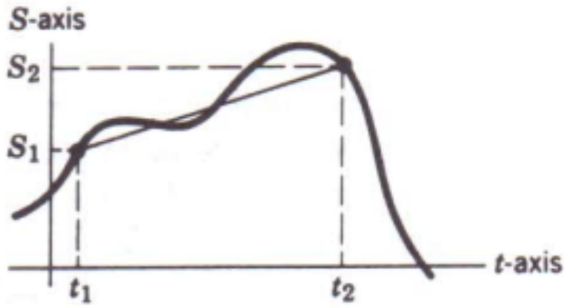
Vá para **127**.

127

Além de definir a velocidade média $\bar{v}$ algebricamente,

$$\bar{v} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

nós podemos interpretar $\bar{v}$ graficamente. Se desenharmos uma linha reta entre os pontos (t_1, S_1) e (t_2, S_2), então a velocidade média é simplesmente a *inclinação* (coeficiente angular) da reta.[2]



Vá para **128**.

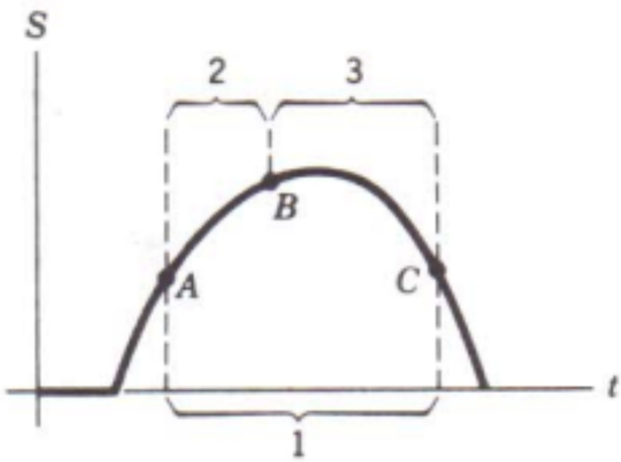
128

Durante qual intervalo a velocidade média foi

(i) mais perto de 0? [1 | 2 | 3]

(ii) a maior para frente|? [1 | 2 | 3]

(iii) a maior para trás? [1 | 2 | 3]

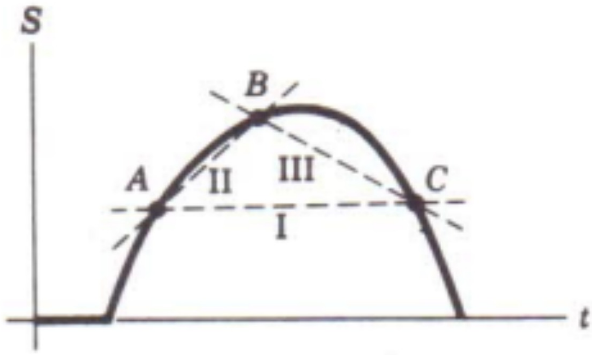


[2]**Respostas**: **(123)**: d, b, e; **(124)**: d, a.

Caso você tenha acertado, vá para o **130**.
Caso você tenha errado, vá para o **129**

129

Como você errou o último problema, vamos analisá-lo em detalhe. Aqui estão as linhas retas



desenhadas pelos pontos A,B,C. A linha I tem uma inclinação bem pequena e corresponde a uma velocidade quase nula. A linha II tem uma inclinação positiva e a III tem uma inclinação negativa, correspondendo, respectivamente, a velocidades médias positiva e negativa.

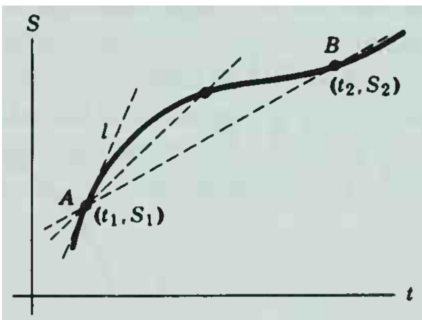
Vá para **130**.

130

Agora, vamos estender a nossa ideia de velocidade de uma maneira bem importante: em vez de perguntar "qual a velocidade média **entre** os instantes t_1 e t_2?" vamos perguntar "qual a velocidade **no** instante t_1?" A velocidade em um determinado instante de tempo é denominada **velocidade instantânea**. Este é um novo termo e daremos uma definição precisa em breve, mesmo que isso já soe familiar para você de alguma maneira.

Vá para **131**.

131



Nós podemos dar um significado gráfico à ideia de velocidade instantânea. A velocidade média é a inclinação da linha reta que junta os dois pontos na curva (t_1, S_1) e (t_2, S_2). Para achar a velocidade instantânea, queremos que t_2 seja bem próximo de t_1. Ao deixar o ponto B da curva tender ao ponto A (ou seja, considerar intervalos de tempo, começando em t_1, que ficam cada vez mais curtos), a inclinação da reta que liga A e B tende à inclinação da reta l na figura. A velocidade instantânea é então a inclinação da reta l. Em certo sentido, a reta l tem a mesma inclinação da curva no ponto A. A reta l é chamada de *tangente* à curva.

Vá para **132**.

132

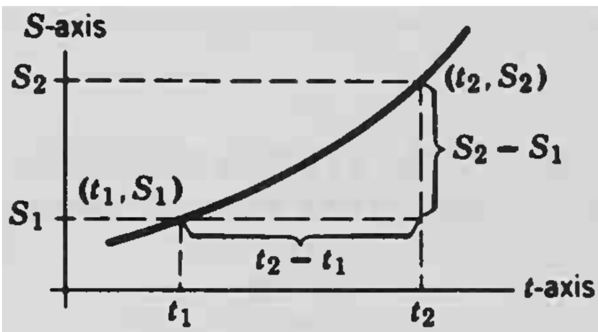
Aqui é onde a ideia de limite se torna muito importante. Se desenharmos uma reta que passa por um ponto dado A numa curva e outro ponto B na curva, e então deixarmos que B fique cada vez mais próximo de A, a inclinação da reta tende a um único valor e este pode ser identificado como a inclinação da curva em A. O que precisamos fazeré então considerar o *limite* da inclinação da reta que passa por A e B no limite em que $B \to A$.

Agora, vá para **133**.

133

Agora iremos dar um significado preciso à ideia intuitiva de velocidade instantânea como a inclinação de uma curva num ponto. Comecemos considerando a velocidade média:

$$v = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \text{inclinação da reta conectando os pontos 1 e 2.}$$



Quando $t_2 \to t_1$, a velocidade média tende à velocidade instantânea, isto é, $v \to v$ quando $t_2 \to t_1$, ou ainda

$$\boxed{v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}.}$$

Vá para **134**.

134

Já que as ideias apresentadas nas lições anteriores são muito importantes, vamos resumi-las.

Se um ponto se move de S_1 até S_2 durante um tempo t_1 até t_2, então

$$(S_2 - S_1)/(t_2 - t_1)$$

é a ______________________________, v.

Se considerarmos o limite da velocidade média quando o intervalo de tempo em que tomamos a média vai a zero, o resultado é chamado de ______________________________, v.

Agora vamos apresentas essas ideias de uma forma mais limpa. Se você puder, escreve a definição formal de v no espaço em branco abaixo.

$$v = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Vá para **135** para as soluções.

135

As respostas corretas da lição **134** são as seguintes:

Se um ponto se move de S_1 a S_2 durante um tempo t_1 a t_2, então

$$(S_2 - S_1)/(t_2 - t_1)$$

é a *velocidade média* v.

Se considerarmos o limite da velocidade média quando o intervalo de tempo em que tomamos a média vai a zero, então o resultado é chamado de *velocidade instantânea* v.

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}.$$

Se você escreveu isso, parabéns! Vá para a lição **136**.

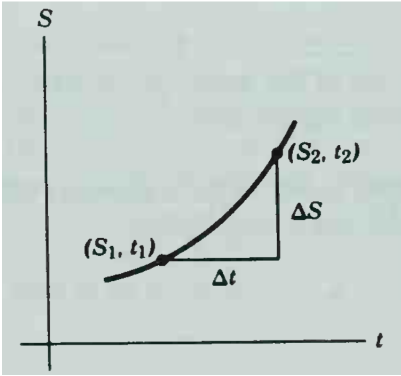
Se escreveu algo diferente, volte à lição **133** e revise ate esta lição mais uma vez.

Então vá para a lição **136**.

136

As respostas são

A letra grega maiúscula Δ ("delta") é geralmente usada para indicar a variação de uma variável. Assim, para deixar a notação mais sucinta, podemos escrever $\Delta S = S_2 - S_1$, e $\Delta t = t_2 - t_1$. (ΔS é um único símbolo lido como "delta S"; ele não significa $\Delta \times S$.) Apesar que essa notação talvez lhe seja nova, vale a pena se acostumar com ela já que se economiza muito tempo ao escrever.



Com esta notação, nossa definição de velocidade instantânea é

$$v = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Vá para **137** para a solução.

137

Se você escreveu

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

e realmente está acompanhando. Vá direto para a lição **138**.

Se você errou, estude novamente as lições **134-136** antes de prosseguir para **138**.

138

Agora iremos calcular a velocidade instantânea pela análise de um exemplo passo a passo. Mais tarde veremos atalhos para realizar esse cálculo de maneira mais direta.

Suponha que tenhamos a seguinte expressão relacionando posição e tempo:

$$S = f(t) = kt^2 \qquad (k \text{ é uma constante}).$$

O objetivo é achar $\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t)$, para qualquer Δt, e então calcular o limite $\Delta S/\Delta t$ quando $\Delta t \to 0$.

Aqui vão os passos

$$\Delta S = f(t+\Delta t) - f(t) = k(t+\Delta t)^2 - kt^2$$

$$k[t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2] - kt^2$$

$$k[2t\Delta t + \Delta t^2]$$

$$\frac{}{\Delta t} = \frac{k[2t\Delta t + \Delta t^2]}{\Delta t} = 2kt + k\Delta t,$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} = (2kt + k\Delta t) = 2kt.$$

Um problema mais simples para você tentar está na próxima lição.

Caso contrário, vá para **239**.

139

Suponha que tenhamos que $S = f(t) = v_0 t + S_0$. O problema é achar a velocidade instantânea a partir de nossa definição.

No tempo Δt, o ponto se move uma distância ΔS.

$$\Delta S = \underline{\hspace{4cm}}\ .$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \underline{\hspace{4cm}}\ .$$

Escreva as respostas e vá para a lição **140**.

140

Se você escreveu

$$\Delta S = v_0 \Delta t$$

e

$$v = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v_0,$$

você acertou e pode pular para a lição **142**.

Se escreveu algo diferente, estude a explição detalhada na lição **141**.

141

Aqui está o procedimento correto. Como $S = f(t) = v_0 t + S_0$,

$$\Delta S = f(t+\Delta t) - f(t)$$

$$= v_0(t + \Delta t) + S_0 - (v_0 t + S_0)$$

$$= v_0 \Delta t,$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_0 = v_0.$$

A velocidade instantânea e a velocidade média são iguais nesse caso, já que a velocidade é uma constante v_0.

Vá para **142**.

142

Abaixo um problema para você resolver. Suponha que a posição de um objeto seja dada por

$$S = f(t) = kt^2 + lt + S_0,$$

onde k, l e S_0 são constantes. Ache v.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \underline{\hspace{4cm}}\,.$$

Para checar sua resposta, vá para **143**.

143

A resposta é

$$v = 2kt + l.$$

Se você obteve esse resultado, vá para a lição **146**. Caso contrário,

Vá para **144**.

144

Aqui está a solução do problema da lição **142**.

$$f(t) = kt^2 + lt + S_0,$$

$$f(t + \Delta t) = k(t + \Delta t)^2 + l(t + \Delta t) + S_0$$

$$= k[t^2 + 2t\Delta t + \Delta^2] + l(t + \Delta t) + S_0,$$

$$\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t) = k[2t\Delta t + \Delta t^2] + l\Delta t,$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{k[2t\Delta t + \Delta t]^2 + l\Delta t}{\Delta t} \right\}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} [k(2t + \Delta t) + l] = 2kt + l.$$

Agora tente este problema:

Se $S = At^3$, onde A é uma constante, ache v.

Resposta: ______________

Para verificar sua solução, vá para **145**.

145

Aqui está a resposta: $v = 3At^2$. Vá direto para a lição **146** a não ser que você queira ver a solução, neste caso continue aqui.

$$S = At^3,$$
$$\Delta S = A(t + \Delta t)^3 - At^3$$
$$= A[t^3 + 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3] - At^3$$
$$= 3At^2\Delta t + 3At\Delta t^2 + A\Delta t^3,$$
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} [3At^2 + 3At\Delta t + A\Delta t^2] = 3At^2.$$

Vá para a lição 146.

Derivadas

146

Nesta seção nós vamos generalizar nossos resultados sobre velocidade. Isso nos levará à ideia de derivada de uma função, que é o coração do cálculo diferencial.

Vá para a lição 147.

147

Preencha as lacunas abaixo.

Quando escrevemos $S = f(t)$, estamos afirmando que a posição depende do tempo.

Aqui, posição é a variável dependente e o tempo é a variável ______________.

A velocidade é a taxa de variação da posição com respeito ao tempo. Com isso, queremos dizer que a velocidade é (dê a definição formal novamente):

$$v = \underline{\hspace{3cm}}$$

Vá para a lição 148 para ver as soluções.

148

Na última lição, a resposta esperada era

... tempo é a variável *independente*,

e

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Em qualquer caso, vá para **149**.

149

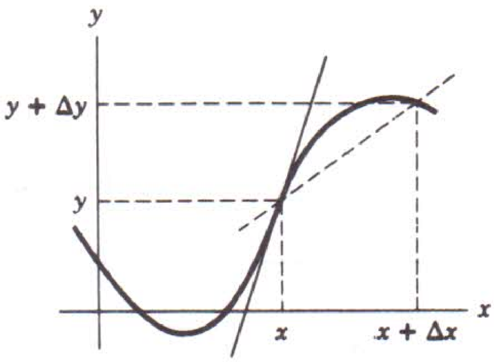
Considere uma função continua definida por $y = f(x)$. Nisso, y é nossa variável dependente e x é a independente. Se nos perguntarmos "Em qual taxa y varia quando x varia?", nós podemos encontrar a resposta ao calcularmos o seguinte limite:

$$\text{Taxa de variação de } y \text{ com respeito a } x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Vá para **150**.

150

Podemos dar significado geométrico a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, onde $y = f(x)$. Para isso, preencha as lacunas. Geometricamente, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ pode ser encontrado desenhando uma reta que passa pelos pontos (x, y) e (______, ______) como mostrado abaixo. A inclinação da reta é dada por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, e $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a ________________ da reta tangente à curva no ponto (x, y).



Vá para **151**.

151

Os completamentos corretos para as lacunas da parte **150** são:

$$\underline{\boldsymbol{(x+\Delta x,\ y+\Delta y)}},$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a **inclinação** da reta tangente a curva em $(x,\ y)$. Abreviamos *a inclinação da tangente a curva* como *a inclinação da curva*, por brevidade. Sendo mais técnico na linguagem empregada trocaríamos o uso do termo " inclinação " por ***coeficiente angular*** ou, mais raramente, por *declive*. (Se você gostaria de ver uma discussão sobre isso, reveja a parte **131** antes de seguir para a próxima parte.)

Vá para **152**.

152

Uma outra forma de escrever $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Se a notação utilizada aqui não parecer familiar, reveja a lição **136** antes de prosseguir.

Vá para **153**.

153

Vamos revisar uma vez mais.

Se quisermos saber como y varia conforme variamos x, nós descobrimos calculando o seguinte limite:

____

Preencha a lacuna e prossiga para **154**.

154

A resposta correta para **153** é:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

se você acertou prossiga para **155**.

se você errou, volte para **149**.

155

Como a quantidade $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é incrivelmente útil, damos a ela um nome especial e um símbolo especial. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é chamado de *derivada* de y com respeito a x, que é amplamente denotado com o símbolo $\frac{dy}{dx}$.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

em que $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$.

Novamente: $\frac{dy}{dx}$ é a ________________ de _____ com respeito a _____.

Vá para **156** para a resposta correta.

156

A resposta correta é:

$$\underline{\frac{dy}{dx}} \text{ é a } \underline{\textit{derivada}} \text{ de } \underline{y} \text{ com respeito a } \underline{x}.$$

Esse símbolo é por vezes lido como “ de y por de x ”. A derivada é frequentemente escrita de uma outra forma:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

(A notação y' é lida como “ y linha ”.) y' e $\frac{dy}{dx}$ significam a mesma coisa:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(Outro símbolo por vezes usado para denotar o operador derivada é D. Portanto $Dy = y'$. No entanto, não usaremos o símbolo D.).

Possuir dois símbolos distintos para a derivada pode parecer confuso em um primeiro momento, mas eles irão ambos se tornar familiares bem rapidamente. Cada um tem a sua vantagem. O símbolo $\frac{dy}{dx}$ deixa claro que a variável independente é x, enquanto que em y' existe alguma ambiguidade — y poderia ser uma função de alguma outra variável, z por exemplo. [Para evitar essa confusão, por vezes a denotação por linha é escrita como $y'(x)$.] Por outro lado a notação $\frac{dy}{dx}$ pode ser muito incômoda e extensa de se escrever. Mais seriamente, a notação $\frac{dy}{dx}$ faz parecer que a derivada é uma simples razão de duas quantidades, dx e dy, o que ***não*** é verdadeiro.

Podemos aplicar a ideia de derivada para o movimento com velocidade que discutimos anteriormente. Velocidade é a taxa de variação da posição com relação ao tempo, portanto a velocidade é a *derivada* da posição com relação ao tempo.

Vá para **157**.

157

Vamos apresentar a definição de derivada usando variáveis diferentes. Suponha que z é alguma variável independente, e que q dependa de z. Então a derivada de q com relação a z é:

$$\frac{dq}{dz} = \rule{4cm}{0.4pt}\,.$$

(Escrever a definição formal.).

para a resposta correta vá para **158**.

158

A sua resposta deveria ter sido:

$$\frac{dq}{dz} = \underline{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta z}}.$$

Se assim, vá para **159**.

Senão, volte para **155** e tente de novo.

159

O símbolo $\frac{df}{dx}$ pode ser entendido como um *operador* derivada, operando numa função f. Se $f(x) = x^3 + 3$, então a derivada pode ser escrita em qualquer uma das seguintes formas:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(x^3+3)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3+3)$$

Similarmente, temos que:

$$\frac{d(\theta^2\,\mathrm{sen}\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\theta^2\,\mathrm{sen}\theta)$$

(Aqui θ é meramente uma outra variável qualquer.)

Portanto $\frac{d}{dx}(\qquad)$ significa "diferencie com relação a x" qualquer função $f(x)$ que aparecer dentro do espaço dos parênteses. De modo mais completo, o símbolo significa que se deve obter uma expressão para:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

e então usa-la para calcular:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Entretanto, como iremos ver, raramente precisamos passar por esse processo formal de se tomar um limite para calcular uma derivada. Existem vários atalhos para isso.

Vá para **160**.

Gráficos de funções e de suas derivadas

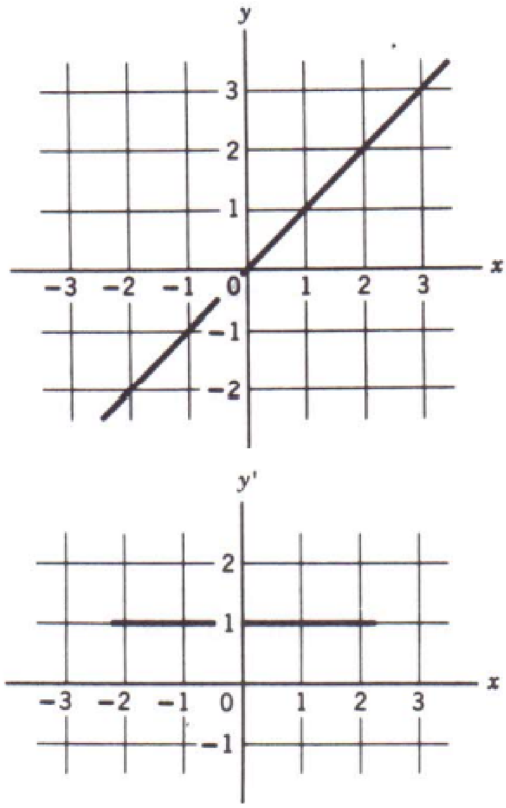
160

Nós acabamos de aprender a definição formal de derivada. Graficamente, a derivada de uma função $f(x)$ em algum valor de x é equivalente a inclinação da reta que é tangente ao gráfico da função nesse ponto. A nossa principal preocupação no restante desse capítulo será de encontrar métodos de calcular derivadas de diferentes funções. No entanto, ao se fazer isso é útil ter algum tipo de noção intuitiva de como as derivadas se comportam, e nós conseguimos obter isso olhando para o gráfico da função. Se o gráfico da função tiver uma inclinação íngreme e para cima num ponto, a derivada neste ponto terá um alto valor positivo. Se o gráfico tiver uma singela inclinação para baixo, a derivada terá um valor negativo próximo de zero. Nessa seção nós iremos obter alguma experiência de como colocar essas ideias qualitativas em uso, e nas próximas seções nós iremos aprender como obter derivadas precisamente.

Vá para **161**.

161

Aqui esta o gráfico da função simples $y = x$. Na outra imagem nós plotamos $y' = \frac{dy}{dx}$. Como a inclinação de y é positiva e constante, y' é uma constante positiva.



O gráfico indica que $\frac{d}{dx}(x) = 1$. Você consegue provar isso?

Vá para **162**.

162

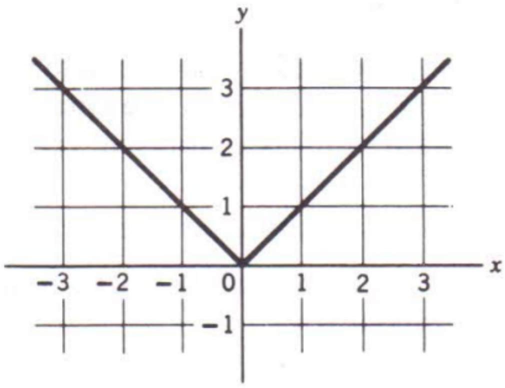
Para mostrar que $\frac{d}{dx}(x) = 1$, tome $y(x) = x$. Então

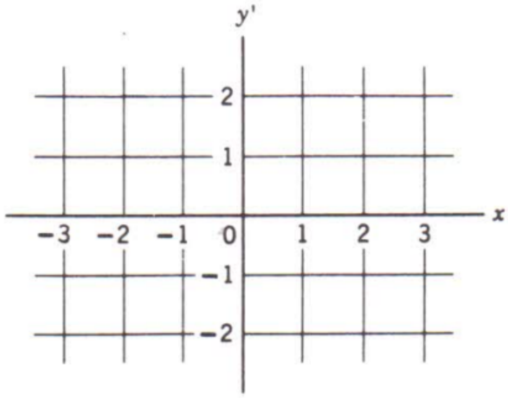
$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = x + \Delta x - x = \Delta x \tag{2.1}$$

Portanto

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \tag{2.2}$$

Aqui esta o gráfico de $y = |x|$. (Caso você tenha se esquecido da definição de $|x|$, veja a lição **20**.) Desenhe y' nas coordenadas abaixo.

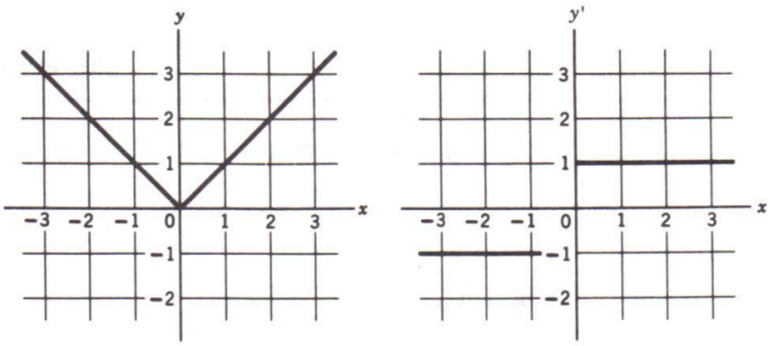




Veja a resposta em **163**.

163

Aqui se encontram os gráficos de $y = |x|$ e y'. Se você os desenhou corretamente vá para a próxima lição **164**. Caso você tenha cometido algum erro ou quer explicações mais detalhadas, continue nesta lição.



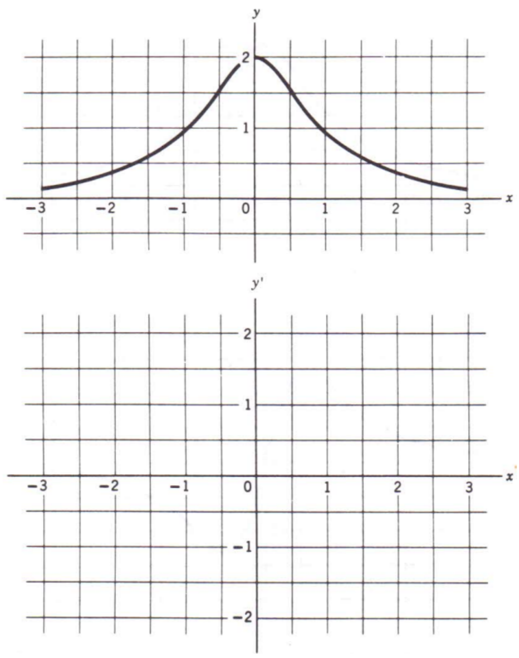
Como você pode ver a partir do gráfico, a função $y = |x| = x$ para $x > 0$. Então para $x > 0$ o problema é o mesmo da lição **161**, e $y' = 1$. Contudo, para $x < 0$ a inclinação da reta é negativa e dada por -1. No ponto $x = 0$ a inclinação não é bem definida, pois seu valor é $+1$ se aproximarmos o limite até o 0 a partir do eixo-x positivamente, e vale -1 se aproximarmos do 0 a partir do eixo-x negativamente. Portanto, $\frac{d}{dx}(|x|)$ é descontínua em $x = 0$. (A função

$|x|$ é contínua em $x = 0$, mas a mudança abrupta em sua inclinação gera uma descontinuidade na derivada.)

Vá para **164**.

164

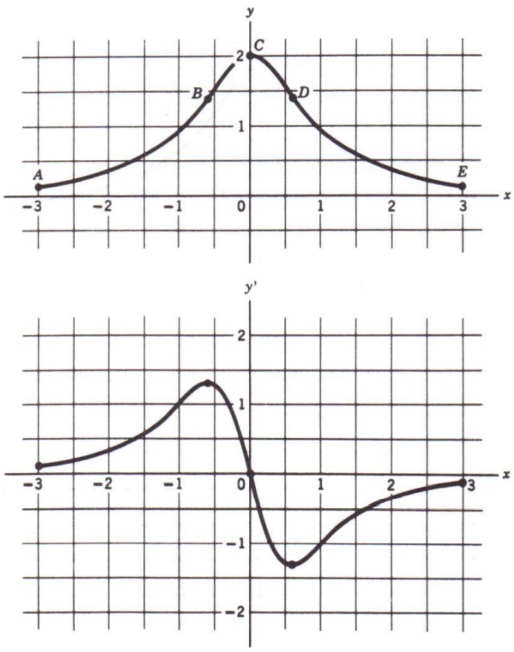
Aqui esta o gráfico de uma função $y = f(x)$. Desenhe sua derivada no espaço abaixo. (O desenho não precisa ser perfeito, apenas mostre as características gerais de y'.)



Veja a resposta em **165**.

165

Aqui esta a função e a sua derivada. Se o seu desenho de y' é parecido com esse, vá para a próxima lição **166**. Caso contrário, continue aqui.

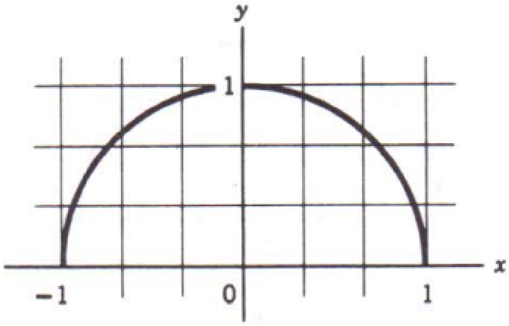


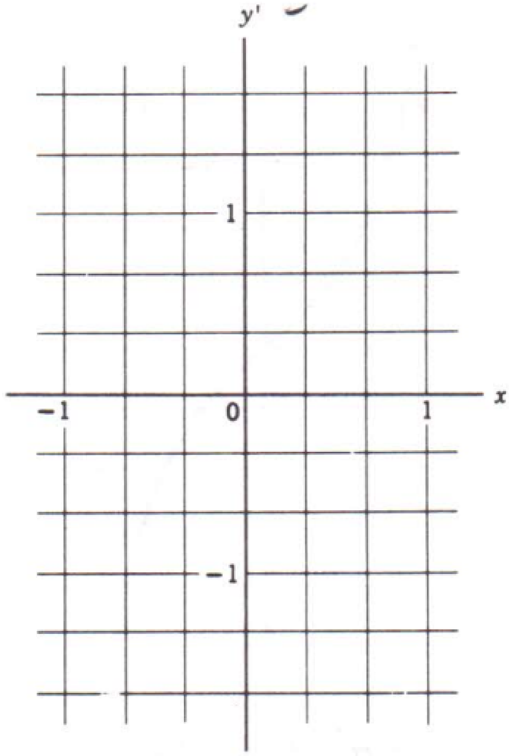
Para verificar que o gráfico de y' esta correto, note que para $x < 0$, y aumenta com x, de forma que y' é positivo. A inclinação é maior perto do ponto B, mas deve cair abruptamente a partir de B pois é zero em C ($x = 0$). No ponto D, y esta decaindo rapidamente, então y' é negativo. Nos extremos, A e E, a inclinação é pequena e y' esta próximo de zero.

Vá para **166**.

166

Vamos estudar o comportamento de y' gráficamente para mais uma função. O gráfico de y e x é um semicírculo. No espaço abaixo, desenhe a forma de y'.

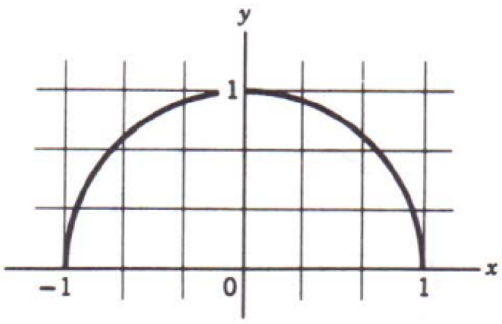


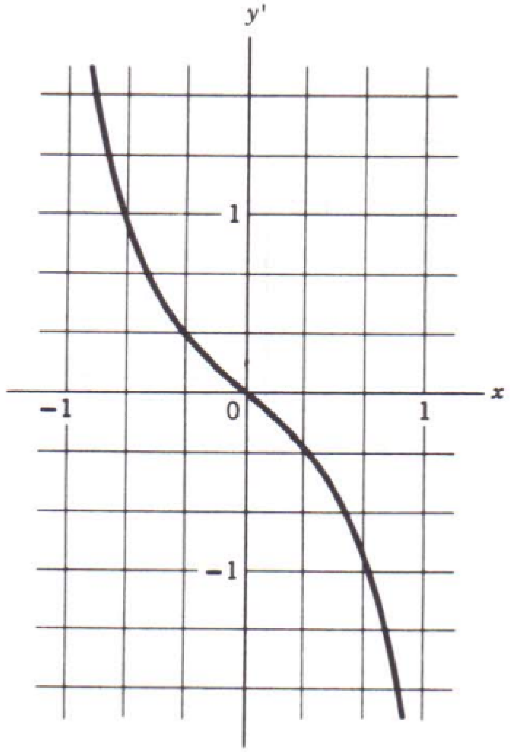


Veja a resposta em **167**.

167

Aqui estão os gráficos de y e y'. Continue aqui se você deseja uma explicação mais detalhada.



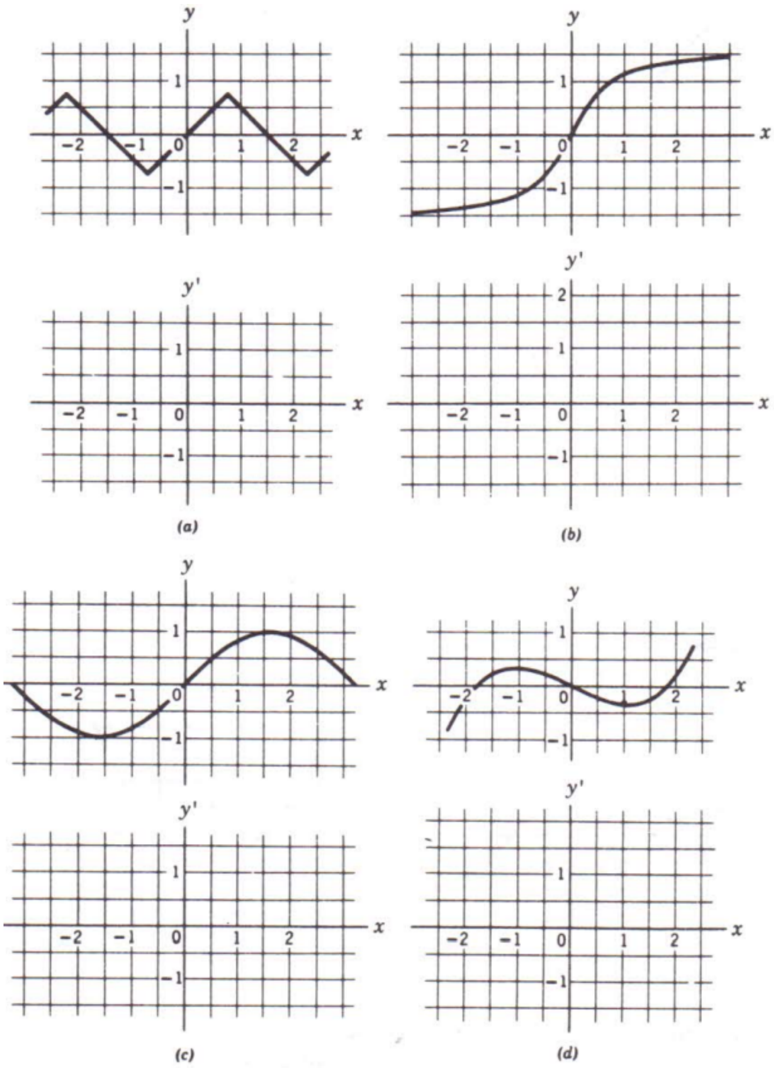


A inclinação do semicírculo não é bem comportada perto dos extremos de x, então vamos começar olhando para $x = 0$. Se desenharmos a reta tangente a curva em $x = 0$ é fácil ver que a inclinação é zero. Então $y' = 0$ em $x = 0$. Para $x > 0$ a reta tangente a curva tem inclinção negativa $y' < 0$. Quando x se aproxima de 1 a reta tangente fica cada vez mais inclinada, e y' se torna cada vez mais negativo. De fato, $y' \to -\infty$ quando $x \to 1$. A análise para $x < 0$ é similar a que acabamos de fazer.

Vá para **168**.

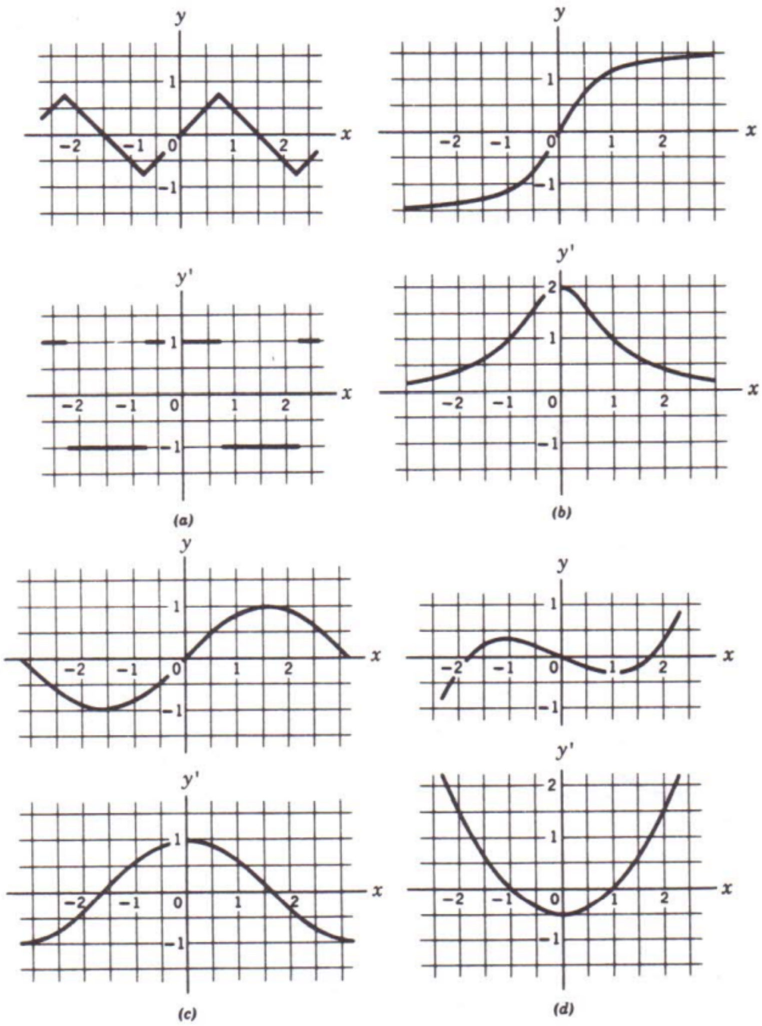
168

Se você entendeu todos os exemplos desta lição, pule para a próxima. Contudo, se você quer praticar um pouco mais, tente desenhar as derivadas de cada uma das funções abaixo. As respostas corretas são dadas em **169**.



169

Aqui se encontram as soluções para os problemas da lição **168**.



Você deve ser capaz de se convencer que as curvas para y' tem as características que esperamos comparando y' com a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em valores particulares de x.

Vá para **170**.

Diferenciação

170

Nós chegamos bem longe neste capítulo. De fato, todas as ideias principais envolvendo o cálculo diferencial foram introduzidas- limites, inclinação de curvas e derivadas- e você está preparada(o), em princípio, para resolver uma ampla gama de problemas. Contudo, usar a definição fundamental para calcular a derivada em todo problema que encontrar pela frente seria muito ineficiente. Também seria uma perda de tempo, já que existem diversas regras e truques para derivar funções aparentemente complicadas em pouco passos. Você vai aprender as regras de diferenciação mais importantes nas próximas seções. Também vai aprender como derivar algumas funções que ocorrem com tanta frenquência que é útil saber e lembrar de suas derivadas. Algumas dessas funções úteis são as trigonométricas, logaritmos e exponenciais. As seções restantes incluem alguns tópicos especiais, assim como aplicações do cálculo diferencial em diversos problemas. Pelo fim desse capítulo você deve ser capaz de usar o cálculo diferencial em muitas situações. Bom, vamos lá!

Vá para **171**.

171

Você consegue encontrar a derivada da seguinte função simples?

$$y = a \qquad\qquad (a \text{ é uma constante}).$$

$$y' = [\ 1 \mid x \mid a \mid 0 \mid \text{nenhuma das anteriores}\ ]$$

Se correto, vá para **173**.

Se errado, vá para **172**.[3]

172

Para encontrar y', voltemos para a definição de $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Se $y = a$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a - a}{\Delta x} = 0$$

(Lembrando que o significado de $f(x+\Delta x)$ é f calculado em $x + \Delta x$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Como $y' = 0$, o gráfico de y em função de x tem 0 de inclinação. (Figura 4 em **32** mostra isso graficamente.).

Vá para **173**.

173

Você acabou de ver que a derivada de uma constante é 0. Agora, tente encontrar a derivada dessa função:

---

[3]**Resposta: (171)** 0

$$y = ax \qquad\qquad\qquad\qquad (a = constante).$$

$$\frac{dy}{dx} = [\ 1 \mid x \mid a \mid 0 \mid ax \mid \text{nenhuma das anteriores}\ ]$$

Se acertar, pule para **175**.

Se errar, vá para **174**.

174

Aqui consta o procedimento correto:

$$y(x) = ax,$$

$$y(x + \Delta x) - y(x) = a(x - \Delta x) - ax = (ax - a\Delta x) - ax = a\Delta x.$$

Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

Agora encontre a derivada da função $f = -x$.

$$f' = [\ 1 \mid 0 \mid a \mid -1 \mid -x\ ]$$

Se correto vá para **175**. Se errado, note que esse problema é apenas um caso especial de **173**. Tente novamente e então

vá para **175**.

175

Agora nós iremos encontrar a derivada de uma função quadrática. Suponha

$$y = f(x) = x^2.$$

O que será y'?

Você deveria ser capaz de encontrar o resultado a partir da definição de derivada. Escolha a resposta correta:

$$y' = [\ 1 \mid x \mid 0 \mid x^2 \mid 2x\ ]$$

Se correto, vá para **177**.
Caso o contrário, vá para **176**.

176

Vamos recordar a definição de derivada:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

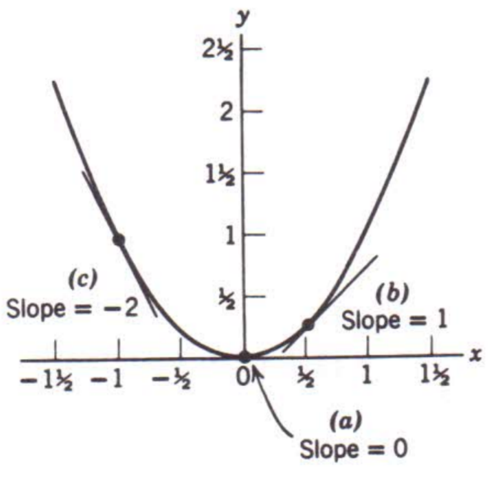
Nesse caso, $y(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2] - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x, \\
y' = \frac{dy}{dx} &= 2x.
\end{aligned}$$

Vá para **177**.

177

Nós encontramos o resultado que $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Para ilustrar isso, um gráfico de $y = x^2$ foi desenhado na figura abaixo. Como a inclinação (ou coeficiente angular) da curva em um ponto é simplesmente a derivada naquele ponto, cada uma das linhas retas tangentes a curva tem um coeficiente angular igual a derivada calculada no ponto de tangência.



A tangente que atravessa o ponto de origem do sistema de coordenadas tem um coeficiente angular de $(2 \times 0) = 0$. A reta (b) passa pelo ponto $x = \frac{1}{2}$ e tem um coeficiente angular $(2 \times \frac{1}{2}) = 1$. A reta (c) passa pelo ponto $x = -1$, e tem um coeficiente angular de $(2 \times -1) = -2$.

Vá para **178**.

178

Aqui está um problema que resume os resultados que obtemos até agora nessa seção (com um pouquinho de material novo).

Se $f = 3x^2 + 7x + 2$,

Encontre f'.

Resposta: $f' =$______________________.

Veja **179** para a resposta correta.

Respostas: **(173)** a **(174)** -1 **(174)** 2x

179

Se $f = 3x^2 + 7x + 2$, então $f' = 6x + 7$. Parabéns caso tenha obtido essa resposta. Continue para **180**. Caso contrário, leia a baixo.

Após você terminar esse capítulo, você saberá vários atalhos para calcular essa derivada. Entretanto, neste momento utilizaremos a definição básica:

$$f' = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$f(x) = 3x^2 + 7x + 2,$$

$$f(x + \Delta x) = 3[x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2] + 7(x + \Delta x) + 2$$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = 6x\,\Delta x + 3\,(\Delta x)^2 + 7\Delta x,$$

Logo:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{6x\,\Delta x + 3\,(\Delta x)^2 + 7\Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}(6x + 3\Delta x + 7)\\ &= 6x + 7.\end{aligned}$$

Vá para **180**.

180

Agora que nós encontramos as derivadas de x e x^2, o nosso próximo passo é encontrar a derivada de x^n, onde n é qualquer número. Nós iremos apresentar a regra aqui, mas você pode olhar no Apêndice A4 se você quiser ver como ela é demonstrada.

O resultado é

$$\boxed{\frac{dx^n}{dx} = xn^{n-1}}$$

Este importante resultado é valido para todos os valores de n, positivos, negativos, inteiros, racionais, irracionais, etc. Note que o nosso resultado prévio, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$, é um caso particular dessa regra para quando $n = 2$.

[E também, $\frac{d}{dx}(x) = 1$ é o caso particular para $n = 1$.]

Vá para **181**.

181

Agora façamos algumas aplicações.

Encontre $\frac{dy}{dx}$ para cada uma das seguintes funções.

$$y = x^3, \quad \frac{dy}{dx} = [3x^3 \mid 3x^2 \mid 2x^3 \mid x^2]$$

$$y = x^{-7}, \quad \frac{dy}{dx} = [-7x^{-6} \mid 7x^{-7} \mid -7x^{-8} \mid -6x^{-7}]$$

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = [-2x \mid \frac{2}{x} \mid -\frac{2}{x^3}]$$

Se você acertou todas essas, vá para **183**.

Se você cometeu algum erro, vá para **182**.

182

A solução desses problemas depende diretamente da regra da lição **180**. Aqui estão alguns detalhes.

Nós usamos nossa regra geral: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

$y = x^3$; nesse caso $n = 3$, então:

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

$y = x^{-7}$; aqui $n = -7$, então

$$\frac{d}{dx}(x^{-7}) = -7x^{-7-1} = -7x^{-8}$$

$y = 1/x^2 = x^{-2}$; aqui $n = -2$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

Agora tente resolver esses problemas:

$$y = \frac{1}{x}\ , \quad \frac{dy}{dx} = [1 + \frac{1}{x} \mid -\frac{1}{x} \mid -\frac{1}{x^2} \mid 2]$$
$$y = -\frac{1}{3}x^{-3}\ , \quad \frac{dy}{dx} = [x^{-4} \mid -3x^{-4} \mid -\frac{1}{4}x^{-2} \mid x^{-2}]$$

Se você acertou, vá para **183**.

Se errou, volte para **180** e continue a partir daí.

183

Aqui vai outra aplicação.

Se $y = x^{1/2}$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

A resposta é: $[x^{-1/2} \mid \frac{1}{2}x^{-1/2} \mid \frac{1}{2}x \mid$ nenhuma das anteriores$]$.

Se você acertou, vá para **185**.

Se você errou, vá para **184**

184

A regra $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ é verdade para todo valor de n.

Nesse caso, $n = 1/2$,

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

Tente esse problema:

$$\frac{d}{dx}(x^{2/3}) = [x^{-1/3} \mid \frac{2}{3}x^{-2/3} \mid \frac{2}{3}x^{-1/3} \mid x^{5/3}]$$

vá para **185**

Algumas regras de diferenciação

185

Nessa seção aprenderemos uma série de regras rápidas de diferenciação sem necessitar passar todo caminho da definição de derivada. Algumas dessas regras são derivadas aqui, enquanto outras foram derivadas no Apêndice A.

No resto dessa seção, nós faremos $u(x)$ e $v(x)$ duas funções diferenciáveis que dependem de x.

vá para **186**

186

Nossa primeira regra permitirá que meçamos a derivada da soma de u e v, em termos de suas derivadas. Nós iremos derivar a regra aqui. Seja

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

Então

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} [u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x)]\frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} [u(x+\Delta x)-u(x)]\frac{1}{\Delta x}+\lim_{\Delta x \to 0} [v(x+\Delta x)-v(x)]\frac{1}{\Delta x} =$$

Portanto

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}}$$

Se você deseja uma justificativa rigorosa da manipulação dos limites na prova acima, veja o Apêndice A2.

Vá para **187**.

187

Agora usemos a regra acima computando a derivada da seguinte função (você precisará usar alguns resultados da última seção):

$$y = x^4 + 8x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{6cm}}$$

Para encontrar a resposta correta, vá para a lição **188**.

Respostas: **(181)**$3x^2, -7x^{-8}, -2/x^3$ **(182)** $-1/x^2, x^{-4}$

(183)$\frac{1}{2}x^{-1/2}$ **(184)**$\frac{2}{3}x^{-1/3}$

188

A resposta corrreta da questão da lição **187** é

$$\frac{d}{dx}(x^4 + 8x^3) = 4x^3 + 24x^2$$

Se você obteve essa resposta, vá para a lição **189**. Caso contrário, continue nessa lição para encontrar seu erro.

Nosso problema é encontrar a derivada da soma de duas funções. Para fazer uso da regra da lição **189** na notação usada lá, devemos supor que $u = x^4$, $v = 8x^3$.

Então

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{d}{dx}(x^4 + 8x^3) = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(8x^3)$$

Você deve ser capaz de avaliar essas duas derivadas a partir dos resultados da última seção:

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3, \quad \frac{d}{dx}(8x^3) = 24x^2.$$

Portanto, $\frac{d}{dx}(x^4 + 8x^3) = 4x^3 + 24x^2$.

Vá para **189**

189

Agora que podemos diferenciar a soma de duas funções, nosso próximo desafio será aprender a diferenciar o produto de funções. Para que fique claro, nós queremos expressar $\frac{d}{dx}(uv)$ em termos de $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, u e v. O resultado, conhecido como regra do produto, será postulado aqui. Olhe o apêndice A6 se você deseja ver como ela é derivada.

Regra do produto

$$\boxed{\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = uv' + vu'}$$

Vá para **190**

190

Aqui vai um exemplo em que a regra do produto é usada. Suponha que:

$$y = (x^5 + 7)(x^3 + 17x)$$

O problema é encontrar $\frac{dy}{dx}$. Se fizermos $u = x^5 + 7$, $v = x^3 + 17x$, então $y = uv$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Dado que $\frac{du}{dx} = 5x^4$ e $\frac{dv}{dx} = 3x^2 + 17$, nosso resultado é

$$\frac{dy}{dx} = (x^5 + 7)(3x^2 + 17) + (x^3 + 17x)(5x^4)$$

Note que é usualmente considerada boa prática simplificar (juntar termos com o mesmo expoente em x) expressões como essa. Mas, para ganhar tempo nesse capítulo, você não precisa fazer isso.

Usando a regra do produto, podemos derivar de outra maneira um resultado já encontrado: $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Se fazemos $u = x$ e $v = x$, então a regra do produto nós diz que

$$\frac{d}{dx}(x^2) = x\frac{dx}{dx} + x\frac{dx}{dx} = 2x$$

Vá para **191**

191

Use a regra do produto para encontrar a derivada $\frac{d}{dx}[(3x + 7)(4x^2 + 6)]$

Resposta: ________________

Vá a **192** para a solução.

192

A resposta é

$$(3x + 7)(8x + 6) + (4x^2 + 6x)(3)$$

Se você obteve este resultado, ou um equivalente, vá a **194**. Caso contrário, leia abaixo.
O problema é derivar o produto de $(3x + 7)$ e $4x^2 + 6$. Suponha que tenhamos $u = 3x + 7$ e $v = 4x^2 + 6$. Então $u' = 3$, $v' = 8x + 6$.
Assim,

$$\frac{d}{dx}(uv) = uv' + vu' = (3x + 7)(8x + 6) + (4x^2 + 6x)(3)$$

Tente este problema:
O que é $\frac{d}{dx}[(2x + 5)(x^5)]$?

Resposta: ________________

Vá a **193** para a solução correta.

193

$$\frac{d}{dx}[(2x + 5)(x^5)] = (2x + 5)(5x^4) + (x^5)(2).$$

O método para obter isto é como o mostrado na lição **192**. Você pode usar a regra na lição **180** para diferenciar x^n e assim encontrar $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$.

Vá a **194**.

194

Na lição **189** aprendemos a regra do produto: $(uv)' = uv' + vu'$. As vezes é necessário derivar o *quociente* de duas funções, $u(x)/v(x)$. Aqui está a regra. Ela será provada mais tarde nessa seção, na lição **206**.
Regra do quociente

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2}}$$

Vá a **195**.

195

Resolva o seguinte problema:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1 + x}{x^2}\right) = \underline{\hspace{4cm}}$$

Para ver a resposta correta, vá a **196**.

196

A resposta do problema em **195** é

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}.$$

Caso tenha acertado, vá a **198**.

Caso contrário, você deve ir a **197** para ajuda.

197

Seja $u = 1 + x$, $v = x^2$. Então $\frac{du}{dx} = 1$, $\frac{dv}{dx} = 2x$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{x^2 - (1+x)(2x)}{x^4} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}(1+x) \\ &= -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Vá a **198**.

198

Nesta lição aprenderemos uma regra útil para encontrar a derivada de um 'função de uma função'. Suponha que f é uma variável que depende de u, e que u por sua vez depende de x. Então f também depende de x. A seguinte regra é provada no Apêndice A7.

Regra da cadeia

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}}$$

Esta formula é chamada de *regra da cadeia* porque faz uma ligação entre derivadas com variáveis relacionadas. Ela é uma das regras mais usadas em cálculo diferencial.

Aqui está um exemplo: Suponha que queiramos derivar $f(x) = (x + x^2)^2$. Esta é uma função complicada. Ela fica muito mais simples se fizermos $u = x + x^2$, e então $f(x) = u^2$.

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^2)\frac{du}{dx} = 2u\frac{du}{dx}.$$

Então substituímos o valor $u = x + x^2$, e $\frac{du}{dx} = 1 + 2x$, para obter

$$\frac{df}{dx} = 2(x + x^2)(1 + 2x).$$

(Você pode conferir que a regra da cadeia dá o resultado correto neste caso multiplicando a expressão para f e a derivando. Você encontrará uma resposta equivalente ao $\frac{df}{dx}$ encontrado acima.)

Cuidado: A regra da cadeia seria uma regra simples se $\frac{df}{dx}$ e $\frac{du}{dx}$ pudessem ser tratadas como razões entre quantidades independentes df,dx e du. No entanto, esse não é o caso; não se pode cancelar os du's no numerador e denominador. (Ainda assim, essa ficção é uma maneira bem útil de se lembrar da regra da cadeia!)

Vá para **199**.

199

Aqui estão mais alguns exemplos do uso da regra da cadeia.

1. Encontre $\frac{d}{dt}(\sqrt{1+t^2})$.
   Seja $w = \sqrt{1+t^2}$, e $u = 1 + t^2$, de modo que $w = \sqrt{u}$. Então

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{dw}{du}\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2t) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}2t = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.\end{aligned}$$

   Aqui usamos t como uma variável, mas obviamente não faz diferença o que chamamos as variáveis.

2. Seja $v = \left(q^3 + \frac{1}{q}\right)^{-3}$; encontre $\frac{dv}{dq}$.
   Este problema pode ser simplificando fazendo $p = q^3 + \frac{1}{q}$ e $v = p^{-3}$. Com estes símbolos a regra da cadeia é

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dq} &= \frac{dv}{dp}\frac{dp}{dq} = -3p^{-4}\frac{dp}{dq} == 3p^{-4}\left(3q^2 - \frac{1}{q^2}\right) \\ &= -3\left(q^3 + \frac{1}{q}\right)^{-4}\left(3q^2 - \frac{1}{q^2}\right).\end{aligned}$$

   O seguinte exemplo não será explicado, já que você deve ser capaz de avaliá-lo por inspeção.

3. $\frac{d}{dx}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

Vá para **200**.

200

Agora tente o seguinte problema:
Qual expressão corretamente dá

$$\frac{d}{dx}\left(2x+7x^2\right)^{-2}$$

(a) $-2(2+14x)^{-3}$

(b) $-2(2+14x)^{-2}(2x+7x^2)$

(c) $(2x+7x^2)^{-3}(2+14x)$

(d) $-2(2x+7x^2)^{-3}(2+14x)$

A resposta correta é [a | b | c | d]

Caso acerte, vá para **203**.

Caso contrário, vá para **201**.

201

Aqui está como resolver o problema da lição **200**. Suponha que $w = u^{-2}$ e $u = 2x+7x^2$. Então,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 + 14x.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(u^{-2})}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\ &= -2u^{-3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2(2x+7x^2)^{-3}(2+14x).\end{aligned}$$

Tente este problema: encontre $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}$, onde $w = 12q^4 + 7q$ e $q = s^2 + 4$.

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = \underline{\hspace{4cm}}\,.$$

Vá para **202** para a resposta.

202

O problema da lição **201** pode ser resolvido utilizando a regra da cadeia:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}.$$

Nos foi dado que $w = 12q^4 + 7q$ e $q = s^2 + 4$, logo

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q} = 18q^3 + 7 \text{ e } \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = 2s.$$

Substituindo os termos acima, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = (18q^3 + 7)(2s) = [18(s^2 + 4)^3 + 7](2s).$$

Se você escreveu esse resultado, vá para **203**. Se você errou, você deveria estudar as últimas lições para ter certeza de que entendeu a aplicação da regra da cadeia. Não se confunda com os nomes das variáveis.

Vá para **203**.

203

O próximo problema é encontrar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{v}\right)$ em termos de v e $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, onde v depende de x. A resposta pode ser encontrada utilizando a regra do quociente, porém, como vamos utilizá-la para *provar* a regra do quociente, não utilize esta regra aqui. Tente usar a regra da cadeia em vez disso.

Qual das resposta a seguir responde corretamente $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{v}\right)$?

$$\left[-\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \mid \frac{1}{\mathrm{d}v/\mathrm{d}x} \mid \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} \mid -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \mid \text{nenhuma das alternativas}\right]$$

Se acertar, vá para **205**.

Se errar, vá para **204**.

204

Para encontrar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{v}\right)$, nós aplicamos a regra da cadeia da seguinte maneira[4]. Suponha $f = \frac{1}{v} = v^{-1}$. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, mas $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}(v^{-1})}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{v^2}$, portanto $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

Vá para **205**.

205

Agora, combinando o resultado da última lição com o que você aprendeu previamente, você deveria poder derivar a expressão para a derivado do quociente de duas funções. Essa é uma relação extremamente importante. Tente trabalhá-la a sós.

Encontre $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right)$ em termos de u, v, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ e $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \underline{\hspace{4cm}}\ .$$

Para verificar a resposta, vá para **206**.

206

---

[4]**Resposta: (200)** d.

Você deveria ter obtido a seguinte regra do quociente que foi apresentada sem demonstração na lição **194**, apesar de escrita de outra forma.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Se você escreveu isso ou algo parecido, vá para **207**. Caso contrário, estude a dedução a seguir.

Se considerarmos $p = \frac{1}{v}$, então a nossa derivada é o produto de duas funções.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(up) = u\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Porém, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, como na lição **204**, logo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = -\frac{u}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{v(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x) - u(\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)}{v^2}.$$

Vá para **207**.

207

Antes de irmos para novos assuntos, vamos resumir todas as regras de derivação que utilizamos até agora. Preencha os espaços em branco. a e n são constantes, u e v são variáveis dependentes de x, w depende de u, o que, no final a faz depender de x.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a) &= \underline{\hspace{5cm}}\,. & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v) &= \underline{\hspace{5cm}}\,.\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax) &= \underline{\hspace{5cm}}\,. & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) &= \underline{\hspace{5cm}}\,.\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) &= \underline{\hspace{5cm}}\,. & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) &= \underline{\hspace{5cm}}\,.\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) &= \underline{\hspace{5cm}}\,. & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[w(u)] &= \underline{\hspace{5cm}}\,.
\end{aligned}$$

Vá para **208**.

208

Aqui estão as respostas corretas[5]. A lição em que a relação foi introduzida está entre parenteses.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a) = 0. \quad (\mathbf{172}) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \quad (\mathbf{186})$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}ax} = a. \quad (\mathbf{174}) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \quad (\mathbf{189})$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2} = 2x. \quad (\mathbf{176}) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x) - u(\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)}{v^2}. \quad (\mathbf{194})$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n} = nx^{n-1}. \quad (\mathbf{180}) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[w(u)] = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \quad (\mathbf{198})$$

Derivando funções trigonométricas

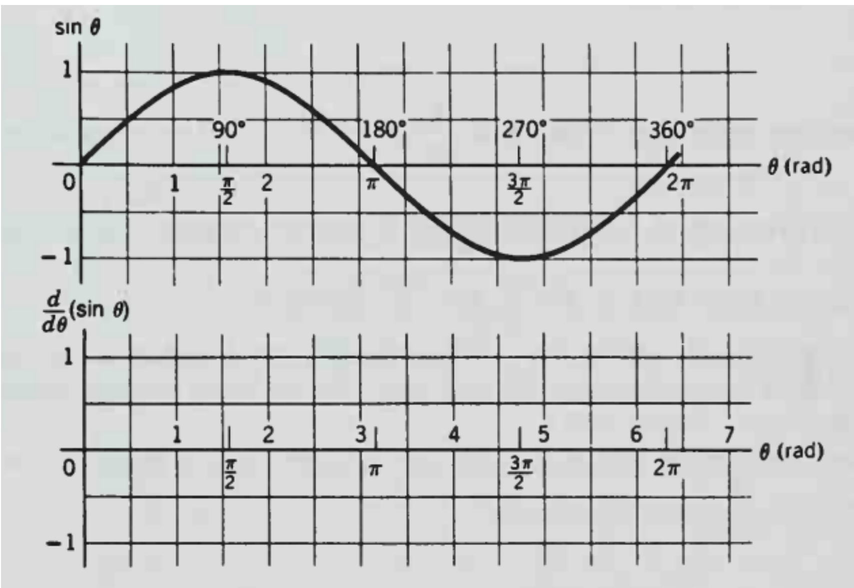
209

Funções trigonométricas ocorrem em tantas aplicações que é útil saber suas derivadas. Por exemplo, nós gastaríamos de saber $\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}$. Por definição,

$$\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\sin(\theta+\Delta\theta) - \sin\theta}{\Delta\theta}.$$

Não é exatamente óbvio como avaliar essa expressão, então vamos utilizar outra abordagem por enquanto e tentar adivinhar *geometricamente* qual resultado deveríamos estar procurando em um gráfico de $\sin\theta$.

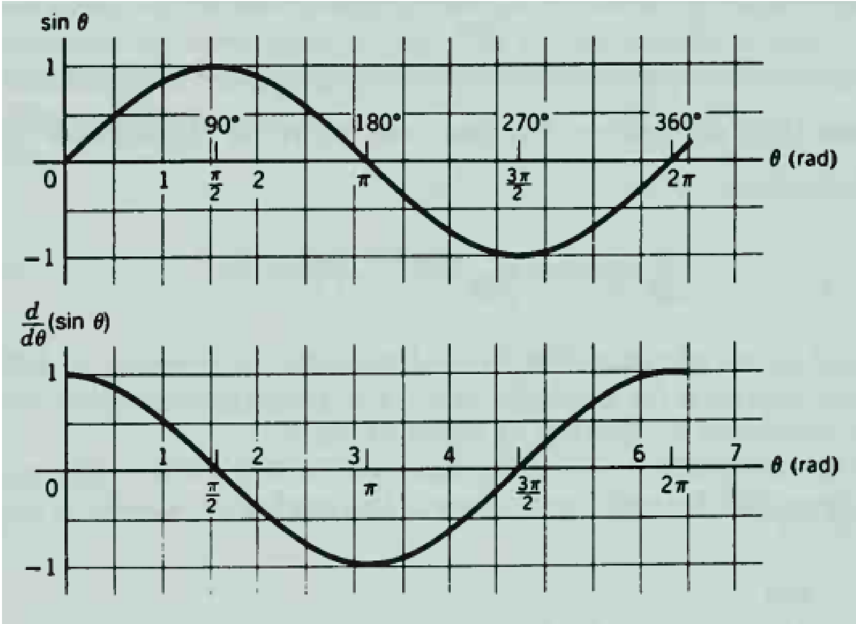
Aqui está um gráfico de $\sin\theta$vs θ no intervalo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. ($\theta$ é medido em radianos, mas, por referência, alguns ângulos são mostrados em graus.)



[5]**Resposta: (203)** $-\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

Desenhe um rascunho de $\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ no espaço designado. Para checar seu rascunho, vá para **210**.

210



Aqui estão os desenhos de $\sin\theta$ e $\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}$. Note que onde a inclinação de $\sin\theta$ é maior, em 0 e 2π, $\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ possui seu maior valor, e que onde a inclinação é nula, em $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$, $\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ é 0.

[Se o seu rascunho ficou muito diferente do desenho acima, você deveria revisar as lições **160** e **169**. Esse problema é parecido com o problema (c) da lição **168**.]

Agora, ao olhar os gráficos, talvez você possa adivinhar a resposta correta para $\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}$. Você pode?

$$\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Vá para a lição **211** para ver se sua resposta está correta.

211

Aqui está a regra:

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$$

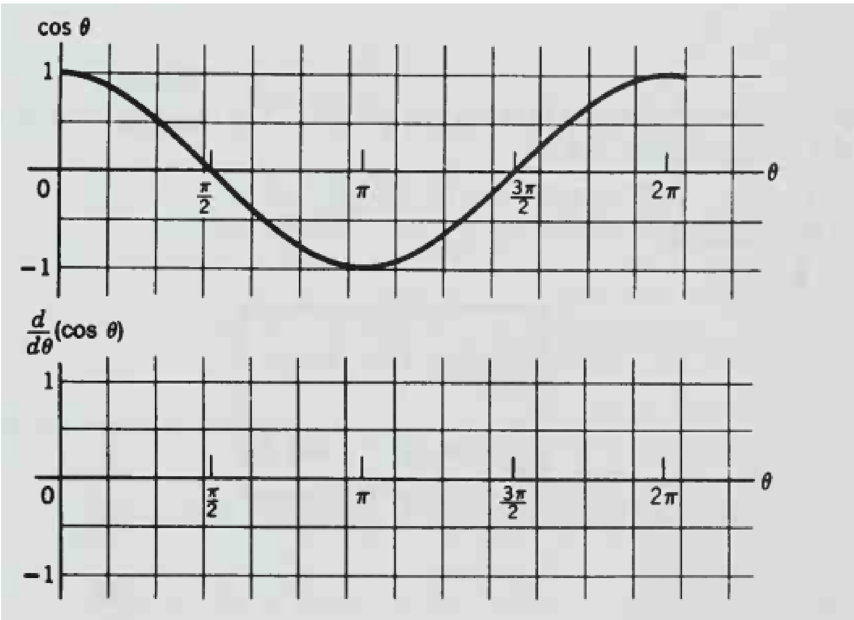
Parabéns se você advinhou esse resultado na última lição! Se você chegou em outro resultado, estude os desenhos da lição **209** e compare a segunda com o gráfico de $\cos\theta$ mostrado abaixo.

A prova formal que $\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$ é dada no Apêndice A4. É importante perceber que essa relação é verdade apenas quando o ângulo é medido em radianos-isso explica porque o radiano é uma unidade tão útil.

Vamos tentar adivinhar o resultado para $\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)$ de um gráfico de $\cos\theta$.

Desenhe um esboço de $\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)$ no espaço provido, e faça um chute do seguinte resultado.

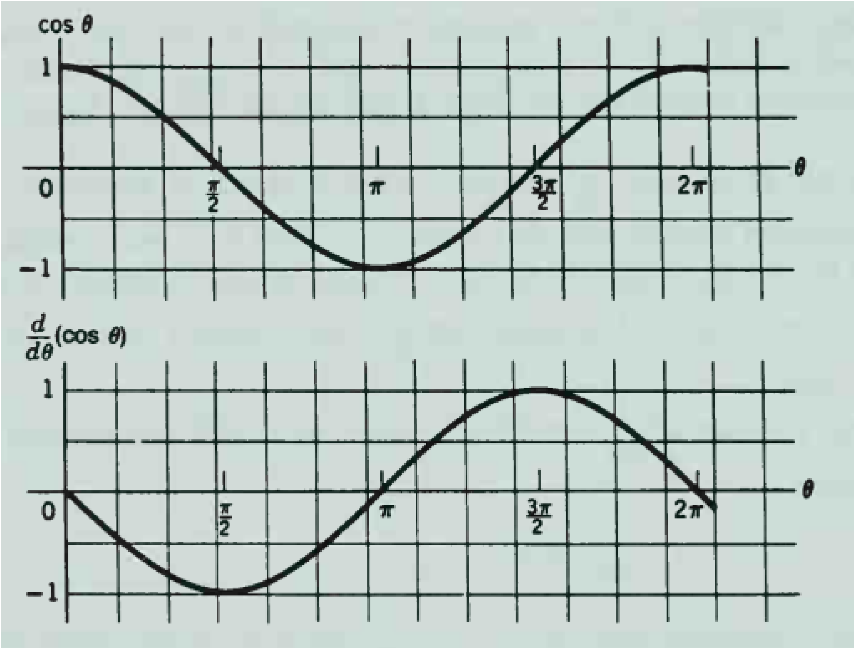
$$\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = \underline{\hspace{6cm}}$$



vá para **212**.

212

Aqui estão os gráficos de $\cos\theta$ e $\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)$. O resultado é $\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta$,



Como deveria ser razoável pelo gráfico. A relação foi formalmente provada no Apêndice A5.

Para sumarizar:

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta \\[2ex] \dfrac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta\end{array}}$$

Usando esses resultados, encontre $\frac{d}{d\theta}(\tan\theta)$.(Dica: use que $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ e aplique a regra do quociente, da lição **194**.)

$$\frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = \underline{\hspace{6cm}}$$

vá para **213**.

213

Usando as dicas da lição **212** temos que

$$\frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{\cos\theta\frac{d}{d\theta}(sin\theta) - \sin\theta\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)}{\cos^2\theta} =$$

$$\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$$

Agora encontre a resposta correta:

$$\frac{d}{d\theta}(\sec\theta) = [\sec\theta\tan\theta \mid -\sec\theta\tan\theta \mid \sec\theta]$$

Se acertou, vá para **215**.

Se errou, vá para **214**.

214

Usando a definição $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, e o resultado da lição **204**, nós temos

$$\frac{d}{d\theta}(\sec\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) = -\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) =$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\cos\theta} = \sec\theta\tan\theta$$

(Todas três últimas expressões são igualmente aceitáveis.)

vá para **215**

215

Escolha a resposta correta:

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)^2 = [\sin\theta \mid 2\cos\theta \mid \cos\theta^2 \mid 2\sin\theta\cos\theta]$$

Se correto, vá para **217**.

Se errado, vá para **216**.

216

Você poderia ter analisado o problema dessa forma:

Suponha que façamos $u(\theta) = \sin\theta$. Então $\frac{du}{d\theta} = \cos\theta$, e

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)^2 = \frac{d}{d\theta}u^2 = \frac{d}{du}(u^2)\frac{du}{d\theta} =$$

$$2u\frac{du}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$$

Onde você errou? Encontre seu erro e tenha certeza que você o entendeu. Então

Vá para **217**.

Respostas (213): $\sec\theta\tan\theta$

217

Qual desses é $\frac{d}{d\theta}(\cos\theta^3)$?

$$[\cos\theta\sin\theta^3 \mid -3\theta^2\sin\theta^3 \mid 3\cos^2\theta^3\sin\theta^3 \mid 3\cos^2\theta]$$

Se acertou, pule para **221**.

Se errou, vá para **218**.

218

Você se esquece como se usa a regra da cadeia para a diferenciação da função de uma função? Podemos pensar em $\cos\theta^3$ como uma função de uma função. Suponha que escrevamos isso da seguinte maneira:

$$w = \cos u, \quad u = \theta^3.$$

Então

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{dw}{du}\frac{du}{d\theta},$$
$$\frac{dw}{du} = -\sin u = -\sin\theta^3, \quad \frac{du}{d\theta} = 3\theta^2.$$

Então

$$\frac{d}{d\theta}(\cos\theta^3) = -3\theta^2\sin\theta^3$$

Vá para **219**.

219

Se ω(letra grega omega) é uma constante, qual expressão fornece corretamente $\frac{d}{dt}(\sin\omega t)$?

$$[\cos\omega t \mid \omega\cos\omega t \mid \sin\omega t \mid \text{nenhuma das anteriores}]$$

Se correto, vá para a lição **221**.

Caso contrário, vá para **220**.

220

Para resolver o problema em **219**, seja $w = \sin u$, $u = \omega t$,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{du}\frac{du}{dt} = \cos u \times \frac{d}{dt}(\omega t) = \omega \cos \omega t$$

221

Antes de prosseguir para a próxima seção, vamos enunciar novamente as relações importantes apresentadas nesta seção:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta, &(2.3)\\ &\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta. &(2.4)\end{aligned}}$$

No mais, existem mais duas funções que, de tão recorrentes, faz-se saudável saber suas derivadas "de cabeça": a função logarítmica e a função exponencial. Caso queira aprender sobre elas, Vá para a lição **222**.

Derivação de logaritmos e exponenciais

222

Nossa próxima tarefa é aprender como derivar logaritmos. Caso sinta-se inseguro sobre logaritmos, revise as lições **75-95** do Capítulo 1 antes de prosseguir para a próxima lição.

Vá para a lição **223**.

Respostas: (**214**) $2\sin\theta\cos\theta$, (**217**) $-3\theta^2\sin\theta^3$, (**219**) $\omega\cos\omega t$

223

Nesta seção, iremos trabalhar com logaritmos naturais, $\ln x = \log_e x$, que foram definidos na lição **94**. A base $e = 2.71828\ldots$ foi discutida na lição **109**.

Aqui está uma tabela contendo os valores de $\ln x$ para alguns valores de x:

x	$\ln x$	x	$\ln x$
1	0.000	30	3.40
2	0.69	100	4.61
e	1.00	300	5.70
3	1.10	1000	6.91
10	2.30	3000	8.01

Use a tabela acima e as regras básicas de manipulação de logaritmos para encontrar a resposta mais próxima dos valores dos logaritmos abaixo:

$$\ln 6 = [2.2 \mid 3.1 \mid 6/e \mid 1.79]$$

$$\ln \sqrt{10} = [1.15 \mid 2.35 \mid 2.25 \mid 1.10]$$

$$\ln 300^3 = [126 \mid 185 \mid 17.10 \mid 3.41]$$

Se todas suas respostas estão corretas, vá para a lição **225**.

Se você cometeu algum erro, vá para a lição **224**.

224

As regras de manipulação de logaritmos encontram-se na lição **91**. Veja que elas valem para logaritmos em qualquer base, o que inclui a base e.

$$\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3 = 0.69 + 1.10 = 1.79,$$

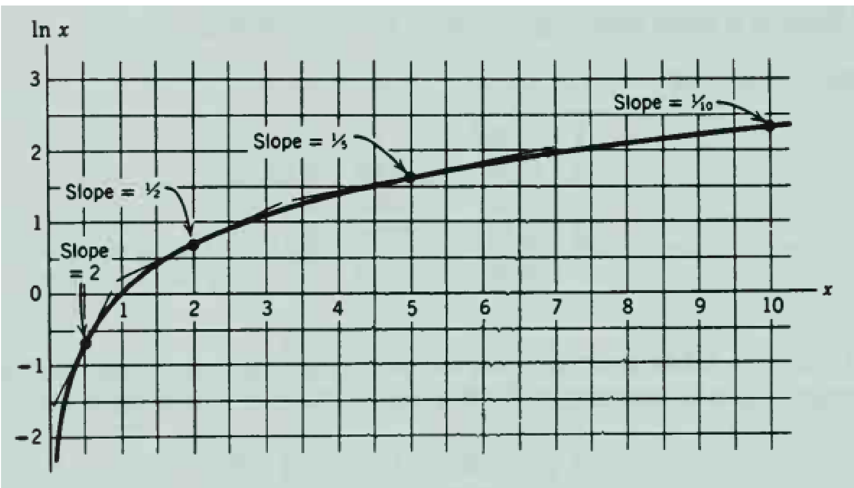
$$\ln \sqrt{10} = \ln 10^{1/2} = \frac{1}{2} \ln 10 = \frac{1}{2} \times 2.30 = 1.15,$$

$$\ln 300^3 = 3 \ln 300 = 3 \times 5.70 = 17.10.$$

Vá para a lição **225**.

225

O gráfico de $\ln x$ em termos de x encontra-se abaixo. Caso sua calculadora providencie a função $\ln x$, verifique algum dos pontos do gráfico.



Você pode avaliar de forma qualitativa algumas propriedades de $\frac{d}{dx}(\ln x)$ apenas olhando o gráfico[6] acima. Para valores suficientemente pequenos de x, esta derivada assume valores grandes; para o caso em que x assume valores grandes, observamos um comportamento oposto.

Na figura acima, encontram-se algumas retas tangentes a alguns pontos. O valor das inclinações dessas retas encontram-se na tabela abaixo:

x	Inclinação
1/2	2
2	1/2
5	1/5
10	1/10

Quem sabe, você consiga adivinhar a fórmula para $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)$. Tente preencher a lacuna abaixo:

$$\frac{d}{d\theta}(\ln x) = \underline{\hspace{4cm}}$$

Para aprender a fórmula correta, vá para a lição **226**.

Respostas: (**223**) 1.79, 1.15, 17.10

226

Aqui está a fórmula para a derivada do loratigmo natural:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Caso você não tenha adivinhado este resultado, você pode verificar que ele é compatível com os valores apresentado na tabela da lição **225**.

A razão para que o número e seja de grande serventia como base para logaritmos é que ele dá origem à expressão acima. Essa relação é demonstrada no Apêndice A9. Devido à sua grande relevância, é saudável ter essa expressão em mente.

Vá para a lição **227**.

227

Pule para a lição **228** caso você não possua uma calculadora científica. Por meio de uma calculadora, você pode verificar numericamente que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$. O procedimento é este: calcule o valor $[\ln(x+\Delta) - \ln x]/\Delta$ para valores sucessivamente menores de Δ. O resultado deve aproximar-se de $1/x$.

[6] N.T.: 'Slope' = inclinação em inglês.

Tente fazer isso para $x = 5$ (ou para qualquer valor que você deseje). Para $x = 5$, $\ln x = 1.6094$ e $\ln' x = 1/5 = 0.2$.

Δ	$\ln(x + \Delta) - \ln x$	$\frac{\ln(x+\Delta)-\ln x}{\Delta}$
2		
1		
0.1		
0.01		

Vá para a lição **228**.

228

Tente resolver o seguinte problema: qual das expressões abaixo resulta de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^2)$?

$$[2 \ln x \mid \frac{2}{x} \mid \frac{1}{x^2} \mid \frac{2}{x^2} \mid \frac{2}{x} \ln x]$$

Caso tenha acertado, vá para a lição **230**.

Caso contrário, vá para a lição **229**.

229

A solução do problema anterior é bem direta. Nós poderíamos fazer uso da regra da cadeia. No entanto, vamos resolvê-lo de outro jeito.

Já que $\ln x^2 = 2 \ln x$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2 \ln x = \frac{2}{x}.$$

Você é capaz de resolver este problema:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)^2 = [2 \ln x \mid \frac{2 \ln x}{x} \mid \frac{2}{\ln x} \mid \textit{nenhuma das anteriores}]$$

Caso tenha acertado, vá para a lição **231**.

Caso contrário, vá para a lição **230**.

230

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)^2 = 2\ln x\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

Vá para a lição **231**.

231

(a) $\dfrac{\mathrm{d}\ln r}{\mathrm{d}r} =$ ________________.

(b) $\dfrac{\mathrm{d}\ln 5z}{\mathrm{d}z} =$ ________________.

Para as soluções, vá para **232**.

232

As respostas corretas são

$$\text{(a) } \frac{1}{r}; \qquad \text{(b) } \frac{1}{z}.$$

Se você acertou ambos e está se dando bem, sinta-se à vontade para pular para a lição **234**. Se errou algum,

Vá para **233**.

233

(a) $\dfrac{\mathrm{d}\ln r}{\mathrm{d}r} = \dfrac{1}{r}$ pela mesma razão que $\dfrac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$. Não faz diferença se a variável é r ou x.

(b) A forma mais simples de achar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln 5z)$ é relembrar que $\ln 5z = \ln 5 + \ln z$.

Assim,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln 5z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln 5) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln z) = 0 + \frac{1}{z} = \frac{1}{z}.$$

Vá para **234**.

234

Outra função que nós gostaríamos de derivar é

$$y = a^x \qquad (a \text{ é a constante}).$$

(Atenção: Não confunda a^x com x^a, onde x é a variável e a é constante.)

Nós podemos derivar a^x tomando o logaritmo natural:

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a.$$

Agora vamos derivar os dois lados da equação com respeito a x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \ln a,$$

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln a,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Dessa forma,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln a.$$

Vá para **235**.

235

A lição passada resulta em

$$\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = a^x \ln a.$$

Um caso particularmente simples mas importante é quando $a = e$. Como $\ln e = 1$,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x.}$$

[7]

Com o acima, você consegue calcular as seguintes expressões?

(a) $\dfrac{\mathrm{d}e^{cx}}{\mathrm{d}x} =$ ____________

(b) $\dfrac{\mathrm{d}e^{-x}}{\mathrm{d}x} =$ ____________

Veja **236** para as soluções.

236

As respostas são

(a) $\dfrac{\mathrm{d}e^{cx}}{\mathrm{d}x} = ce^{cx}$

[7] Respostas: (**228**) $\frac{2}{x}$ (**230**) $\frac{2\ln x}{x}$

e

(b) $\dfrac{\mathrm{d}e^{-x}}{\mathrm{d}x} = -e^{-x}$

Se você acertou ambos, vá para **237**. Caso contrário, continue aqui.

O resultado de (a) é obtido definindo $u = cx$ e seguindo o seguinte procedimento comum de composição de funções (ou seja, usando a regra da cadeia, lição **194**). Assim

$$\frac{\mathrm{d}e^{cx}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}e^{u}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^{u}c = ce^{cx}.$$

O resultado (b) é um caso especial de (a) com $c = -1$.

Vá para **237**.

237

Pule para a lição **238** se você não tem uma calculadora científica.

Podemos confirmar numericamente que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{x}) = e^{x}$ da mesma maneira que verificamos que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ na lição **227**. Calcule o que vem a seguir, para alguns valores de x, por exemplo, $x = 10$. Observe se a última coluna tende para $e^{10} = 22,026.46\ldots$.

Δ	$e^{x+\Delta}$	$\dfrac{e^{x+\Delta} - e^{x}}{\Delta}$
1		
0.1		
0.01		

Vá para **238**.

238

Se $z = \frac{1}{\ln x}$, quanto é $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$?

Circule a resposta correta.

$$\left[\frac{1}{x\ln x} \;\middle|\; \frac{-x}{(\ln x)^2} \;\middle|\; \frac{-1}{x(\ln x)^2} \;\middle|\; \frac{\ln x}{x^2}\right]$$

Se acertou, vá para **240**.

Caso contrário, vá para **239**.

239

Uma maneira de achar a derivada de $\frac{1}{\ln x}$ é usar a regra da cadeia.

Defina $u = \ln x$. Então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\ln x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\mathrm{d}u^{-1}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{u^2}\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{x(\ln x)^2}.$$

Vá para **240**.

240

Um número razoável de relações foram usadas nesta seção e talvez seria bom fazer uma revisão antes de continuarmos. Aqui está a lista. As mais importantes estão destacadas em caixas.

$$e = 2.71828\ldots,$$

$$\ln x = \log_e x,$$

$$\ln(x) = 2.303\ldots\log_{10} x,$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x},}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln a,$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x.}$$

Vá para **241**.

241

Aprendemos como diferenciar as funções mais comumente utilizadas. O restante deste capítulo será gasto em alguns tópicos especiais relacionados ao uso de derivadas. Contudo, você pode querer um pouco mais de prática em diferenciação antes de seguir em frente. Se for o caso, veja os problemas de 34 até 58. Quando estiver pronto,

Vá para **242.**

Derivadas de ordens superiores

242

Suponha que y dependa de x e que temos a derivada $\frac{dy}{dx}$. Se em seguida diferenciarmos $\frac{dy}{dx}$ com respeito a x, o resultado é chamado de *derivada segunda* de y com respeito a x, e é escrita como $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Consegue resolver o problema que segue?

$$\text{Se } y = 2x^3, \text{ então } \frac{d^2y}{dx^2} = [6x^2 \mid 12x \mid 0 \mid x^2 \mid x]$$

Se acertou, vá para **245**.

Se errou, vá para **243**.

243

Aqui está como resolver o problema em **242**.

$$\begin{aligned} y &= 2x^3 \\ \frac{dy}{dx} &= 6x^2 \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d}{dx}(6x^2) = 12x. \end{aligned}$$

Tente este:

$$\begin{aligned} y &= x + \frac{1}{x} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= [-\frac{1}{x^2} \mid \frac{1}{x} \mid + \frac{2}{x^3} \mid \text{nenhuma das alternativas}] \end{aligned}$$

Se acertou, vá para **245**.

Se errou, vá para **244**.

[8]

244

Aqui está a solução para **243**.

$$\begin{aligned} y &= x + \frac{1}{x}, \\ \frac{dy}{dx} &= 1 - \frac{1}{x^2}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 0 - 1\left(\frac{-2}{x^3}\right) = \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

---

[8] **Resposta: (238)** $\frac{-1}{x(\ln x)^2}$

Vá para **245**.

245

Um exemplo de segunda derivada com o qual talvez esteja familiarizado é a *aceleração*. Velocidade é a taxa de variação da posição com respeito ao tempo.

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

Aceleração a é a taxa de variação da velocidade com respeito ao tempo. Então

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Segue então que

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Vá para **246**.

246

A posição de uma partícula é dada por

$$S = A \sin \omega t.$$

A e ω são constantes. Encontre a aceleração.

Resposta:[0 | $A\omega \cos \omega t$ | $(A\omega \cos \omega t)^2$ | $-A\omega^2 \sin \omega t$].

Se acertou, vá para **248**.

Se errou, vá para **247**.

247

$$\text{Aceleração} = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(A \sin \omega t).$$
$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(A \sin \omega t) = A\omega \cos \omega t \quad (\text{Ver lição } \mathbf{219}),$$
$$\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(A\omega \cos \omega t) = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

Vá para **248**.

248

Não há nada essencialmente novo sobre uma segunda derivada. De fato, podemos definir derivadas de qualquer ordem n, onde n é um inteiro positivo. Então, $\frac{d^n f}{dx^n}$ é a n-ésima derivada de f com respeito a x. Tente este problema:

Se $f = x^4$, encontre $\frac{d^4 y}{dx^4}$.

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = [x^{16} \mid 4x^4 \mid 0 \mid 64 \mid 4 \times 3 \times 2 \times 1\ ]$$

Vá para **249**.

[9]

249

$$\begin{aligned}\frac{d^4}{x^4}(x^4) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}(x^4)\right\}\right]\right)\\ &= \frac{d^3}{dx^3}(4x^3) = \frac{d^2}{dx^2}(4 \times 3x^2) = \frac{d}{dx}(4 \times 3 \times 2x)\\ &= 4 \times 3 \times 2 \times 1.\end{aligned}$$

Podemos facilmente generalizar o resultado:

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(x^n) &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1\\ &= n!\end{aligned}$$

[$n!$ é chamado n fatorial e significa $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$.]

Para mais prática em derivadas de ordem superiores, ver do problema 59 até 63.

Siga para **250**.

Máximos e mínimos

250

---

[9] **Respostas:(242)**12x **(243)**$\frac{2}{x^3}$

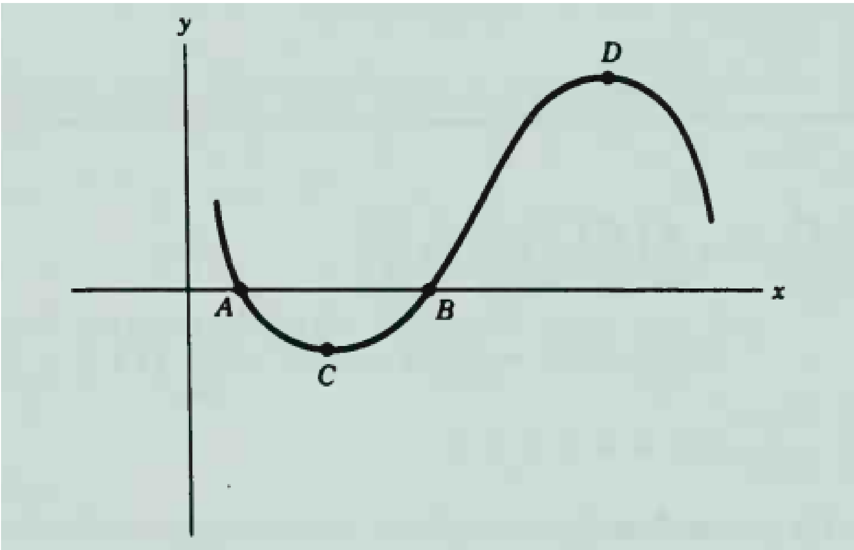
Agora que sabemos como diferenciar funções simples, vamos colocar nosso conhecimento em prática. Suponha que queremos encontrar o valor de x e y no qual

$$y = f(x)$$

tem um valor mínimo ou máximo em uma dada região. Pelo fim desta seção saberemos como resolver esse problema. Vá para **251**.

251

Aqui temos o gráfico de uma função. Em quais dos pontos indicados y tem um valor mínimo no domínio mostrado?



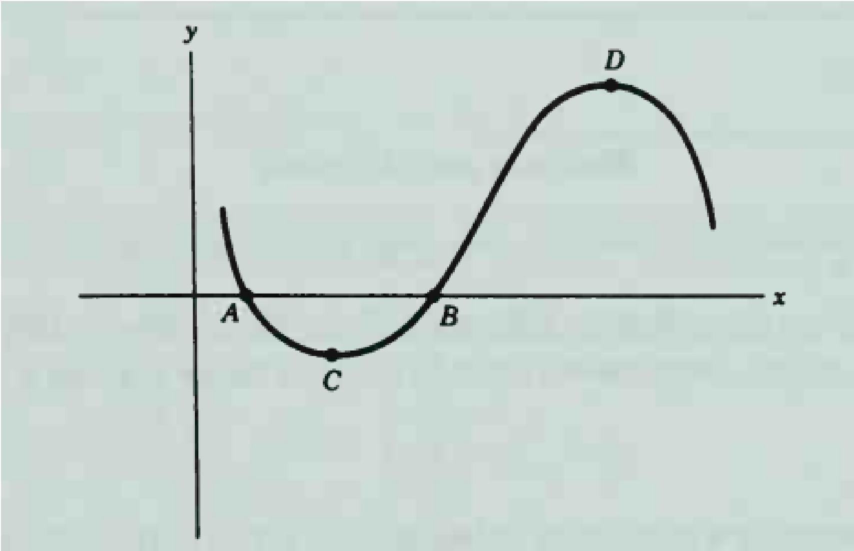
$[A \mid B \mid C \mid D \mid A \text{ e } B \mid C \text{ e } D]$

Se acertou, vá para **253**

Se errou, vá para **252**

252

O valor mínimo de y está no ponto C, desde que y tem o seu menor valor no ponto C, ao menos no domínimo de x mostrado.



Respostas: (246) $-A\omega^2 \sin \omega t$

(248) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

Em A e B, y tem o valor 0, mas isso não tem nada haver com o fato de que há um valor mínimo ou não alí.

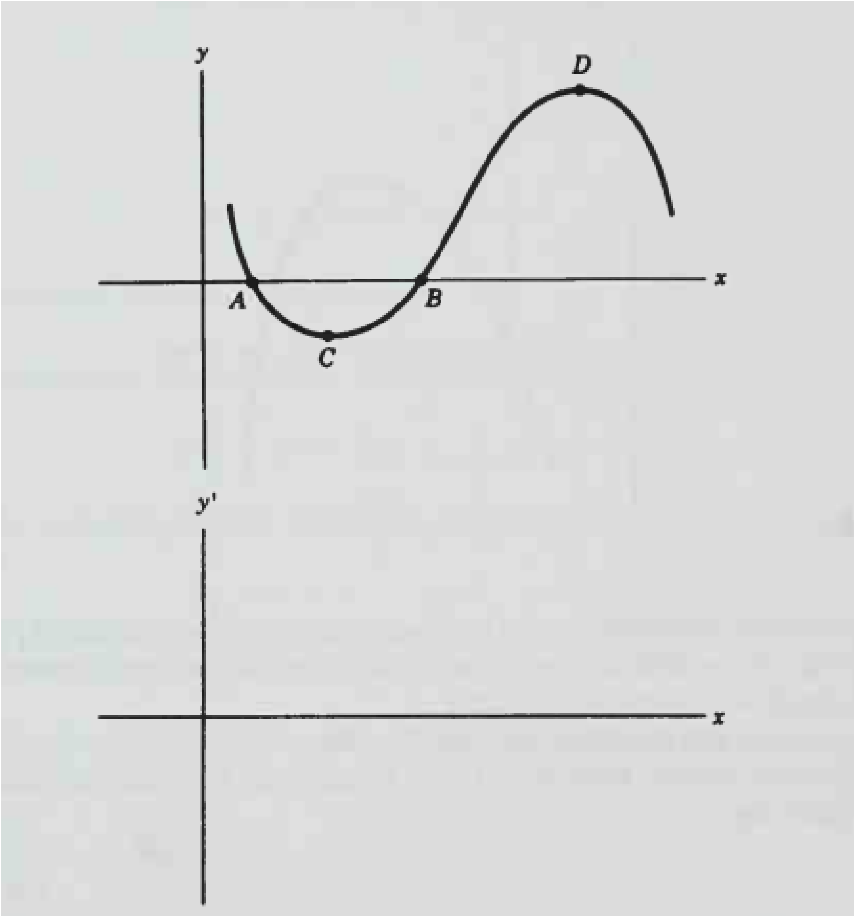
O ponto D é um ponto de máximo de y.

Vá para **253**.

253

Nós mostramos que o ponto C corresponde a um valor mínimo de y, ao menos para os valores do domínio que foram mostrados, e que D corresponde similarmente a um valor máximo.

Existe uma relação interessante entre os pontos de máximo e os pontos de mínimo de y e os valores da derivada nesses pontos. Para ajudar a ver isso, desenhe um gráfico da derivada da função mostrada, usando o espaço provido para tanto.

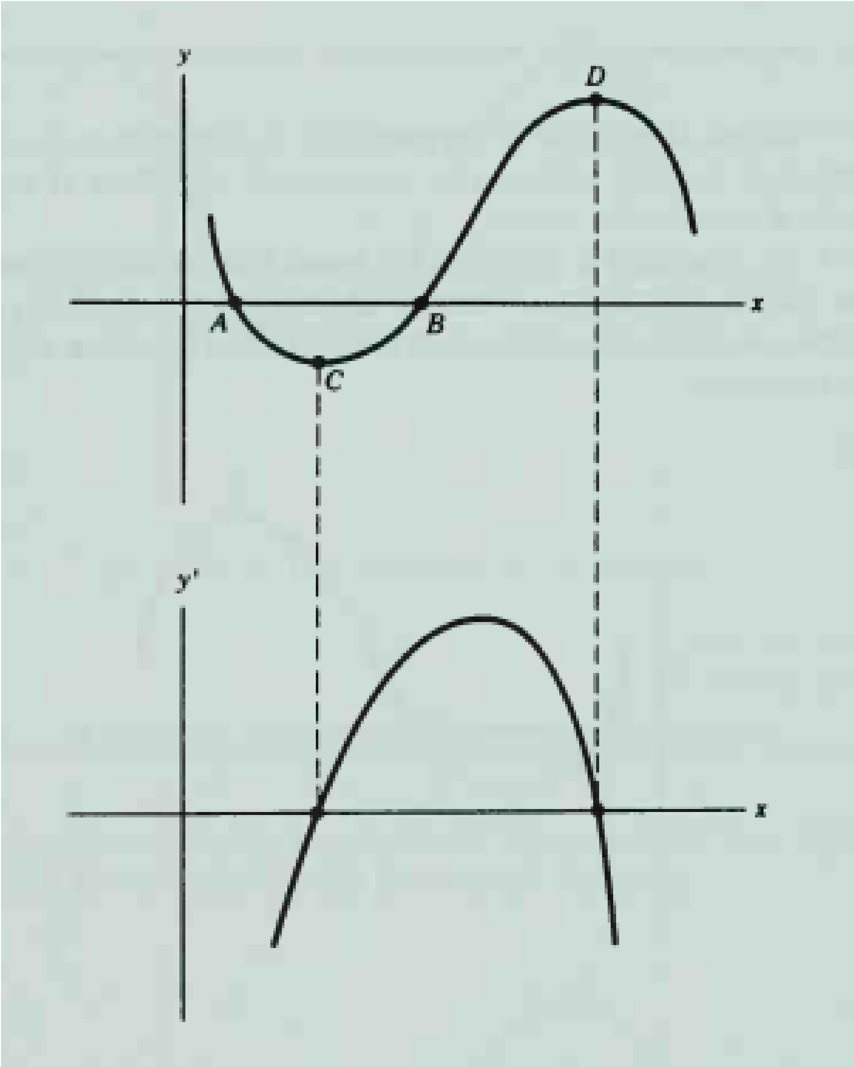


Para conferir o seu gráfico,

Vá para **254**.

254

Se você não obteve um gráfico substancialmente igual a esse, reveja as lições de **160** até **169** antes de continuar.



Esse simples exemplo deveria ser suficiente para te convencer que se $f(x)$ tem um máximo e mínimo para alguns valores de x dentro de um dado intervalo, então sua derivada, $f'(x)$, é zero para x.

Uma maneira de dizer se é um máximo ou mínimo é desenhar alguns pontos vizinhos. Contudo, existe um método ainda mais simples, como nós em breve veremos.

Vá para **255**.

Resposta: (251) C

255

Teste você com esse problema:

Encontre o valor de x para o qual a seguinte função tem um valor mínimo.

$$f(x) = x^2 + 6x.$$

$$[-6, \mid -3 \mid 0 \mid +3 \mid \text{nenhuma das anteriores}]$$

Se você acertou, vá para **258**.

Se você errou, vá para **256**.

256

O problema é resolvido da seguinte forma:

O valor máximo ou mínimo ocorre nos x que satisfazem $f' = 0$.

$$f(x) = x^2 + 6x, \quad f' = 2x + 6$$

Portanto a equação para os valores máximos e mínimos de x é

$$2x + 6 = 0 \ \ ou \ \ x = -3$$

Aqui vai outro problema:

Para quais valores de x a seguinte função $f(x)$ tem um valor máximo ou mínimo?

$$f(x) = 8x + \frac{2}{x}$$

$$[\frac{1}{4} \mid -\frac{1}{4} \mid -4 \mid 2 \ e \ -4 \mid \frac{1}{2} \ e \ -\frac{1}{2}]$$

Se você acertou, vá para **258**.

Se você não obteve a resposta correta, vá para **257**.

257

O problema na lição **256** pode ser resolvido da seguinte forma:

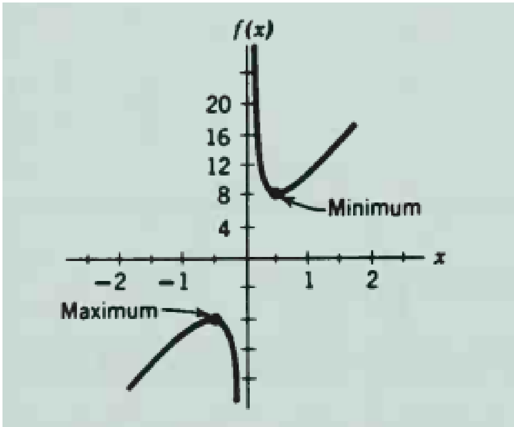
Num ponto de máximo ou mínimo, $f' = 0$. Dado que

$$f(x) = 8x + \frac{2}{x}\ , \quad f' = 8 - \frac{2}{x^2}$$

Os pontos desejados são soluções de

$$8 - \frac{2}{x^2} = 0 \quad ou \quad x^2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Assim, em $x = 1/2$ e $x = -1/2$, $f(x)$ tem valor máximo ou mínimo. O gráfico de $f(x)$ é mostrado na figura, e, como você pode ver, $x = -1/2$ corresponde a um máximo, e $x = 1/2$ corresponde a um mínimo.



Incidentalmente, como você pode ver pelo desenho, o mínimo está abaixo do máximo. Isso não deveria ser um paradoxo, pois estamos falando de máximos e mínimos locais-isso é, o mínimo ou máximo valor da função em uma pequena região.

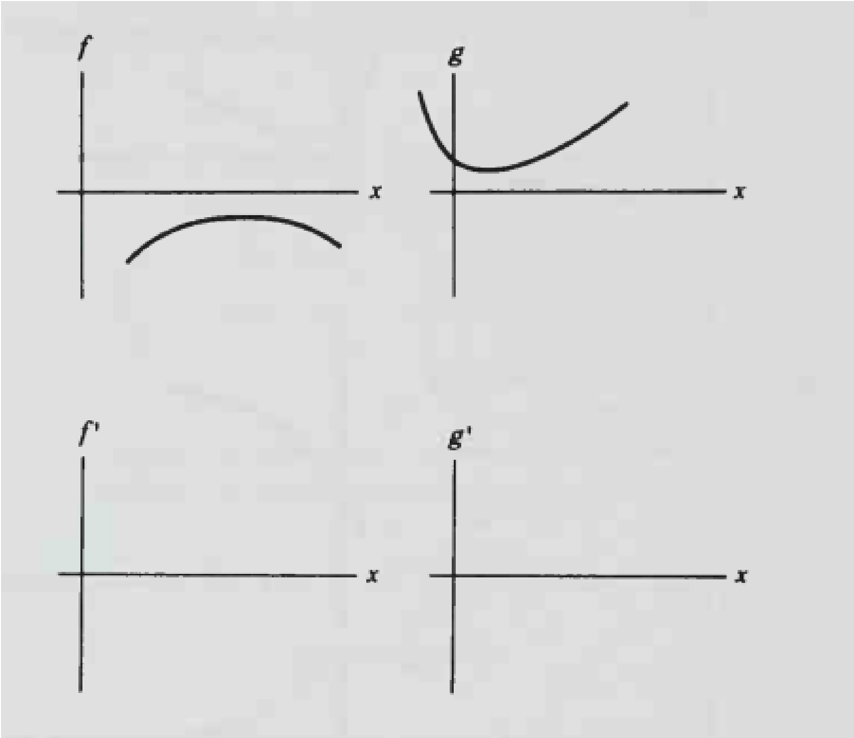
Vá para **258**.

258

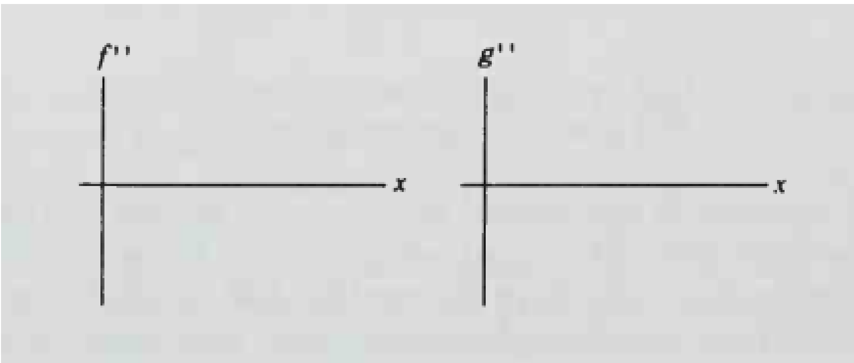
Nós mencionamos antes que existe um método simples para encontrar se $f(x)$ tem um valor máximo ou mínimo quando $f' = 0$. Vamos encontrar o método através do desenho de alguns gráficos.

Respostas: (255)-3 **(256)**1/2 e -1/2

Abaixo estão os gráficos de duas funções. Na esquerda, $f(x)$ tem um valor máximo na região mostrada. Na direita, $g(x)$ tem um valor mínimo. Nos espaços providos, desenhe esboços das derivadas de $f(x)$ e $g(x)$.



Agora, vamos repetir o processo novamente. Faça um esboço da segunda derivada de cada função (i.e., esboce as derivada da nova função que você acabou de desenhar).

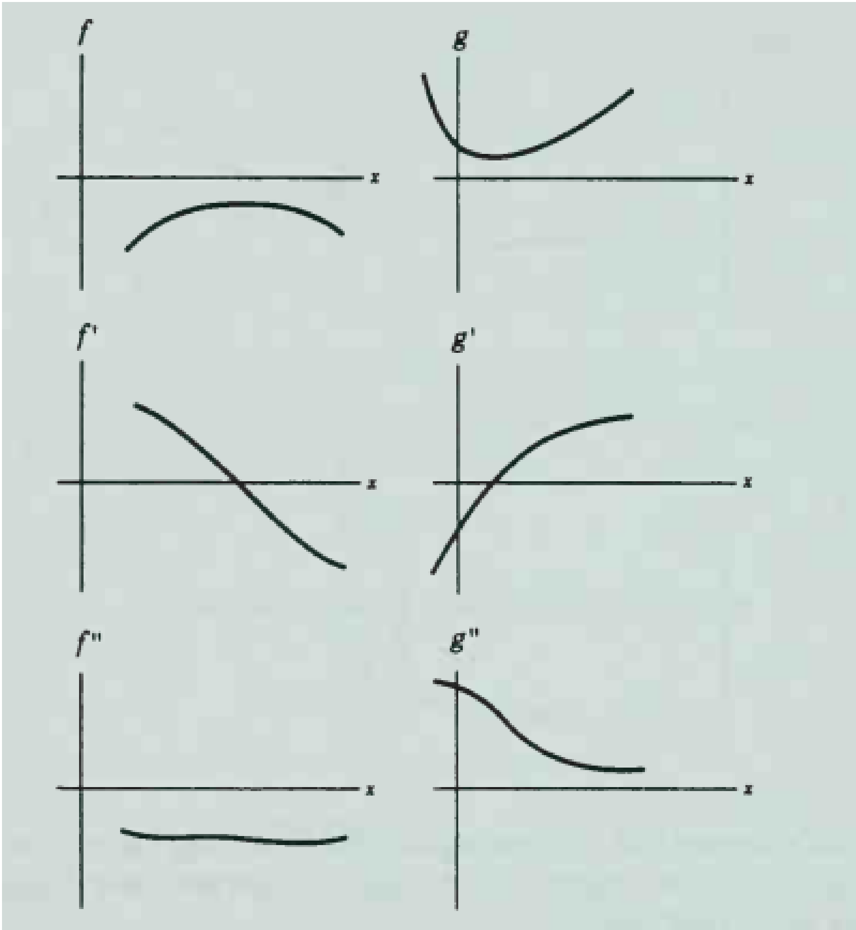


Talvez, a partir desses esboços você seja capaz de adivinhar como dizer se uma função tem máximo ou mínimo valor quando sua derivada é 0. Se você pode ou não,

Vá para **259**.

259

Os esboços devem parecer aproximadamente como isso.



Através dos estudos desses esboços, deveria ser aparente que se $f' = 0$,

$$f(x) \text{ tem um valor máximo se } f'' < 0,$$

$$f(x) \text{ tem um valor mínimo se } f'' > 0.$$

(Se $f'' = 0$, esse teste não ajuda e teremos que ver mais derivadas.)

Se você não está convencido ainda, volte e esboce as segundas derivadas de qualquer função das lições **164**, **166**, ou **168**[(c) ou (d)]. Isso deveria convencer você que essa regra é razoável. Quando você estiver pronto,

vá para **260**.

260

Aqui há um último problema para tentar antes de avançarmos para outro assunto. Considere $f(x) = e^{-x^2}$. Encontre o valor de x para o qual $f(x)$ tem um valor máximo ou mínimo, e determine qual deles ele é.

Resposta: ______________________

Para checar sua resposta, vá para **261**.

261

Agora, vamos resolver o problema $f(x) = e^{-x^2}$. Usando a regra da cadeia, encontramos

$$f' = -2xe^{-x^2}.$$

O máximo ou o mínimo ocorre x dado por

$$-2xe^{-x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0.$$

Agora usamos a regra do produto (lição **189**) para obter

$$f'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}.$$

Em $x = 0$, $f'' = (-2 + 4 \times 0) \times 1 = -2$. Dado que f'' é negativo onde $f' = 0$, $f(x)$ tem um valor de *máximo* em $x = 0$.

Um alerta: ao calcular a derivada, por exemplo $f' = 0$ em algum valor x, $x = a$, você deve sempre *diferenciar* $f(x)$ *primeiro* e então substituir $x = a$. Se você inverter o procedimento e primeiro calcular $f(a)$ e então tentar diferenciar, o resultado será simplesmente 0, já que $f(a)$ é uma constante. O mesmo cuidado deve ser tomado com derivadas de ordem superior.

Siga para **262**.

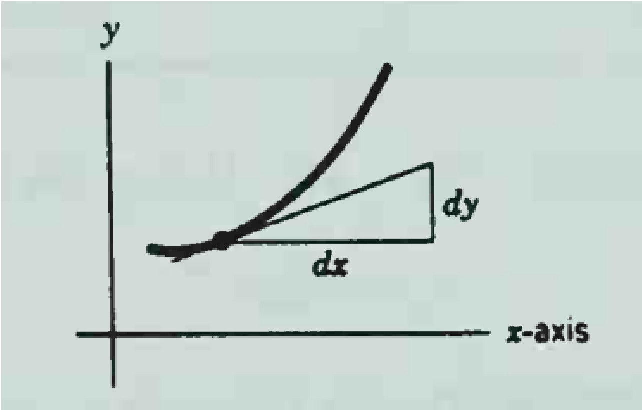
Diferenciais

262

Até aqui, temos denotado a derivada pelo símbolo y' ou $\frac{dy}{dx}$. Ainda que ambos os símbolos signifiquem $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, o método de escrever $\frac{dy}{dx}$ sugere que a derivada deva ser vista como uma razão entre duas quantidades, dy e dx. Ocorre que é isso mesmo. Essas novas quantidades que estamos introduzindo agora chamam-se *diferenciais*, e serão definidas na próxima lição.

Vá para **266**.

263



Suponha que x seja uma variável independente, e que $y = f(x)$. Assim, o *diferencial* dx de x é definido como sendo igual a qualquer incremento $x_2 - x_1$, onde x_1 é o ponto de interesse. O diferencial dx pode ser positivo ou negativo, grande ou pequeno como se queira. Vemos que dx, assim como x, pode ser encarado como uma variável independente. O diferencial dy é definido pela regra seguinte:

$$dy = y'dx,$$

onde y' é a derivada[10] de y com respeito a x.

Vá para **264**.

264

Ainda que o significado da derivada y' seja $\lim_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, podemos ver da lição anterior que ela agora pode ser interpretada como a razão entre os diferenciais dy e dx, onde dx é qualquer incremente de x, e dy é definido pela regra $dy = y'dx$.

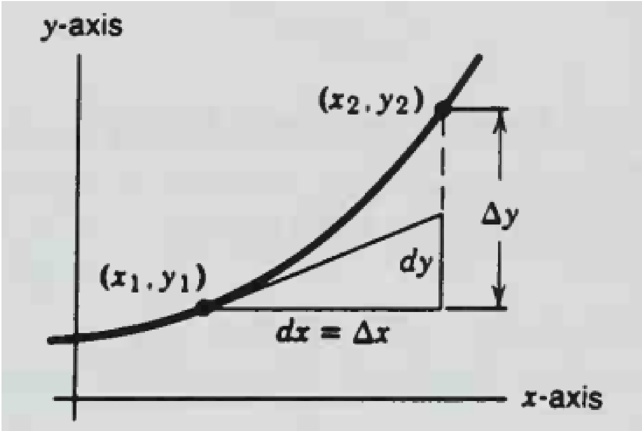
Vá para **265**.

265

É importante não confundir dy com Δy. Como foi observado na lição **136**, Δy significa $y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$, onde x_2 e x_1 são dois valores de x dados. Tanto dx como Δx (que é $x_2 - x_1$) são intervalos arbitrários. dx é chamado de *diferencial* de x, e Δx é chamado de incremento de x, mas aqui seus significados serão similares.

---

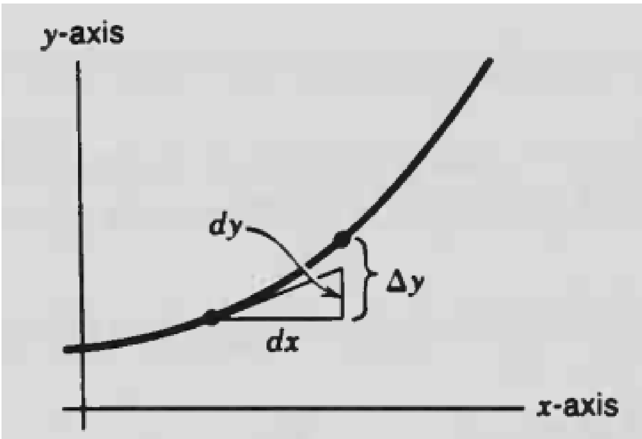
[10]N. do T.: y' deve ser calculada no ponto de interesse x_1. Você poderá estudar definições melhores dessas quantidades dy e dx no futuro, por exemplo em um curso de Geometria Diferencial.



O diagrama deve mostrar que dy e Δy são quantidades diferentes. Nele pusemos $dx = \Delta x$. O *diferencial* dy é então $y'dx$, enquanto o *incremento* Δy é dado por $y_2 - y_1$. Nesse caso fica claro que dy não é o mesmo que Δy.

Vá para **266**.

266



Ainda que dy e Δy sejam diferentes, você pode ver na figura que, para um dx suficientemente pequeno (com $dx = \Delta x$), dy fica muito próximo de Δy. Podemos escrever isso simbolicamente como

$$\lim_{dx=\Delta x \to 0} \frac{dy}{\Delta y} = 1.$$

Assim, se pretendermos tomar o limite $dx \to 0$, dy poderá ser substituído por Δy. Além disso, mesmo quando não tomarmos o limite, dy será quase igual a Δy, desde que dx seja suficientemente pequeno. Em consequência, nós frequentemente usamos dy e Δy de modo intercambiável quando estiver subentendido que será tomado o limite, ou que o resultado poderá ser uma aproximação.

Vá para a lição **267**.

267

Podemos reescrever o diferencial a partir das várias expressões de derivadas dadas anteriormente. Assim, se $y = x^n$,

$$dy = d(x^n) = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}dx.$$

Calcule o seguinte:

$d(\sin x) = [\,-\sin x\,dx \mid -\sin x \mid -\cos x\,dx \mid \cos x\,]$

$d\left(\frac{1}{x}\right) = [\,\frac{dx}{x^2} \mid -\frac{dx}{x^2} \mid -\frac{dx}{x}\,]$

$d(e^x) = [\,xe^x\,dx \mid dx \mid e^x\,dx \mid \frac{dx}{e^x}\,]$

Se você errou alguma das contas, vá para **268**.
Senão, vá para **269**.

Resposta em **272**.

268

Encontram-se aqui as soluções dos problemas da lição **267**. Mostra-se em parênteses o número da lição em que cada derivada será discutida.

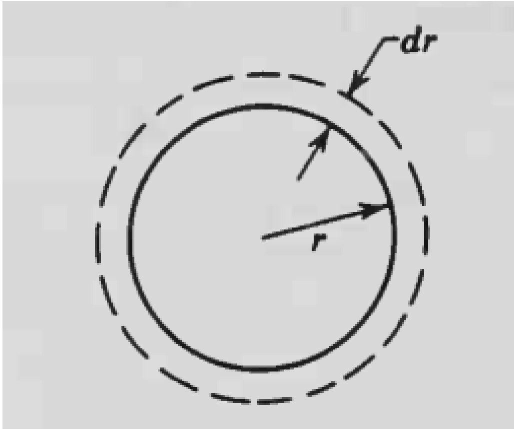
$$d(\sin x) = \left(\frac{d(\sin x)}{dx}\right) dx = \cos x\,dx \qquad \text{(lição } \mathbf{211}\text{)},$$

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right] dx = -\frac{dx}{x^2} \qquad \text{(lição } \mathbf{180}\text{)},$$

$$d(e^x) = \left(\frac{d}{dx}(e^x)\right) dx = e^x\,dx \qquad \text{(lição } \mathbf{235}\text{)}.$$

Vá para **269**.

269



Eis aqui um exemplo de como se usa um diferencial. O diagrama mostra a superfície de um disco ao qual foi acrescentada uma beirada bem estreita. Suponha que queiramos um valor aproximado para a mudança na área ΔA que ocorre quando o raio é aumentado de r para $r + dr$.

$$dA = \left(\frac{dA}{dr}\right) dr = \frac{d}{dr}(\pi r^2)dr = 2\pi r\, dr.$$

Vá para **270**.

270

O exemplo anterior também poderia ser resolvido de modo exato calculando a diferença entre as duas áreas:

$$\Delta A = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2.$$

Quando Δr for pequeno comparado a r, podemos negligenciar o último termo e constatar que

$$\Delta A = 2\pi r\Delta r.$$

Se fizermos $\Delta r = dr$ e assumirmos que ambos são pequenos, então, como vimos na lição **269**,

$$dA \approx \Delta A = 2\pi r dr.$$

Há um argumento mais intuitivo para esses resultados[11]. Uma vez que a beirada é estreita, sua

[11]N. do T.: Bixo querido, quando um livro começa a falar de "argumento intuitivo", é porque ele não sabe mais como explicar direito o que está dizendo. Como dissemos antes, diferenciais só vão fazer real sentido no futuro, quando você for estudar Geometria Diferencial ou alguma matéria que se apoie fortemente nela (tipo Relatividade Geral). Mas vamos dar uma palhinha: o diferencial é a *melhor aproximação linear* para a variação de uma função. O que isso quer dizer? Bom, queremos estudar a função $y = f(x)$ nas proximidades de x_0; a sua variação Δy pode depender de maneira muito complicada da variação Δx, por isso procuramos formas de aproximar esse resultado.
Com efeito, existem maneiras de aproximar Δy utilizando polinômios, senos e cossenos, e muitas outras coisas de cuja existência você, hoje, nem suspeita. A parte boa é que aproximações mais complicadas tendem a ser

área dA é aproximadamente o seu comprimento $2\pi r$ multiplicado por sua largura dr. Assim,

$$dA = 2\pi r\, dr.$$

Vá para **271**.

271

Diferenciais são práticos para lembrar algumas regras de diferenciação importantes. Por exemplo, a regra da cadeia

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dx}$$

é quase uma identidade, se tratarmos dw, du e dx como diferenciais. Na verdade, não é óbvio que o possamos fazer, uma vez que w e u dependem de uma terceira quantidade x. Uma justificativa para usar diferenciais como forma de obter a regra da cadeia encontra-se no Apêndice A9.

---

mais precisas: se você tentar aproximar Δy por um polinômio de ordem 3, $c\,(\Delta x)^3 + b\,(\Delta x)^2 + a\,\Delta x$, você tem boas chances de acertar mais do que se usasse uma aproximação de grau 2 como $b\,(\Delta x)^2 + a\,\Delta x$. A parte ruim é, naturalmente, que elas são mais difíceis de calcular. Ok, um computador pode fazer a aproximação com um polinômio de ordem 25 se você quiser, mas tente fazer cálculos teóricos dessa forma. Ah... o *Wolfram*. Tudo bem, vai firme e depois me diz quais informações de comportamento da função você consegue extrair do seu resultado de ordem n com $n \longrightarrow \infty$.

A aproximação linear, em que dy é tomado de forma diretamente proporcional a Δx, é a mais simples de todas e, se tomarmos Δx muito menor do que 1, ela acaba se tornando *dominante*, uma vez que $(\Delta x)^n << \Delta x$ quando $\Delta x << 1$ (e $n > 1$, claro). Fica a pergunta: qual é a constante de proporcionalidade a que fornece a melhor aproximação para $\Delta y \approx a\,\Delta x$? É a derivada de $f(x)$ no ponto x_0, $f'(x_0)$! (Suspense: no caso das aproximações de outra ordem, será que b vai ter alguma coisa a ver com $f''(x_0)$ e c com $f'''(x_0)$? Vai! Na verdade, existe todo um ramo da Matemática, chamado Análise de Fourier, que se dedica a estudar as funções transformando suas derivadas de ordem n em monômios de ordem n!! Aguarde Fismat I e II.)

Voltando aos diferenciais: dy será então uma quantidade diretamente proporcional a $dx = \Delta x$, com a constante de proporcionalidade ideal, que é $f'(x_0)$, e assim ele será, como falamos, o *melhor aproximante linear* para Δy; ademais, por incrível que pareça, mesmo dy sendo a aproximação mais simples de Δy, ele acaba sendo suficientemente preciso para a maioria das aplicações.

Agora, repare na sacanagem que o *Quick Calculus* fez, e que o *Cálculo Rapidinho* vai desfazer para você: no caso da área $A = \pi r^2$, nós sabemos calcular a sua variação exatamente, e por acaso calha de $\Delta A = \pi(\Delta r)^2 + 2\pi r \Delta r$ já ser um polinômio de ordem 2! Então a melhor aproximação de ordem 2 para ΔA é ela mesma, e a melhor aproximação de ordem 1 é só jogar o termo quadrático fora quando $\Delta r << 1$. Repare como o coeficiente b do polinômio ΔA, no caso $b = \pi$, é igual à segunda derivada da área, $\frac{1}{2}A''(r_0)$. Além disso, como ΔA é exatamente de ordem 2, conseguimos aproximações de "ordem superior" simplesmente somando monômios $0(\Delta r)^3 + 0(\Delta r)^4$...; repare, então, como todas as derivadas de $A(r)$ com ordem superior a 2 dão 0... Última coisa a reparar: se ao invés de uma coroa estreita de largura dr tivéssemos um pequeno retânguo de largura dr e comprimento $2\pi r$ (que é, em aproximação de ordem 0, a circunferência da coroa, tanto interna quando externa), quanto seria sua área? Nesse caso, o retângulo é um bom aproximante para a coroa, pois a sua largura aproxima a da coroa em ordem 1 (de fato, são iguais), e o comprimento aproxima o da coroa em ordem 0; a área é a multiplicação dessas duas grandezas, então a área do retângulo será uma aproximação de ordem 1 da área da coroa.

Não vá sair por aí aproximando coisas curvas por coisas retas, ou círculos por retângulos (como muitos livros dão a entender), sem antes verificar a ordem das aproximações envolvidas. Exemplo: a diferença entre o comprimento da diagonal de um quadrado e a soma do seu lado horizontal com o lado vertical é de ordem 0 (constante), então não adianta tentar aproximar o comprimento da diagonal pela soma de pequenos segmentos na horizontal e na vertical que sigam a diagonal como uma escadinha, pois o termo dominante nesse caso vai ser uma constante, e o erro não vai para 0, por menores que sejam os degrauzinhos. Já se você usar a escadinha para calcular aproximadamente a área debaixo da diagonal, vai dar certo!

Vá para **272**.

272

Vejamos outra relação que é fácil de lembrar com diferenciais, ainda que a sua demonstração exija maiores explicações:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

Essa regra prática nos permite inverter o papel das variáveis dependente e independente, ainda que isso seja verdade somente sob certas condições. Se você quiser maiores explicações, consulte o Apêndice A10.

Senão, vá para **273**.

Resposta **267**: $\cos x\, dx$, $-\frac{dx}{x^2}$, $e^x\, dx$

Pequena revisão e alguns problemas

273

Terminemos o capítulo fazendo uma pequena revisão de algumas das ideias introduzidas anteriormente e pondo o cálculo diferencial em prática com alguns problemas envolvendo velocidade.

Vá para **274**.

274

Esperamos que você se lembre que a taxa de variação da posição de um ponto que se move com o tempo é chamada de velocidade.

Em outras palavras, se a posição e o tempo estiverem relacionados por uma função S, e nós quisermos achar a velocidade, precisamos .... S(t) com relação ao/à ....

Vá para **275**.

275

Você deverá ter escrito:

Em outras palavras, se a posição e o tempo estiverem relacionados por uma função S e nós quisermos acha a velocidade, precisamos *derivar* S(t) com relação ao *tempo (t)*.

276

Será que você consegue resolver este problema?

A posição de uma partícula ao longo de uma linha reta é dada pela seguinte expressão:

$$S = A \sin \omega t.$$

A e ω (ômega ou oméga) são constantes.

Encontre a velocidade da partícula.

$$v = ...$$

Para a resposta, vá para **277**.

277

A sua resposta deverá ter sido

$$v = A\omega \cos \omega t$$

Se você acertou, pule para **280**. Caso contrário, continue aqui.

O problema é encontrar a velocidade, que é a taxa de variação da posição com respeito ao tempo.

Nesse problema, a posição é $S = A \sin \omega t$.

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(A \sin \omega t) = A\omega \cos \omega t.$$

(Se você não está seguro do procedimento acima, consulte a lição **219**.)

E este problema, você consegue resolver:

$$S = A \sin \omega t + B \cos 2\omega t.$$

Encontre v.

$$v = ...$$

Consulte a resposta na lição **278**.

278

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{dt}(A \sin \omega t + B \cos 2\omega t) \\ &= A\omega \cos \omega t - 2B\omega \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Se foi isso que você escreveu, vá para **280**. Se não, reveja a lição **220** e depois continue aqui.

Tente este problema: a posição de um ponto é dada por

$$S = A \sin \omega t \, \cos \omega t.$$

Encontre a sua velocidade.

$$v = \text{.........}$$

Vá para **279** para a resposta.

279

Eis aqui como resolver o problema **278**.

$$\begin{aligned} v &= \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(A \sin \omega t \, \cos \omega t) \\ &= A \sin \omega t \, \frac{d}{dt}(\cos \omega t) + A \left[\frac{d}{dt}(\sin \omega t)\right] \cos \omega t \\ &= -A\omega \sin^2 \omega t + A\omega \cos^2 \omega t \\ &= A\,\omega \, \left(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t\right). \end{aligned}$$

Em uma abordagem alternativa, você poderia notar que

$$\sin \omega t \, \cos \omega t = \frac{1}{2}(\sin 2\omega t).$$

(Consulte a lição **71**.) Dessa forma, $v = \frac{d}{dt}\left(\frac{A}{2} \sin 2\omega t\right)$. Se você estiver se sentindo com entusiasmo, mostre que esse procedimento produz o mesmo resultado que acima.

Vá para **280**.

280

Suponha que a altura de uma bola a partir do solo seja dada por $y = a + bt + ct^2$, onde a, b e c são constantes. (Aqui estamos usando y no lugar de S para denotar a posição. A maneira como chamamos nossa variável não faz nenhuma diferença. Esse tipo de equação, na verdade, descreve a altura de um corpo em queda livre.)

Encontre a velocidade na direção y.

$$v = \text{.........}$$

Consulte a resposta correta em **281**.

281

Aqui está como fazer o problema da lição **280**.

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(a + bt + ct^2) = b + 2ct$$

Se você escreveu a resposta corretamente, vá para **283**. Caso contrário, faça o problema abaixo. Seja

$$S = \frac{e}{t^2} + bt \quad e \text{ e } b \text{ são constantes}$$

Encontre a velocidade.

$$v = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

A resposta está na lição **282**.

282

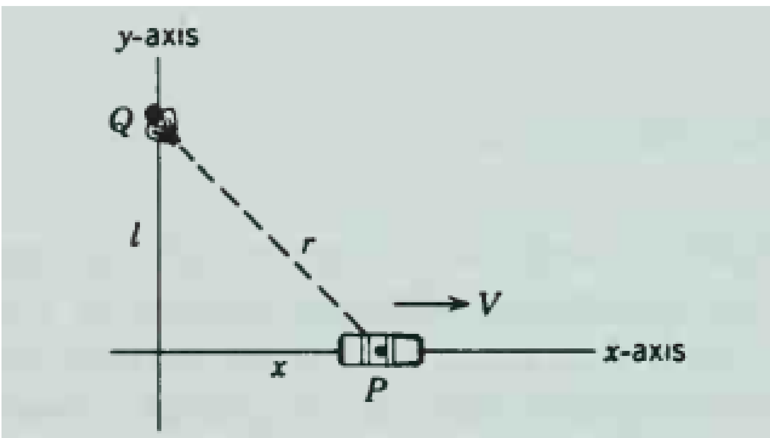
$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{e}{t^2} + bt\right) = -\frac{2e}{t^3} + b$$

Se esse problema te deu alguma dificuldade, você deveria revisar o início dessa seção antes de avançar.

Caso contrário, vá para **283**.

283

Aqui vai um problema mais difícil que você pode aproveitar. (Se você não se sentir no clima, pule para a lição **285**.)



Um carro P se move ao longo de uma estrada na direção x com velocidade constante V. O problema é encontrar quão rápido ele está se movendo de um homem que está parado no ponto Q, que dista l da estrada, como mostrado. Em outras palavras, se r é a distância entre Q e P, encontre $\frac{dr}{dt}$.

(Dica: A regra da cadeia é muito útil se usada na forma $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx}\frac{dx}{dt}$)

$$\frac{dr}{dt} = \rule{4cm}{0.4pt}$$

Vá para **284** após trabalhar nessa.

284

Do diagrama em **283** você pode ver que

$$r^2 = x^2 + l^2, \quad r = (x^2 + l^2)^{1/2}.$$

Nós precisamos encontrar $\frac{dr}{dt}$, e nós podemos fazer issso da seguinte maneira:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}(x^2 + l^2)^{1/2}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2 + l^2)^{1/2}}\frac{dx}{dt}$$
$$= V\frac{x}{(x^2 + l^2)^{1/2}}$$

No último passo nós usamos que $V = \frac{dx}{dt}$.

Vá para **285**.

285

O problema é maximizar o rendimento bruto a partir da venda de um novo video-game, o Home Whoosie. Se S Whoosies forem vendidos a um preço de x dólares, o rendimento será Sx. Contudo, a medida que o preço cresce o número de compradores caí. É estimado que o número de compradores a um preço x pode ser descrito pela seguinte expressão: $S(x) = S_0[1 - (x/x_0)^2]$, em que S_0 e x_0 são constantes. Note que se $x \ll x_0$, o número de vendas é praticamente independente do preço, mas assim que o preço cresce e x se aproxima de x_0 as vendas rapidamente caem, se anulando em x_0.(A expressão é sem sentido para $x > x_0$.)

Qual deveria ser o preço x para garantir um rendimento máximo, e qual seria o valor I desse rendimento.

$x =$ ____________________________

$I =$ ____________________________

Vá para **286**.

286

O rendimento bruto é

$$I = Sx = S_0[1 - (x/x_0)^2]x$$

$$= S_0(x - x^3/x_0^2).$$

O máximo valor de I ocorre quando $\frac{dI}{dx} = 0$.

$$\frac{dI}{dx} = S_0(1 - 3x^2/x_0^2) = 0$$

$$x^2 = x_0^2/3, \quad \text{portanto } x = \sqrt{1/3}x_0 = 0.577x_0$$

No máximo, o rendimento bruto é

$$I = Sx = S_0[1 - (x/x_0)^2]x = S_0(1 - 1/3)\sqrt{1/3}x_0$$

$$= 0.385S_0x_0$$

A conclusão é que o preço de x deveria ser próximo de 57.7% do valor máximo, x_0 reais, e que o rendimento bruto máximo é próximo de $0.385S_0x_0$ reais.

Essa conclusão particular só funciona apenas para a curva preço-vendas, $S(x) = S_0[1-(x/x_0)^2]$. Contudo, o método usado aqui pode identificar o preço que fornece o máximo lucro para quaisquer curvas preço-vendas que você quiser escolher.

Vá para **287**.

287

Ao se decidir se devemos ou não permanecer com um antigo veículo, uma importante parte a se considerar é estimar o custo por ano de se manter esse carro. As duas maiores componentes de custos são reparos e depreciação. Nós devemos assumir que o custo anual de reparo é r, em reais por ano, que é dado por

$$r = A + Bt$$

Em que A e B são constantes. Os reparos são menores quando o carro é novo e assumimos que eles crescem linearmente com o tempo. A taxa de depreciação-a perda no valor do carro em reais por ano-é assumida ser

$$d = De^{-ct},$$

Em que D e c são constantes. A taxa de depreciação é maior quando o carro é mais novo e mais valioso; e decresce exponencialmente com o tempo, crescendo mais devagar à medida que o carro se torna menos valioso.

O custo anual devido a reparos e depreciação é $S = r + d$. Encontre uma expressão para o tempo t em que o custo é mínimo.

Tempo $=$ ____________________________

Vá para **288**.

288

O custo é

$$S = r + d = A + Bt + De^{-ct}$$

Um extremo ocorre quando $dS/dt = B - cDe^{-ct} = 0$. Isso pode ser resolvido para t:

$$cDe^{-ct} = B, \quad e^{-ct} = \frac{B}{cD}$$

$$-ct = \ln \frac{B}{cD} \ ,$$

$$t = \frac{1}{c} \ln \frac{cD}{B}$$

Para ver se isso é um mínimo ou máximo, nós precisamos examinar d^2S/dt^2.(Relembre da lição **259** que a segunda derivada é positiva em um mínimo.)

$$\frac{d^2S}{dt^2} = c^2De^{-ct}$$

Isso é sempre positivo, logo o extremo é um mínimo. Note, contudo, que se $cD/B < 1$, então $ln(cD/B) < 0$, e t é negativo. O que isso significa?

Considere dS/dt em $t = 0$.

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=0} = B - cDe^0 = B - cD$$

Se $B < cD$, a inclinação é negativa. S inicialmente decresce e tem um mínimo em um momento posterior logo antes de começar a crescer. Se $B > cD$, contudo, S aumenta em $t = 0$ e continua crescendo. Esse é o caso em que o mínimo de S ocorre em tempos negativos. Essa solução é sem sentido; você não pode vender um carro antes de tê-lo comprado !

Vá para **289**.

Conclusão do Capítulo 2

289

O Apêndice contém material adicional que pode ser útil. Por exemplo, às vezes temos uma equação relacionada a duas variáveis, y e x, mas que não pode ser escrita simplesmente na forma $y = f(x)$. Existe um método direto para obter y': isso é chamado diferenciação implícita e é descrita no Apêndice B1. O Apêndice B2 mostra como diferenciar a função inversa de funções trigonométricas. Nesse capítulo nós só discutimos diferenciação de funções de uma única variável. Não é difícil extender essas ideias para funções de muitas variáveis. A técnica para fazer isso é chamada de diferenciação parcial. Se você está interessado nesse assunto, veja o Apêndice B3.

Muitos problemas envolvendo taxas de mudanças levam a equações que expressam relações entre as funções e suas derivadas. Tais relações são conhecidas como equações diferenciais. O

Apêndice B4 discute dois tipos comuns de equações diferenciais.

Todos os resultados importantes desse capítulo estão resumidos no Capítulo 4. Você pode querer ler esse material agora como uma rápida revisão. Em adição, uma lista de derivadas importantes está presente na Tabela 1 na parte de trás do livro.

Não esqueça os problemas de revisão, página 246, se você deseja mais prática. Pronto para mais? Respire fundo e vá para o Capítulo 3.

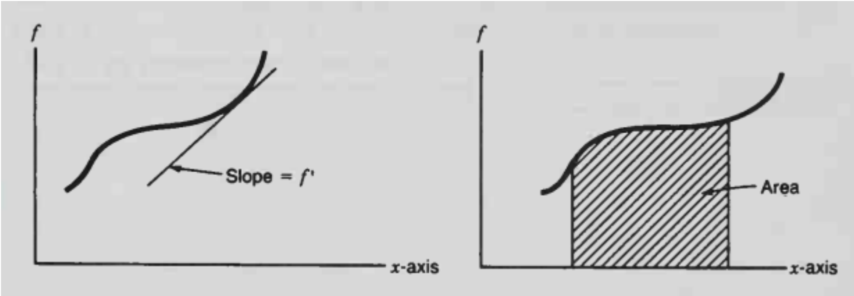
Capítulo 3
Cálculo Integral

Agora estamos prontos para enfrentar o cálculo integral. Nesse capítulo você aprenderá:

- Sobre antiderivação e integrais indefinidas
- O significado de integração
- Como achar a área sobre curvas
- Como avaliar integrais definidas
- Como integrar numericamente
- Algumas aplicações do cálculo integral
- Como usar integrais múltiplas

A área sob a curva

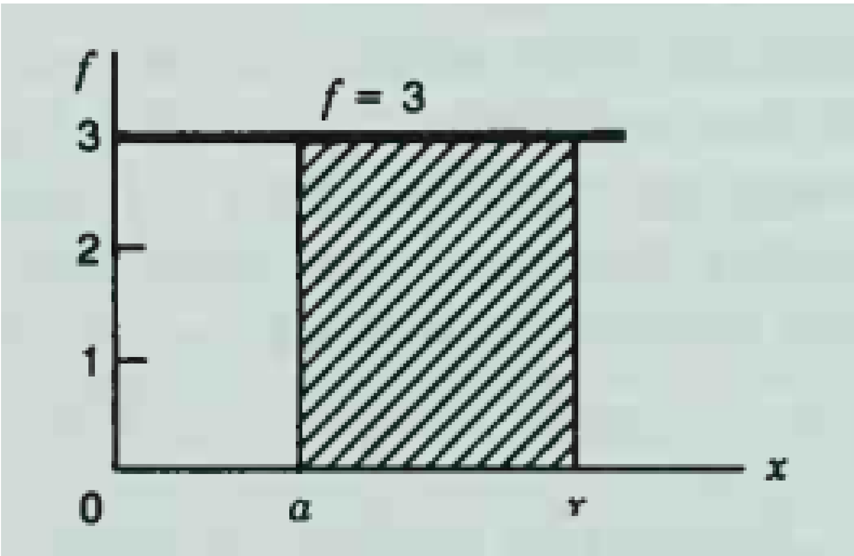
Nesse capítulo iremos aprender sobre o segundo maior ramo do cálculo: o cálculo integral. O primeiro ramo, o cálculo diferencial, consiste no problema de encontrar a inclinação do gráfico de uma função.



O cálculo integral se baseia em outro problema relacionado ao gráfico de $f(x)$: como calcular a área entre $f(x)$ e o eixo x limitados por um ponto inicial arbitrário, a, e algum ponto arbitrário final, x, como mostrado no desenho. A área pode ser calculada por um processo denominado integração. Assim como a diferenciação é útil para várias aplicações além de encontrar inclinações de curvas-por exemplo, encontrar taxas de crescimento e procurar máximos e mínimos-assim também o cálculo integral tem várias aplicações além de encontrar áreas sobre curvas. Todavia, o problema da área motivou a criação do cálculo integral, e nós usaremos isso como motivação para explicar a integração.

Vá para **291**.

291



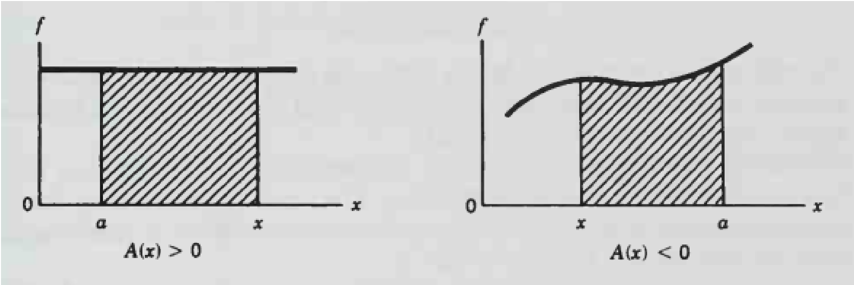
Para ilustrar o que queremos dizer por área abaixo de uma curva, aqui está um gráfico da curva mais simples de todas - uma linha reta dada por $f(x) =$ constante. Qual é a área $A(x)$ entre a linha $f(x) = 3$ e o eixo x entro intervalo a e algum ponto arbitrário $x > a$?

$$A(x) = [3ax \mid 3(a + x) \mid 3(a - x) \mid 3(x - a)]$$

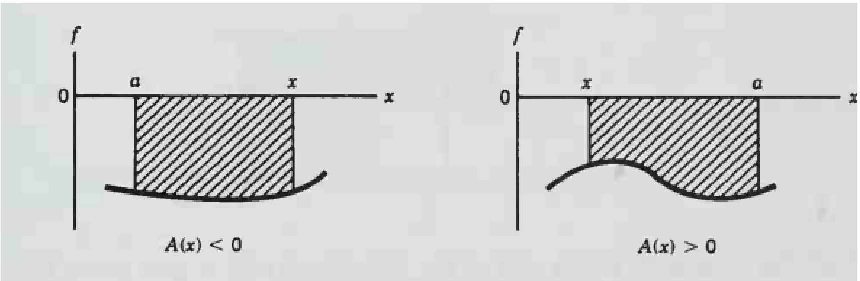
Para verificar sua resposta, vá para **292**

292

A área de um retângulo é o produto de sua base, $x - a$, pela sua altura, 3. Assim, a área é $3(x - a)$.



Existe uma convenção importante acerca do sinal da área, haja vista que elas podem ser positivas ou negativas. No desenho à esquerda, $x - a$ é positivo, pois $x > a$ e $f(x)$ também é positiva. Como a base e a altura são ambas positivas, a área é positiva. Entretanto, a área abaixo do gráfico à direita é negativa, haja vista que $x - a < 0$. Logo, áreas podem ser positivas ou negativas.



Se $f(x)$ é negativa enquanto o intervalo da base é positivo, a área (base x altura) é negativa, ao passo que se ambos $f(x)$ e a base são negativos, a áreas é o produto de dois números negativos e, portanto, é positiva.

Vá para **293**.

293

A área $A(x)$ e a função $f(x)$ são estritamente relacionadas; a *derivada* da área é simplesmente $f(x)$.

$$\boxed{A'(x) = f(x).}$$

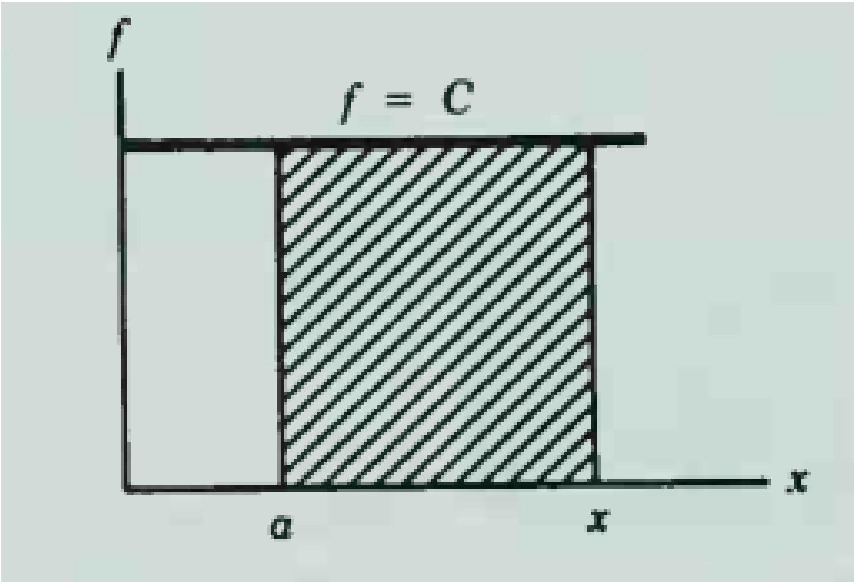
Nós explicaremos o porquê dessa relação ser verdadeira na próxima seção, mas por agora, vamos simplesmente usá-la. Para encontrar $A(x)$, precisamos encontrar a função que, quando derivada, é $f(x)$.

Encontrar a função que, quando derivada, resulta em outra função às vezes é chamado de *antiderivação*. O termo é descritivo, tendo em vista que o processo envolve essencialmente "derivar ao contrário". O termo mais formal para o processo é *integração.*

Vá para **294**.

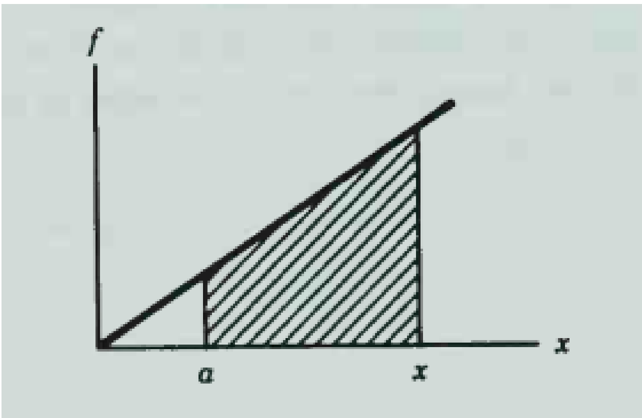
294

Para ilustrar que $A'(x) = f(x)$, vamos dar uma olhada em algumas áreas simples que podemos calcular diretamente. Nós já discutimos a área abaixo de uma curva $f(x) = C$, onde C é constante, $A(x) = C(x - a)$.



Derivando, $A'(x) = C = f(x)$.

Encontre a área $A(x)$ abaixo de $f(x) = Dx$ entre a e x, e prove pra você que $A'(x) = f(x)$.



Se você quer conferir seu resultado, vá para **295**.

Caso contrário, pule para **296**.

295

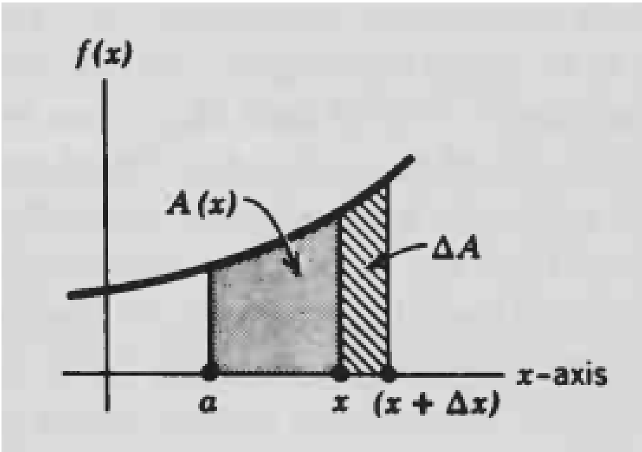
Uma maneira de calcular a área é pensar nela como a diferença da área de dois triângulos retos. Utilizando área $= 1/2$ base $\times$ altura, temos

$$A(x) = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}af(a) = \frac{1}{2}Dx^2 - \frac{1}{2}Da^2$$
$$A'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}Dx^2 - \frac{1}{2}Da^2\right) = Dx = f(x).$$

Vá para **296**.

296

Para ver porque $A'(x) = f(x)$, considere como a área $A(x)$ muda conforme x cresce por incrementos de Δx. $A(x + \Delta x) = A(x) + \Delta A$, onde ΔA é uma pequena faixa mostrada abaixo.



Você consegue achar uma expressão aproximada para ΔA?

$$\Delta A \approx \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

($\approx$ significa "aproximadamente igual a.")

Isso representa o maior passo do desenvolvimento do cálculo integral, portanto não se desaponte se o resultado lhe iludir.

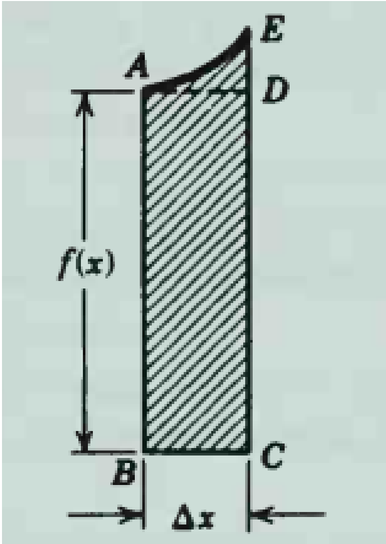
Vá para **297**.

297

A resposta é

$$\Delta A \approx f(x)\Delta x.$$

Se você escreveu isso, vá para **298**. Caso contrário, leia abaixo.



Vamos olhar de perto na área. Como você pode ver, a área é uma longa fita fina. Infelizmente, não é um retângulo - mas está muito perto de ser. A maior parte da área vem do retângulo $ABCD$ e sua área é o produto do comprimento $f(x)$ pela largura Δx, isso é, $f(x)\Delta x$. A área desejada ΔA difere da área do retângulo pela área da figura ADE, que é quase um triângulo exceto pela lado AE que não é uma linha reta. Quando o valor de Δx fica cada vez menor, a área da figura ADE se diminui ainda mais rápido por conta de sua base AD e sua altura DE se tornarem cada vez menores, ao passo que para o retângulo $ABCD$ a altura se preserva fixa, enquanto apenas sua largura, $BC = \Delta x$, diminui. (Talvez esse argumento tenha um tom familiar. O que estamos implicando é que a aproximação se aproxima da igualdade no *limite* em que $\Delta x \to 0$. Mais precisamente, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta A/(f(x)\Delta x) = 1$.

Para valores suficientemente pequenos de x, então, podemos dizer que

$$A \approx f(x)x.$$

Note que com uma precisão parecida, poderíamos ter dito

$$A \approx f(x + x)x,$$

e, com precisão ainda maior

$$A \approx f\Big(x + \frac{x}{2}x\Big).$$

De qualquer maneira, a primeira dessas equações é a mais simples e suficientemente precisa se x é pequeno o bastante.

Utilizando a expressão aproximada para A, podemos calcular $A'(x)$ e justificar a identidade $A'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} A'(x) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= \lim_{x \to 0} \frac{A(x + x) - A(x)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{A}{x}. \end{aligned}$$

Se x é pequeno, podemos usar o resultado da lição **297**.

$$A \approx f(x)x.$$

Como explicado na última lição, a aproximação se torna cada vez mais exata conforme x diminui. Consequentemente,

$$A'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{A}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)x}{x} = f(x).$$

Vá para **299**.

299

Para resumir essa seção, nós descobrimos que a área $A(x)$ abaixo de uma curva definida por $y = f(x)$ satisfaz a equação $A'(x) = f(x)$. Então, se conseguimos descobrir a função cuja derivada é $f(x)$, nós podemos encontrar a área.

Como foi falado anteriormente, o processo de encontrar a função cuja derivada é outra função é chamado *integração* ou *antiderivação*. Nas próximas seções nós vamos aprender alguns métodos para integração e aplicá-los no cálculo de áreas e em outros problemas, como encontrar a distância viajada por um veículo cuja velocidade está mudando, ou então calcular o tamanho de populações (ou contas financeiras) que estão crescendo com uma taxa variável.

Vá para **300**.

Integração

300

O objetivo desta seção é aprender algumas técnicas de *integração* ou *antiderivação*. (Por hora, vamos continuar utilizando ambos os termos, mas mais tarde deixaremos de usar o termo mais descritivo, *antiderivação*, e passar a usar apenas o mais comum, *integração*.)

Nesta seção, geralmente vamos designar uma função por $f(x)$ e sua integral ou antiderivada por $F(x)$. Assim,

$$F'(x) = f(x).$$

Essa notação descreve a propriedade básica da antiderivada, mas apenas define a derivada $F'(x)$, mas não $F(x)$ em si. A antiderivada é mais frequentemente escrita na seguinte forma:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ é chamada de *integral indefinida de* $f(x)$, ou apenas integral de $f(x)$. (Mais adiante, vamos nos deparar com outro tipo de integral, chamada *integral definida*, que é um número e não uma função de uma variável.) o símbolo $\int$ é chamado de símbolo de integração, porém nunca é utilizado sozinho.

Para resumir a notação, se $F'(x) = f(x)$, então $F(x)$ é ________________ ou ________________ de $f(x)$.

Vá para **301**.

301

É possível encontrar a antiderivada ou a integral indefinida simplesmente "chutando de forma educada". Por exemplo, se $f(x) = 1$. $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = x$. Para mostrar isso, veja que

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1 = f(x)$$

. Apesar disso, x não é a única antiderivada de $f(x) = 1$; $x + c$, onde c é qualquer constante, também é uma antiderivada válida, pela seguinte razão:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x + c) = 1 + 0 = f(x).$$

Na verdade, uma constante *sempre* pode ser adicionada a uma função de modo a não alterarmos sua derivada. O que importa é não omitir esta constante arbitrária, pois sua omissão configura uma resposta incompleta.

Vá para **302**.

302

Visto que integração é a operação inversa da diferenciação, para cada regra de diferenciação apresentada no Capítulo 2, existe uma regra de integração correspondente. Conforme o Capítulo 2,

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x,$$

logo, pela definição de integral indefinida:

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c.$$

Agora é sua vez de tentar. Qual o resultado de

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x?$$

Resposta: [$\cos x + c$ | $-\cos x + c$ | $\sin x \cos x + c$ | nenhuma das anteriores]

Assegure-se de ter entendido a resposta correta (você pode fazer isso derivando seu resultado) e depois

Vá para **303**.

303

Agora, encontre as integrais a seguir (por simplicidade, a constante c foi omitida das respostas).

(a) $\int x^n \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}x^n \;\middle|\; \frac{1}{n}x^{n+1} \;\middle|\; \frac{1}{n+1}x^{n+1} \;\middle|\; \frac{1}{n-1}x^n \right]$

(b) $\int e^x \, \mathrm{d}x = \left[e^x \;\middle|\; xe^x \;\middle|\; \frac{1}{x}e^x \;\middle|\; \text{nenhuma das anteriores} \right]$

Se seus resultados estiverem corretos, você está no caminho certo e deve

ir para a lição **305**.

Caso contrário, vá para a lição **304**.

304

Caso você tenha cometido algum errinho na resolução da lição anterior, mas já está ciente dele, corrija-o e siga para a lição **305**.

Se

$$F = \int f(x) \, \mathrm{d}x,$$

então

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x).$$

Portanto, se desejamos encontrar F, devemos encontrar uma expressão que, ao ser derivada, resulte em $f(x)$. Bem, veja que a derivada de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}x^{n+1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n,$$

visto que vale a fórmula de diferenciação de x^n apresentada no Capítulo 2. Deste modo, ao incluirmos a constante de integração c, concluímos que $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$. (Atente-se ao fato de esta fórmula não funcionar no caso $n = -1$.)

De modo similar, usando o que vimos no Capítulo 2,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$$

. Daí,

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c.$$

Vá para **305**.

305

Até o momento, descobrimos integrais apenas buscando por uma função cuja derivada é o integrando. Isso funciona razoavelmente bem em diversos casos, especialmente quando você adquire certa prática. mas ter uma lista de algumas integrais importantes também é algo bem-vindo. Não há vergonha em recorrer a uma lista desse tipo. Claro, se você está frequentemente em contato com cálculo, chega um ponto em que você saberá de cabeça (quase) todos os resultados das integrais listadas a seguir, ou pelo menos terá experiência suficiente para fazer chutes educados. Você sempre pode conferir seus chutes via diferenciação.

Uma tabela com algumas integrais importantes está presente na próxima lição. Você pode verificar a validez de qualquer uma das equações

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x = F(x)$$

ao confirmar que

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x).$$

Recorreremos brevemente a este modo como modo de verificar alguma dessas equações.

Vá para **306**.

Respostas: (300) Antiderivada, integral indefinida (em qualquer ordem); (**302**) $-\cos x + c$; (**303**) (a) $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ (b) e^x

306

Lista de Integrais Importantes. Por simplicidade, omitiremos a constante de integração c; a e n são constantes.

1. $\int a\,\mathrm{d}x = ax$
2. $\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int (u+v)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}x + \int v\,\mathrm{d}x$
4. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$
5. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x$
6. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$
7. $\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{ax}}{x}$
8. $\int b^{ax}\,\mathrm{d}x = \dfrac{b^{ax}}{a\ln b}$
9. $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$
10. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$
11. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$
12. $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x)$
13. $\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln(\sin x)$
14. $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln(\sec x + \tan x)$
15. $\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin^2 x$
16. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$
17. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$
18. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\bigl(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\bigr)$

Por conveniência, esta lista é repetida como Tabela 2 próximo ao fim do livro.

Vá para **307**.

307

Vejamos se você consegue verificar algumas das fórmulas da lista acima. Mostre que as integrais em 9 e em 15 estão corretas.

Caso tenha conseguido mostrar as fórmulas pedidas, vá para **309**.

Caso tenha interesse na demonstração dessas fórmulas, vá para **308**.

308

Para provar que $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, devemos verificar que $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$.

9. $F(x) = x \ln x - x$, $f(x) = \ln x$.

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \ln x - x) = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x - 1 = \ln x = f(x).$$

15. $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$, $f(x) = \sin x \cos x = f$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\sin^2 x\right) = \frac{1}{2}(2\sin x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \sin x \cos x.$$

Vá para **309**.

Algumas técnicas de integração

309

Costumeiramente, funções não triviais podem ser escritas em termos de funções com as quais estamos familiarizados e cujas integrais são conhecidas. Uma técnica que faz uso dessa ideia é a *mudança de variável*. Essa técnica é aplicável para integrar uma "função de uma função". (Diferenciação deste tipo de função foi discutida na lição **198**. Isso é feito via regra da cadeia.) Por exemplo, e^{-x^2} pode ser escrita como e^{-u}, onde $u = x^2$. Com a regra a seguir, a integral com respeito à variável x torna-se numa outra integral, geralmente mais simples, com respeito à variável u.

$$\boxed{\int w(u)\,\mathrm{d}x = \int \left[w(u)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right]\mathrm{d}u}.$$

Vejamos com essa técnica funciona na prática.

Vá para **310**.

310

Queremos avaliar a integral

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Defina $u = x^2$, ou $x = \sqrt{u}$. Segue que $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = 1/2\sqrt{u} = 1/2x$. Usando a regra para mudança de variáveis $\int w(u)\,\mathrm{d}x = \int \left[w(u)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right]\mathrm{d}u$, a integral desejada torna-se

$$\int xe^{-u}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int e^{-u}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}e^{-u} + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

Para provar que este resultado de fato está correto, note que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c\right) = xe^{-x^2},$$

como desejado.

Tente resolver o problema a seguir. Caso necessite de uma dica, veja a lição **311**.

Avalie a integral $I = \int \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Para verificar sua resposta, vá para **311**.

311

Seja $u = \sin\theta$. Então $\frac{du}{d\theta} = \cos\theta$, e pela regra de mudança de variável,

$$\begin{aligned}\int \sin\theta\cos\theta d\theta &= \int u\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}du\\ &= \int udu = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}\sin\theta + c.\end{aligned}$$

Vá para **312**.

312

Aqui está um exemplo de uma simples mudança de variável. O problema é calcular $\int \sin 3xdx$. Se chamarmos $u = 3x$, então a integral é $\sin u$, que é facilmente integrável. Usando $dx = du/3$, temos

$$\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin u du = \frac{1}{3}(-\cos u + c)$$
$$= \frac{1}{3}(-\cos 3x + c).$$

Para ver se entendeu, calcule

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$$

(Você pode achar útil a tabela de integrais na lição **306**.)

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \underline{\hspace{6cm}}\ .$$

Para verificar sua resposta, vá para **313**.

313

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \sin^2\frac{x}{2} + c$$

Se obteve esse resultado, vá diretamente para **314**. Caso contrário, continue aqui. Se chamarmos $u = x/2$, então $dx = 2du$ e

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx = 2\int \sin u \cos u du$$

Pela fórmula 15 na lição **306** temos

$$\int \sin u \cos u du = \frac{1}{2}\sin^2 u + c = \frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2} + c$$

então

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx = 2\left(\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2} + c\right) = \sin^2\frac{x}{2} + C$$

($C = 2c =$ constante qualquer.)

Verifiquemos esse resultado:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^2\frac{x}{2}+C\right)=2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)(2)=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

como precisava ser. (Utilizamos a regra da cadeia aqui.)

Vá para **314**.

314

Tente calcular $\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}$, onde a e b são constantes. A tabela de integrais na lição **306** pode ajudar.

$$\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\underline{\hspace{4cm}}\ .$$

Vá para **315** para solução.

315

Se chamarmos $u=bx$, então $dx=du/b$ e

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}&=\frac{1}{b}\int\frac{du}{a^2+u^2}\\&=\frac{1}{ab}\left(\tan^{-1}\frac{u}{a}+c\right)\quad\text{(Lição \textbf{306}, fórmula 16)}\\&=\frac{1}{ab}\left(\tan^{-1}\frac{bx}{a}+c\right).\end{aligned}$$

Vá para **316**.

316

Vimos como calcular uma integral mudando a variável de x para $u=ax$, onde a é alguma constante. Frequentemente é possível simplificar a integral substituindo ainda outros termos pela variável. Aqui está um exemplo. Calcule.

$$\int\frac{xdx}{x^2+4}.$$

Suponha que chamamos $u^2=x^2+4$. Então $2udu=2xdx$, e

$$\int\frac{xdx}{x^2+4}=\int\frac{udu}{u^2}=\int\frac{du}{u}=\ln u+c=\ln\sqrt{x^2+4}+c.$$

Tente usar esse método para calcular a seguinte integral:

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx.$$

Resposta: ____________________

Vá para **317** para verificar sua resposta.

317

Tomando $u^2 = 1 + x^2$, então $2udu = 2xdx$ e

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx = \int u(udu) = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + c$$
$$= \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2} + c.$$

Vá para **318**.

318

Uma técnica conhecida como *integração por partes* é por vezes útil. Suponha u e v duas funções de x. Então, usando a regra do produto para diferenciação,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Agora integrando ambos os lados da equação com respeito a x.

$$\int \frac{d}{dx}(uv)dx = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx,$$
$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu.$$

Mas, $\int d(uv) = uv$, e após a substituição, temos

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Aqui está um exemplo: encontre $\int \theta \sin\theta d\theta$.

Seja $u = \theta$, $dv = \sin\theta d\theta$. Então é fácil ver que $du = d\theta$, $v = -\cos\theta$. Portanto

$$\begin{aligned}\int \theta \sin\theta d\theta &= \int u dv = uv - \int v du \\ &= -\theta\cos\theta - \int(-\cos\theta)d\theta \\ &= -\theta\cos\theta + \sin\theta.\end{aligned}$$

Vá para **319**.

319

Tente usar integração por partes para encontrar $\int xe^x dx$. Resposta (constante omitida):

[$(x-1)e^x$ | xe^x | e^x | $xe^x + x$ | nenhuma das alternativas]

Se acertou, vá para **321**.

Se errou esta, ou deseja ver como resolver o problema, vá para **320**.

320

Para encontrar $\int xe^x dx$ usando a fórmula de integração por partes, podemos chamar $u = x$, $dv = e^x dx$, tal que $du = dx$, $v = e^x$. Então,

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x = (x-1)e^x.\end{aligned}$$

Vá para **321**.

321

Encontre a seguinte integral usando o método de integral por partes:

$$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Resposta: ________________

Confira sua resposta em **322**.

322

$$\int x\ \cos(x)\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + c.$$

Se quiser ver a dedução disto, continue aqui. Caso contrário, vá direto a **323**.
Façamos as seguintes substituições e integremos por partes:

$$u = x\,,\ \mathrm{d}v = \cos(x)\mathrm{d}x$$

Assim, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = \sin(x)$

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\mathrm{d}x &= \int u\mathrm{d}v = uv - \int v du = x\sin(x) - \int \sin(x)\mathrm{d}x \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + c\end{aligned}$$

Vá para **323**.

323

Em problemas de integração é frequente precisarmos usar um número de diferentes técnicas de integração em um único problema.
Tente o seguinte(b é uma constante):

(a) $\int(\cos(5\theta) + b)\mathrm{d}\theta =$ ________________

(b) $\int x\ \ln(x^2)\mathrm{d}x =$ ________________

Vá a **324** para as respostas.

324

As respostas corretas são

(a) $\int(\cos(5\theta) + b)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{5}\sin(5\theta) + b\theta + c$

(b) $\int x\ \ln(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[x^2(\ln(x^2) - 1) + c]$

Se você respondeu ambos problemas corretamente, está indo bem - pule direto para **326**. Se você errou algum, vá à lição **325**.

325

Se você errou (a), talvez tenha se confundido com a mudança de notação de x para θ. Lembre-se que x é apenas um símbolo geral para uma variável. Todas as fórmulas de integração poderiam ser escritas com θ, ou z, ou o que você desejar no lugar do x. Agora, vejamos (a) em detalhes:

$$\begin{aligned}\int (\cos(5\theta) + b)\mathrm{d}\theta &= \int \cos(5\theta)\mathrm{d}\theta + \int b\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{5}\int \cos(5\theta)\,\mathrm{d}(5\theta) + \int b\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{5}\sin(5\theta) + b\theta + c.\end{aligned}$$

Para o problema (b), faça $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$:

$$\int x\ln\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(u\ln(u) - u + c)$$

[O último passo usa a fórmula 9, da lição **306**.] Portanto,

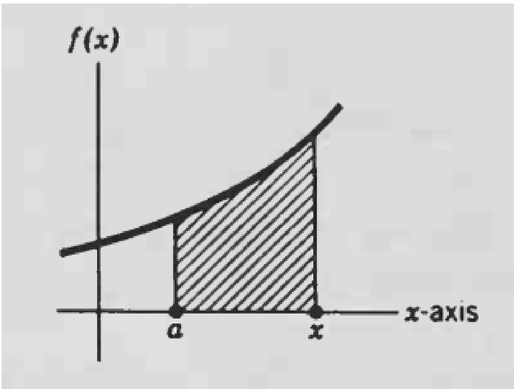
$$\int x\ln\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x^2\ln\left(x^2\right) - x^2 + c)$$

Você também poderia ter resolvido este problema com integração por partes.

Vá a **326**.

Mais sobre a área sob uma curva

326



A ideia de integração foi introduzida pelo problema de encontrar a área $A(x)$ abaixo de uma curva, $f(x)$. Na lição **297** mostramos que

$$A'(x) = f(x),$$

e aprendemos um número de técnicas para encontrar a integral de uma função. Em geral, podemos escrever

$$A(x) = F(x) + c$$

onde $F(x)$ é uma antiderivada qualquer de $f(x)$ e c é uma constante arbitrária. No entanto, dada $f(x)$ e o intervalo limitado por a e algum valor x, não há nada arbitrário sobre a área. Assim para encontrar a área, devemos achar o valor correto para a constante c.
A maneira mais simples de fazer isto é notar que se olharmos $x = a$, a área tem base de comprimento nulo e portanto deve ser nula por si. Assim,

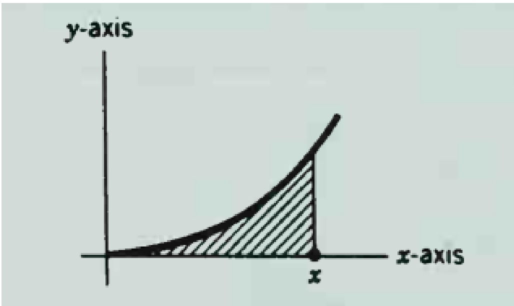
$$A(a) = F(a) + c = 0$$

Então, $c = -F(a)$, e a área é dada por

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

Vá a **327**.

327



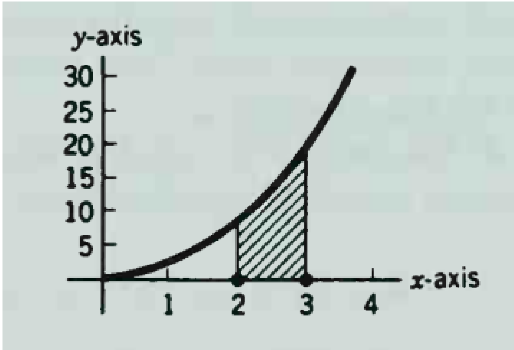
Para ver como tudo isso funciona, encontraremos a área abaixo da curva $y = x^2$ entre $x = 0$ e algum outro valor de x. Agora,

$$\begin{aligned}\int x^2 \mathrm{d}x &= \frac{1}{3}x^3 + c = F(x)\\ A(x) = F(x) - F(0) &= \frac{1}{3}x^3 + c - \left(\frac{1}{3}0^3 + c\right)\\ &= \frac{1}{3}x^3\end{aligned}$$

Note que a constante indeterminada c some, como de fato deveria. Isso ocorre sempre que avaliamos uma expressão como $F(x) - F(a)$, então podemos simplesmente omitir o c. Faremos isto em algumas das próximas lições.

Vá a **328**.

328



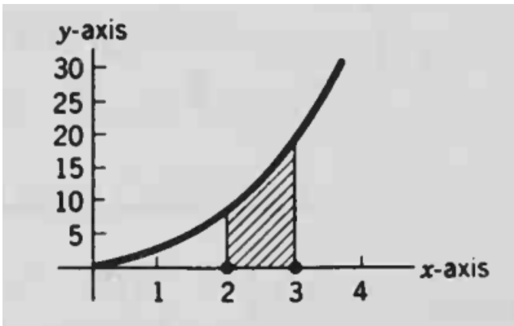
Você consegue encontrar a área abaixo da curva $y = 2x^2$, entre os pontos $x = 2$ e $x = 3$?

$$A = \ [\ 13 \mid 1/3 \mid 38/3 \mid 18\ ]$$

Se correto, vá a **330**.

Caso contrário, vá a **329**.

329



Aqui está como resolver o problema:

$$A = F(3) - F(2), \qquad F(x) = \int 2x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3,$$

$$A = \frac{2}{3} \times 27 - \frac{2}{3} \times 8 = 18 - \frac{16}{3} = \frac{38}{3}$$

Vá a **330**.

330

Encontre a área abaixo da curva $y = 4x^3$ entre $x = -1$ e $x = 2$.

$$A = \ [\ 17 \mid 15/4 \mid 15 \mid -16\ ]$$

Vá a **331**.

331

Antes de seguirmos em frente, introduzamos uma notação para diminuir nosso trabalho. Frequentemente temos que encontrar a diferença de uma expressão avaliada em dois pontos, como $F(b) - F(a)$. Isto é comumente denotado por

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

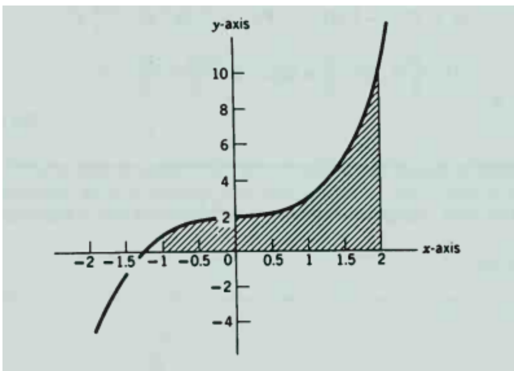
Por exemplo, $x^2|_a^b = b^2 - a^2$.
Como outro exemplo, a solução do último problema poderia ter sido escrita

$$A = \int_{-1}^{2} 4x^3 \mathrm{d}x = x^4|_{-1}^{2} = 2^4 - (-1)^4 = 16 - 1 = 15$$

Vá para **332**.

332

Façamos mais um problema para praticar:
Abaixo temos um gráfico de $y = x^3 + 2$. Encontre a área entre a curva e o eixo-x de $x = -1$ até $x = 2$.



Resposta: [5 | 1/4 | 4 | 17/4 | 39/4 | Nenhum desses]

Caso correto, vá para **334**.

Caso contrário, vá para **333**.

333

Aqui está como resolver o problema:

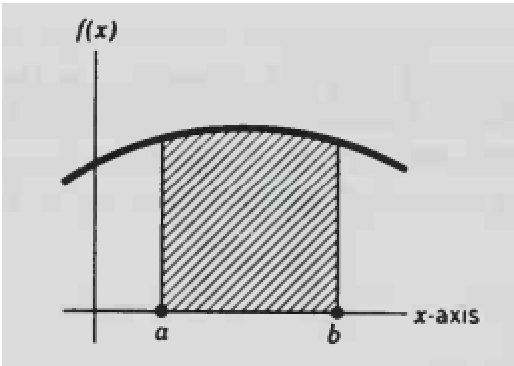
$$
\begin{aligned}
A &= F(2) - F(-1) = F(x)|_{-1}^{2} \\
F &= \int y\mathrm{d}x = \int (x^3 + 2)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + 2x \\
A &= \left(\frac{1}{4}x^4 + 2x\right)\Big|_{-1}^{2}
\end{aligned}
$$

Vá para **334**.

Integrais definidas

334

Nesta seção veremos outra forma de calcular a área abaixo de uma curva. Nosso novo resultado será equivalente ao obtido na última seção, mas trará um novo ponto de vista.



Vamos fazer um breve resumo da última seção. Se A é a área abaixo da curva de $f(x)$ entre $x = a$ e algum valor x, então mostramos(lição **297**) que $\mathrm{d}A/\mathrm{d}x = f(x)$. Disso mostramos(lição **326**) que se $F(x)$ é uma integral indefinida de $f(x)$, i.e. (isto é) , $F' = f$, então a área abaixo de $f(x)$ entre os valores de x, a e b, é dado por

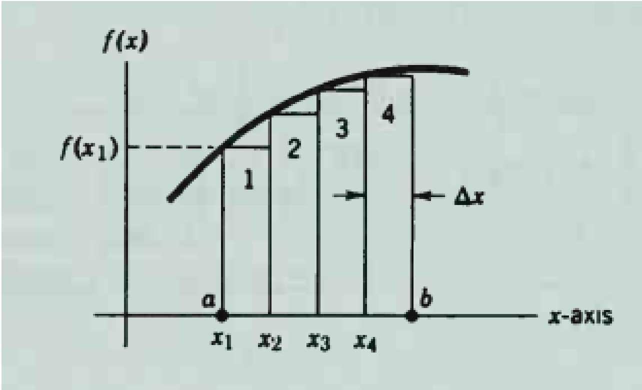
$$A = F(b) - F(a)$$

Agora veremos nosso novo método!

Vá a **335**.

335

Vamos avaliar a área abaixo da curva da seguinte maneira:



Primeiro dividimos a área em um número de faixas de bases de comprimentos iguais ao desenhar linhas paralelas ao eixo de $f(x)$. A figura mostra quatro dessas faixas desenhadas. As faixas tem topos irregulares, mas podemos lhes fazer retangulares desenhando uma linha horizontal no topo de cada faixa como mostrado. Suponha que rotulemos as faixas 1,2,3 e 4. O comprimento de cada faixa é

$$\Delta x = \frac{b-a}{4}.$$

A altura da primeira faixa é $f(x_1)$, onde x_1 é o valor de x no início da primeira faixa. Similarmente, a altura da faixa 2 é $f(x_2)$, onde $x_2 = x_1 + \Delta x$. As terceiras e quartas faixas tem alturas $f(x_3)$ e $f(x_4)$, respectivamente, onde $x_3 = x_1 + 2\Delta x$ e $x_4 = x_1 + 3\Delta x$.

Vá para **336**.

336

Você deve ser capaz de escrever uma expressão aproximada para a área de qualquer faixa. Se precisar de ajuda, reveja a lição **297**. Abaixo, escreva a expressão aproximada para a área da faixa 3, ΔA_3,

$$\Delta A_3 \approx \underline{\hspace{4cm}}$$

Para a resposta correta, vá a **337**.

337

A área aproximada da faixa é $f(x_3)\Delta x$. Se você quiser ver uma discussão sobre isso, veja de novo a lição **297**.
Você pode escrever uma expressão para A, a área total das 4 faixas?

$$A \approx \underline{\hspace{4cm}}$$

Tente isto, e então veja **338** para a resposta correta.

338

Uma expressão aproximada para a área total é simplesmente a soma das áreas de todas as faixas. Em símbolos, já que $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \Delta A_4$, nós temos

$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x.$$

Também podemos escrever isto

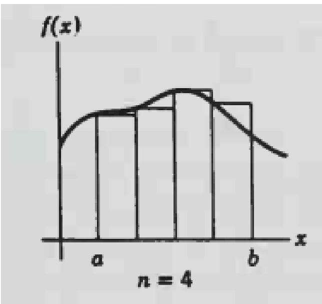
$$A = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x.$$

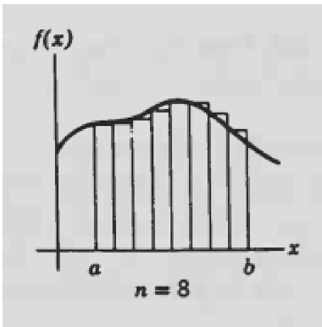
Σ é a letra grega *sigma*, que corresponde à letra inglesa [1] S e aqui significa soma. O símbolo $\sum_{i=1}^{N} g(x_i)$ significa $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + \cdots + g(x_N)$.

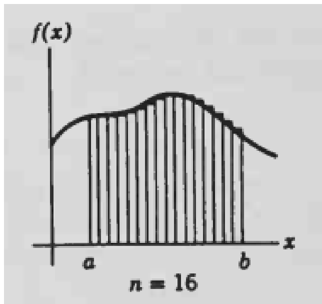
Vá a **339**.

339

Suponha que dividamos a área em mais e mais faixas, cada qual é mais e mais fina, como mostrado nos desenhos. Evidentemente nossa aproximação fica melhor e melhor.







Se dividirmos a área em N faixas, então $A \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x$, onde $N = \frac{b-a}{\Delta x}$. Agora, se tomarmos o limite onde $\Delta x \to 0$, a aproximação vira uma igualdade. Assim,

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x$$

Um limite deste tipo é tão especial que recebe um nome e símbolo especiais. Ele é chamado de *integral definida* e é escrito $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Este símbolo se parece com o da integral indefinida $\int f(x)\mathrm{d}x$, e como veremos na próxima lição, eles tem relação. No entanto, é importante lembrar que a integral definida é definida pelo limite descrito acima. Assim, por definição,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x}$$

[1] N. do T.: e portuguesa

(De fato, o símbolo $\int$ veio da letra S e assim como sigma foi convencionado significar *soma*.)

Vá para **340**.

340

Com esta definição para a integral definida, a discussão na última lição mostra que a área A abaixo da curva é igual à integral definida.

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Mas vimos anteriormente que a área também pode ser calculada através da integral *indefinida*.

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

e temos

$$A = F(b) - F(a).$$

Portanto, temos a relação geral geral

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \left\{ \int f(x)\mathrm{d}x \right\} \Big|_a^b}$$

Assim a integral *definida* pode ser expressa em termos de uma integral *indefinida* avaliada nos limites. Este fato notável é frequentemente chamado de *o teorema fundamental do cálculo integral.*

Vá para **341**.

341

Para ajudar a se lembrar da definição de integral definida, tente escreve-la você mesmo. Escreva a expressão definindo a integral definida de $f(x)$ entre os limites a e b.

Para checar a sua resposta, vá para **342**.

342

A resposta correta é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x\,, \qquad \text{onde } N = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Parabéns se você escreveu isso ou uma expressão equivalente.

Se você escreveu:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,, \qquad \text{onde } F(x) = \int f(x)dx$$

Nada do que você escreveu está errado, mas não se trata da *definição* de uma integral definida. A resposta correta é verdadeira exatamente porque ambos os lados representam a mesma coisa — a área sob a curva dada por $f(x)$ entre os pontos $x = a$ e $x = b$. Se trata de um resultado importante, uma vez que sem ele nós não teríamos uma forma de calcular integrais definidas, mas não é um resultado que é verdadeiro por definição.

Se esse raciocínio está claro para você vá para **343**. Caso contrário, reveja o material nesse capítulo, e então, para ver uma subsequente discussão de integrais definidas e indefinidas,

vá para 343.

343

Talvez a integral definida possa parecer uma complicação desnecessária para você. Afinal, a única coisa que nós fizemos com ela foi escrever a área sob uma curva de uma segunda maneira. Para se conseguir realmente calcular a área, precisáramos voltar para a integral indefinida. Entretanto, nós poderíamos ter simplesmente encontrado a área diretamente pela integral indefinida. A importância da integral definida surge da sua definição como um *limite* de uma soma. O processo de dividir um sistema em vários pequeninos pedaços e então soma-los juntos, todos, é aplicável a muitos problemas[2]. Isso naturalmente leva a integrais definidas que nós podemos calcular em termos de integrais indefinidas através do uso do teorema fundamental em **340**.

Vá para **344**.

344

Você consegue provar que:

[2]Nota do T.: Essa passagem está meio vaga no texto original, mas basta saber que nem toda função que podemos escrever explicitamente tem uma integral também passível de ser escrita explicitamente, logo poder aplicar a definição da integral definida como um limite de uma soma nos possibilita calcular aproximações cada vez melhores para a integral ao passo que melhoramos a aproximação do limite.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,?$$

Depois de ter tentado provar esse resultado, vá para **345**.

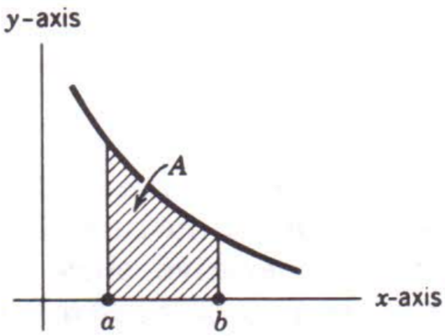
345

A prova de que $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ é simples.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,, \qquad \text{onde } F(x) = \int f(x)dx,$$

mas

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)dx.$$



Os pontos a e b são chamados de limites de integração [isso nada tem a ver com $\lim_{x\to a} f(x)$; aqui limite simplesmente significa a borda]. O processo de calcular:

$$\int_a^b f(x)dx$$

é comumente falado como "integrando $f(x)$ de a a b" , e a expressão é chamada de "integral de $f(x)$ de a a b" .

Vá para **346**.

346

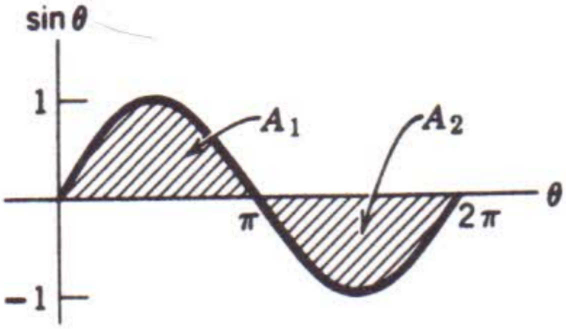
Qual das seguintes expressões dá corretamente o resultado de $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$?

$$[\ 1 \mid 0 \mid 2\pi \mid -2 \mid -2\pi \mid \text{nenhuma das anteriores}\ ]$$

vá para **347**.

347

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{2\pi} = -(1-1) = 0$$



É fácil de ver o porquê desse resultado ser verdadeiro através da inspeção da figura. A integral retorna o valor total da área sob a curva, de 0 a π, que é a soma das áreas A_1 e A_2. Mas A_2 é negativa, uma vez que $\operatorname{sen}\theta$ é negativo na respectiva região. Por simetria, as duas áreas se somam para 0. No entanto você deveria ser capaz de encontrar o valor de A_1 ou A_2 separadamente. Tente o seguinte problema:

$$A_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = [\ 1 \mid 2 \mid -1 \mid -2 \mid \pi \mid 0\ ]$$

Se correto, vá para **349**.
Senão, siga para **348**.

348

$$A_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi} = -[-1-(+1)] = 2$$

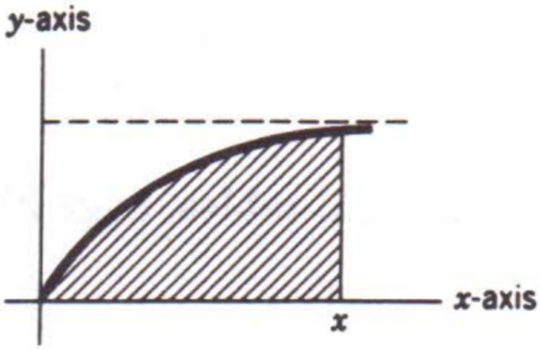
Se você se esqueceu dessa integral você pode acha-la na tabela 2 de integrais na página (??) no final do texto, aferindo o valor de $\cos\theta$ nos limites de integração, precisamos nos lembrar de que $\cos\pi = -1$ e de que $\cos 0 = 1$.

Vá para **349**.

Resposta: (346) 0

349

Aqui está um gráfico da função $y = 1 - e^{-x}$.



Você consegue encontrar a área hachurada sob a curva entre a origem e x ?

Resposta:[e^{-x} | $1 - e^{-x}$ | $x + e^{-x}$ | $x + e^{-x} - 1$]

Vá para **351** se você calculou corretamente.

Veja em **350** a solução, ou se você quiser ler uma leve discussão sobre o significado de área.

350

Aqui está a solução de **349**:

$$A = \int_0^x y\,dx = \int_0^x (1 - e^{-x})\,dx = \int_0^x dx - \int_0^x e^{-x}\,dx$$
$$= [x - (-e^{-x})]\Big|_0^x = [x + e^{-x}]\Big|_0^x = x + e^{-x} - 1$$

A área encontrada tem como extremidade a linha vertical passando por x. O nosso resultado nos dá A como uma variável que depende de x. Se nós escolhermos um valor específico para x, nós podemos substitui-lo na fórmula acima para A e então obter o valor de A para aquele

x específico. Nós então calculamos uma integral definida em que um dos limites de integração foi deixado como uma variável.

Vá para **351**.

351

Vamos calcular mais uma integral definida antes de seguir em frente. Encontre:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(Se você precisar, use a tabela de integrais, página 256)

Resposta:[0 | 1 ∞ | π |$\pi/2$ | Nenhum desses]

Se você encontrou a resposta correta, vá para **353**.

Se você encontrou a resposta errada, ou nenhuma resposta, vá para **352**.

352

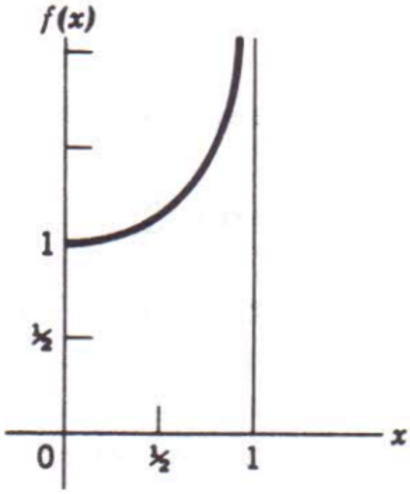
Da tabela de integrais, página **256**, nós vemos que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}\Big|_0^1 = \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0$$

Então $\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$, sabendo que $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Similarmente, $\sin^{-1} 0 = 0$. Então, a integral tem o valor $\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$



Um gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ é mostrada acima. Embora a função é descontínua em $x = 1$, a área embaixo da curva é perfeitamente bem definida.

Respostas:(**347**) 2 (**349**) $x + e^{-x} - 1$

Vá para **353**

Integração numérica

353

Nos quadros que precedem, nós aprendemos algumas técnicas para integração; as referências listadas no Apêndice B descrevem muitas outras. Não existe, portanto, um método geral de encontrar uma integral indefinida de uma função. Integrais indefinidas de centenas de funções podem ser integradas por alguma mudança de variáveis esperta que transforma elas em alguma das formas tabeladas, mas integrais para muitas outras funções são simplesmente não conhecidas. Não obstante, integrais definidas podem sempre ser calculadas numericamente. Com um computador, integração numérica é bastante precisa e eficiente que a integral definida pode ser calculada tão facilmente quanto se estivesse tabulada. Um computador não é essencial, mas você vai descobrir que uma calculadora (particularmente uma calculadora programável) é uma encurtadora de tempo enorme ao executar a integração numérica.

Vá para **354**.

354

Relembre do quadro **339** que a integral definida é o limite da soma

$$\int_a^b ydx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{N} y(x_i)\Delta_i$$

onde $\Delta = (x_b - x_a)/N$. Enquanto N aumenta, a área embaixo dos triângulos aproxima da área embaixo da curva.
Para um valor finito de N, a área embaixo dos triângulos não é idêntica a integral [a menos $y(x) =$ constante], mas ela pode ser perto. Essa é a ideia básica da integração numérica. Aqui está o procedimento.

1. Divida o intervalo $b - a$ em algum número conveniente N de intervalos iguais, $\Delta = (b - a)/N$.

2. Calcule $y_i = y(x_i)$ em cada intervalo, onde $y = 1, 2, ..., N$.

3. Multiplique cada y_i por Δ.

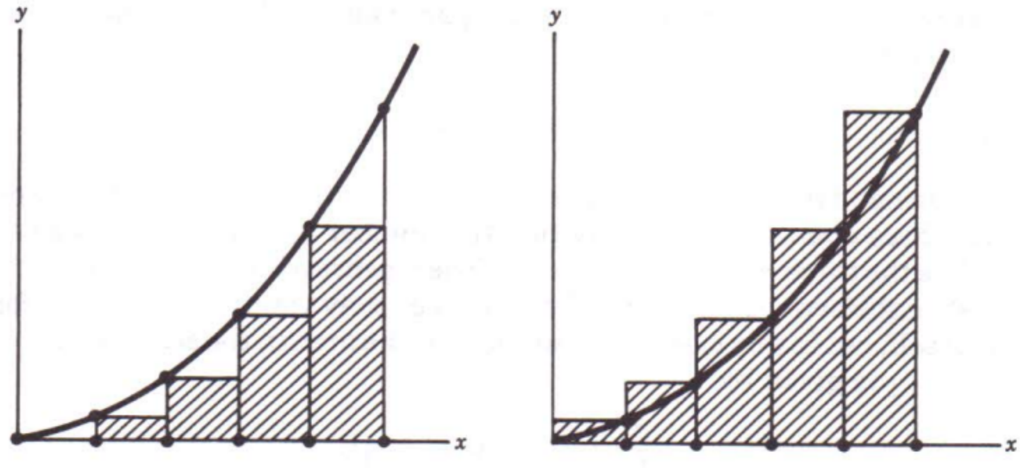
4. Some os resultados.

O resultado final é uma aproximação da integral. O quão boa a aproximação é depende da escolha de N e o preciso método no qual a soma é calculada.
Ao executar os passos acima, talvez tenha lhe ocorrido que um grande quantidade de multiplicação é evitada se primeiro adicionarmos todos os y_i's e só depois multiplicarmos o resultado final por Δ. Então,

$$S = \sum_{i=1}^{N} (y_i \Delta) = \Delta \sum_{i=1}^{N} y_i$$

355

Ao calcular a integral numericamente, uma escolha para y_i pode ser feita tanto no fim do intervalo quanto no percorrer do desenho. Para a função mostrada, é evidente que uma escolha subestima a integral enquanto a outra superestima. Nenhuma parece particularmente precisa. Tomando por y_i o valor de y tanto no fim do intervalo é tão ruim quanto tomar no ponto do meio. No entanto, um procedimento ainda melhor seria tomar uma razoável média ponderada de y nos fins e no meio.



Um processo de média que é simples, preciso e largamente utilizado considera o intervalo em pares e pesa o ponto do meio de cada par 4 vezes a mais que cada fim. Nesse caso,

$$\bar{y}_i = \frac{1}{6}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}).$$

(Note que o comprimento desse par de segmentos é 2Δ, não Δ.) Se então o intervalo inteiro é dividido em um número par de intervalos,

$$\begin{aligned}\int_A^B y dx &= \frac{2\Delta}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2 + 4y_3 + y_4 + ... + y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N) \\ &= \frac{\Delta}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2 + 4y_3 + y_4 + ... + y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N)\end{aligned}$$

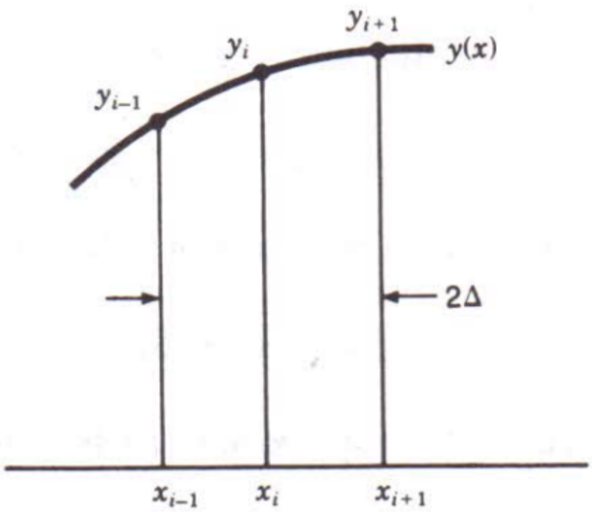
Esse método é chamado **regra de Simpson**. Se você quiser apenas saber porque ele funciona tão bem, vá para **356**. De outro jeito,

---

Resposta:(**351**) $\pi/2$

Pule para **357**.

356



A regra de Simpson é baseada na ideia que a curva mais simples que passa através de 3 pontos é uma parábola. Então, se assumirmos que no intervalo mostrado

$$y = ax^2 + bx + c$$

e demandar que $y_j = ax_j^2 + bx_j + c$, onde $j = i - 1$, i e $i + 1$ em turno, um tem 3 equações, esses são apenas o número de equações necessárias para definir as 3 constantes a, b e c. A álgebra para resolver para a, b e c é simples, mas um pouco demorado. Você deve querer trabalhar com isso por sua conta, mas em qualquer caso, o resultado é que a área no segmento $x_{i-1} < x < x_{i+1}$ é dado por

$$\frac{\Delta}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$$

no qual é a expressão utilizada na regra de Simpson.

357

Aqui está um exemplo de como a lei de Simpson funciona. O objetivo é calcular $I = \int_0^{10} x^3 dx$. Nós podemos fazer essa integral exatamente, pelo qual irá torná-la fácil para checar a precisão do cálculo numérico.

$$I = \int_0^{10} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\bigg|_0^{10} = \frac{1}{5} \times 100,000 = 20,000.$$

Nós devemos tomar $N = 10$. Então, $\Delta = \frac{10-0}{10} = 1.x_0 = 0$, $x_{10} = 10$ e em geral $x_i = (i)(\Delta) = i$. Se nós denotarmos a soma dos termos ímpares por

$$S_{\text{odd}} = S_1 + S_3 + S_5 + S_7 + S_9$$

e a soma dos termos pares dentro do intervalo por

$$S_{\text{even}} = S_2 + S_4 + S_6 + S_8$$

então, pela regra de Simpson, a aproximação para a integral é

$$I' = \frac{\Delta}{3}(y_0 + 4S_{\text{odd}} + 2S_{\text{even}} + y_{10}).$$

I' pode ser calculado utilizando as tabelas abaixo.

i	x_i	x_i^2	x_i^4
1			
3			
5			
7			
9			
		S_{odd} =	

i	x_i	x_i^2	x_i^4
2			
4			
6			
8			
		S_{even} =	

$y_0 = x_0^4$	
$4S_{\text{odd}}$	
$2S_{\text{even}}$	
$y_{10} = x_{10}^4$	
Sum =	

Então $I' = \frac{\Delta}{3} \times \text{Sum} =$ ____________

Vá para **358**.

358

A resposta é $I' = 2501\frac{1}{3}$.

Esse resultado é perto do valor exato da integral, $I = 2500$.

Considerando o relativo pequeno número de pontos utilizado, isso é notavelmente preciso.

Um interessante exercício na integração numérica é calcular π usando a relação

$$\tan^{-1} A = \int_0^A \frac{dx}{1+x^2}$$

(continuado)

Você talvez queira testar sua habilidade integrando outras funções cujas integrais você conhece,

por exemplo, $sin\theta$ ou e^{-x}.
É evidente que pela integração numérica você pode achar integrais definidas de qualquer função e aí reside o seu poder. Com computadores é possível integrar numericamente em grande velocidade. Deve-se apenas ter alguns critérios para escolher o tamanho do intervalo e ser capaz de lidar com problemas como singularidades na integral. Não obstante, com o simples método descrito aqui você pode frequentemente ir surpreendentemente bem.

Vá para **359**.

Algumas aplicações da integração

359

Nessa seção nós vamos aplicar a integração em alguns problemas simples.
No Capítulo 2 nós aprendemos como encontrar a velocidade de uma partícula se nós sabemos sua posição em termos do tempo. Agora nós podemos reverter o procedimento e achar a posição a partir velocidade. Por exemplo, nós estamos em um automóvel dirigindo em uma rodovia estreita através de uma névoa espessa. Para fazer as coisas funcionarem, nosso indicador de quilometragem está quebrado. Ao invés de observar a rodovia a todo tempo, vamos manter o olho no velocímetro. Nós temos um ótimo relógio e nós fazemos continuamente anotações da velocidade começando a partir do tempo quando nós estamos em repouso. O problema está em encontrar o quão longe nós fomos. (Esse é um método perigoso para dirigir um carro, mas é realmente utilizado para navegação de submarinos e espaçonaves.) Mais especificamente, dado $v(t)$, como encontrar $S(t)$, a distância percorrida desde o tempo t_0 quando nós estávamos em repouso? Tente encontrar um método.

$$S(t) = \underline{\hspace{3cm}}$$

Para checar seu resultado, vá para **360**.

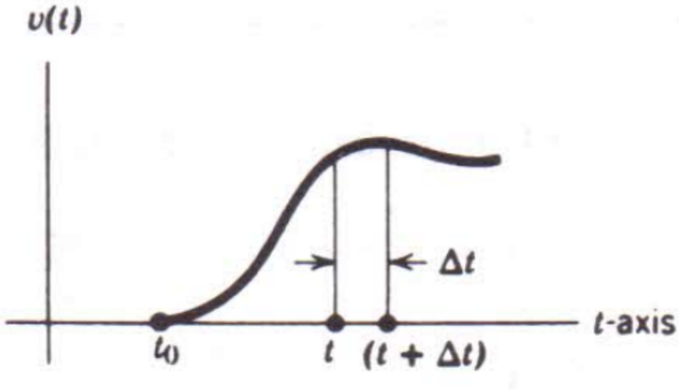
360

Sabendo que

$$v = \frac{dS}{dt},$$

nós devemos ter $dS = vdt$ (como mostrado em **263**). Agora vamos integrar os dois lados a partir de um ponto inicial ($t = t_0, S = 0$) para o ponto final (t,S).
Nós temos

$$\int_{S=0}^{S} dS = \int_{t_0}^{t} vdt,$$



então

$$S = \int_{t_0}^{t} v dt.$$

Se você não obteve esse resultado, ou gostaria de ver mais explicação, vá para **361**.

De outro jeito, vá para **362**.

361

Outra forma de entender esse problema é olhar para isso graficamente. Aqui temos o gráfico de $v(t)$ como função de t. No tempo Δt a distância percorrida é $\Delta S = v\Delta t$. A distância total percorrida é, portanto, igual a área sobre a curva entre o tempo inicial e o tempo de interesse, e isso é

$$\int_{t_0}^{t} v(t')dt'.$$

Vá para **362**.

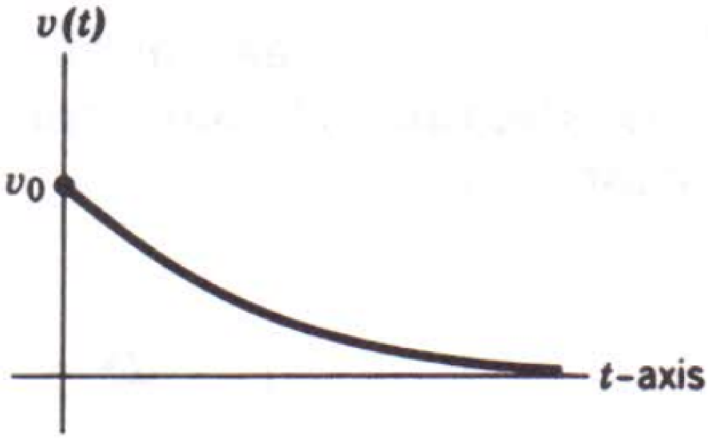
362

Suponha que um objeto se move com velocidade que decresce continuamente da seguinte maneira.

$$v(t) = v_0 e^{-bt}$$

(v_0 e b são constantes). No tempo $t = 0$ o objeto está na origem; $S = 0$. Qual das seguintes opções é a distância que o objeto terá se movido após um tempo infinito (ou, se preferir, após um longo tempo)?

$$[0 \mid v_0 \mid v_0 e^{-1} \mid \frac{v_0}{b} \mid \infty]$$



Se você acertou, vá para **364**.

Se você errou, vá para **363**.

363

Aqui vai a solução do problema da lição **362**.

$$S(t) - S(0) = \int_0^t v dt' = \int_0^t v_0 e^{-bt'} dt'$$

$$S(t) - 0 = -\frac{v_0}{b} e^{-bt} \Big|_0^t = -\frac{v_0}{b}(e^{-bt} - 1).$$

Nós estamos interessados em $\lim_{t\to\infty} S(t)$, mas dado que $e^{-bt} \to 0$ à medida que $t \to \infty$, temos que

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = -\frac{v_0}{b}(0-1) = \frac{v_0}{b}.$$

Embora o objeto nunca fique completamente em repouso, sua velocidade torna-se tão pequena que a distância total percorrida é finita.

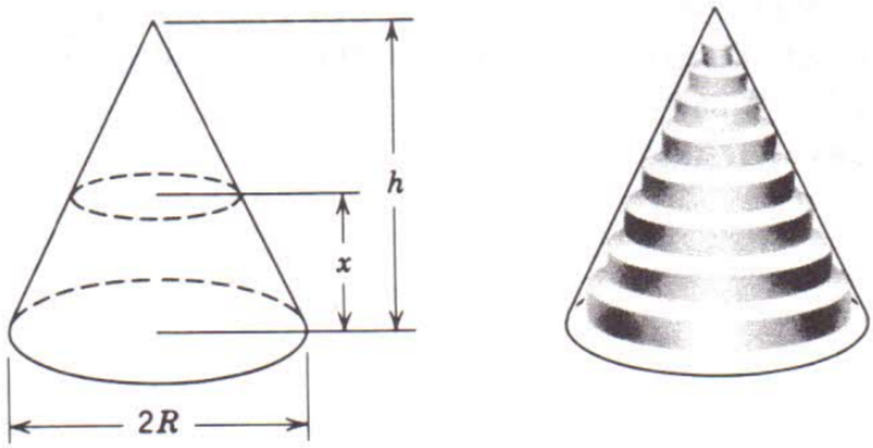
Vá para **364**.

364

Nem todas integrais fornecem resultados finitos. Por exemplo, tente resolver esse problema.

Uma partícula começa a se mover a partir da origem em $t = 0$ com velocidade $v(t) = v_0/(b+t)$, em que v_0 e b são constantes.

Quão longe ela está quando $t \to \infty$?



$$\left[v_0 \ln \frac{1}{b} \mid \frac{v_0}{b} \mid \frac{v_0}{b^2} \mid \text{nenhuma das anteriores} \right]$$

Vá para **365**.

365

É fácil ver que o problema **364** leva a uma integral infinita.

$$S(t) - 0 = \int_0^t v_0 \frac{dt'}{b+t'} = v_0 \ln(b+t')\Big|_0^t$$

$$= v_0[\ln(b+t) - \ln b] = v_0 \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right)$$

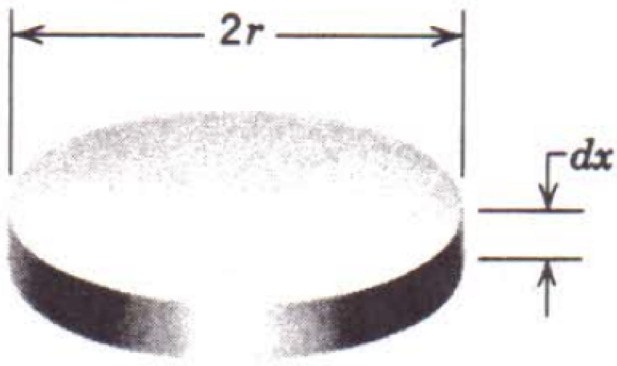
Dado que $\ln(1+t/b) \to \infty$ à medida que $t \to \infty$, vemos que $S(t) \to \infty$ à medida que $t \to \infty$.

Nesse caso, a partícula sempre se move rápido o suficiente para que sua posição seja ilimitada. Ou, alternativamente, fixado a posição inicial em um tempo específico, então a área sobre a curva $v(t) = v_0/(b+t)$ aumenta sem limitação à medida que $t \to \infty$.

Vá para **366**.

366

A integração pode ser usada para várias tarefas além de calcular a área sobre a curva. Por exemplo, ela pode ser usada para encontrar o volume de sólidos de geometria conhecida. Um método geral para isso é explicado na lição 380. Contudo, podemos calcular o volume de sólidos simétricos por uma simples extensão dos métodos que já aprendemos. Nas próximas lições nós vamos encontrar o volume de um cone circular reto.



A altura do cone é h, e seu raio da base é R. Faremos x representar a distância vertical em relação à base.

Nosso método de ataque é similar ao usado na lição 339 para encontrar a área sobre a curva. Nós iremos fatiar o corpo em um número de cilindros cujo volume somado é aproximadamente o volume do cone da figura (o cone da figura da direita foi aproximado por oito cilindros circulares). Então temos que

$$V \cong \sum_{i=1}^{8} \Delta V_i$$

Em que ΔV_i é o volume de um desses cilindros. No limite em que a altura de cada disco (e seu volume) vai para 0, temos que

$$V = \int dV$$

Para computar tal integral, nós precisamos da expressão para dV. Para encontrá-la,

Vá para a lição **367**.

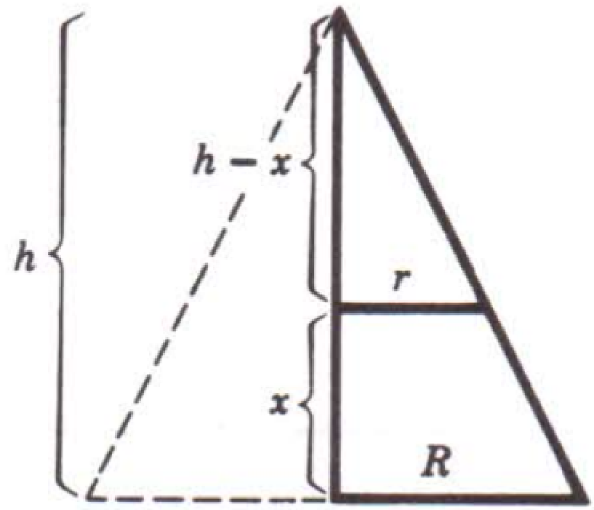
367

Porque estamos tomando o limite em que $\Delta V \to 0$, nós iremos representar o elemento de volume por dV desde o início.

Abaixo há a figura de uma secção do cone, que para os nossos propósitos é representada por um cilindro. O raio do disco é r e sua altura é dx. Tente encontrar uma expressão para dV em termos de x. (Você terá de encontrar r como função de x).

Respostas: (363) $\frac{v_0}{b}$

(364) nenhuma das anteriores



$$dV = \underline{\hspace{6cm}}$$

Para checar sua resposta, ou ver como obter o resultado, vá para **368**.

368

$$dV = \pi R^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx$$

Se você obteve essa resposta, vá para **369**.

Se você quer ver como derivar esse resultado, continue lendo.

O volume desse cilindro é o produto da área pela altura. Portanto, $dV = \pi r^2 dx$. Nosso último desafio é expressar r em termos de x.

O diagrama mostra uma seção cruzada do cone. Dado que r e R são arestas correspondentes de triângulos similares, deve ser claro que

$$\frac{r}{R} = \frac{h - x}{h} \textbf{, ou } r = R\left(1 - \frac{x}{h}\right). \text{ Portanto,}$$

$$dV = \pi r^2 dx = \pi R^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx.$$

Vá para **369**.

369

Agora temos uma integral para V.

$$V = \int_0^h dV = \int_0^h \pi R^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx.$$

Tente calcular isso.

$$V = \underline{\hspace{6cm}}$$

Para checar suas respostas, vá para **370**.

370

Você deveria ter obtido o resultado

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Nossos Parabéns caso você tenha conseguido. Caso contrário, leia abaixo:

$$V = \int_0^h \pi R^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx = \pi R^2 \int_0^h \left(1 - \frac{2x}{h} + \frac{x^2}{h^2}\right) dx$$

$$= \pi R^2 \left(x - \frac{x^2}{h} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{h^2}\right)\Bigg|_0^h = \pi R^2 \left(h - h + \frac{1}{3}h\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Vá para **371**.

371

Aqui está mais um problema. Vamos encontrar o volume de uma esfera. O processo será bastante simplificado se encontrarmos o volume de um hemisfério, V', que é metade do volume desejado, V. Logo, $V' = V/2$. Você consegue escrever uma integral que dará o volume do hemisfério? (A fatia do hemisfério mostrada no desenho pode lhe ajudar com isso.)

$$V' = \underline{\hspace{4cm}}\ .$$

Vá para **372** para verificar sua fórmula.

372

A resposta é

$$V' = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

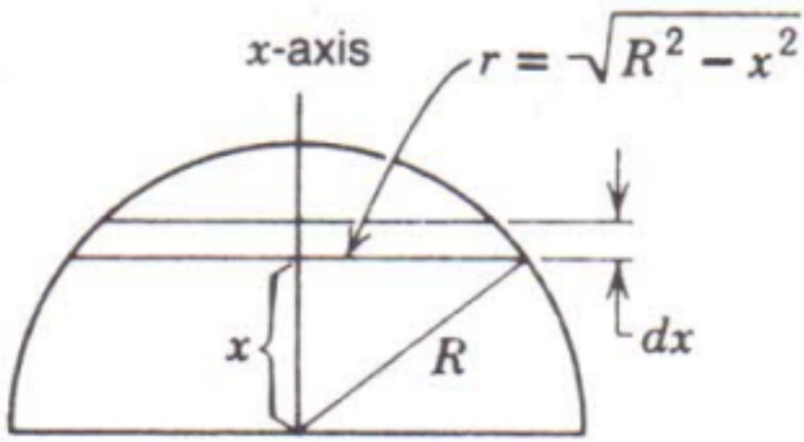
Se você escreveu isso, prossiga para a lição **373**. Caso contrário, leia abaixo. Aqui está a seção vertical que corta o hemisfério. O volume do disco entre x e $x + \mathrm{d}x$ é $\pi r^2\,\mathrm{d}x$. Porém, como se pode ver pelo triângulo indicado, $x^2 + r^2 = R^2$, logo

$$r^2 = R^2 - x^2.$$

Então, $\mathrm{d}V' = \pi(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x$ e $V' = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x\,.$

Vá para **373**.

373



Agora, vá em frente e calcule a integral

$$V' = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

$$V' = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\,.$$

Para ver a resposta correta, vá para **374**.

374

$$\begin{aligned} V' &= \int_0^R \pi(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R \\ &= \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Como $V = 2V'$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Vá para **375**.

Integrais Múltiplas

375

Apesar do conteúdo desta seção - integrais múltiplas - ser essencial para alguns problemas, ele não é preciso para muitos outros. Portanto, se você sentir que teve cálculo o suficiente para agora, você deveria pular para a conclusão, lição **384.**

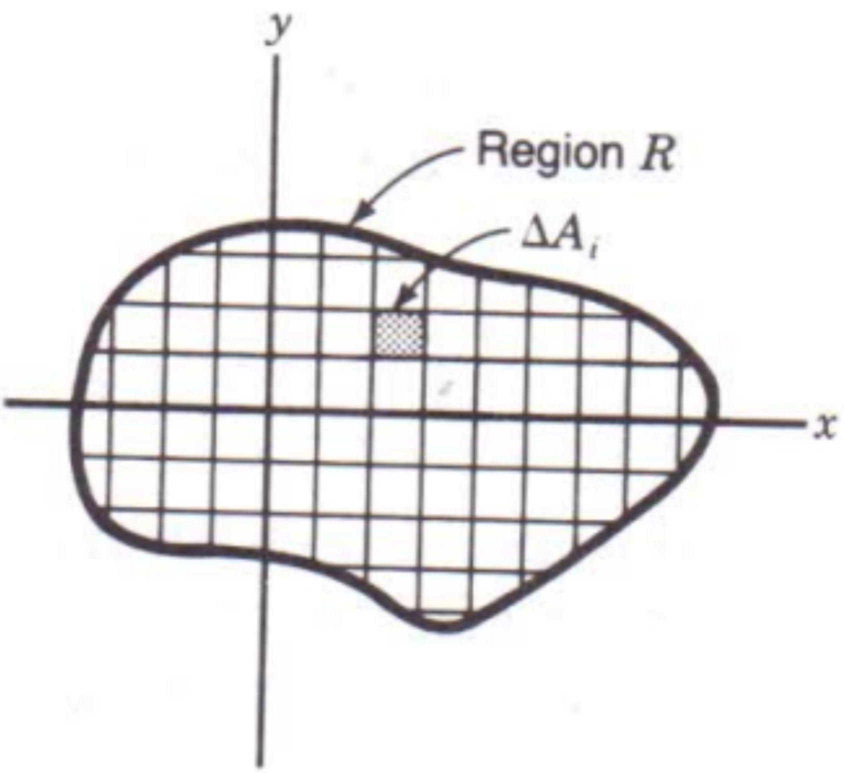
As integrais que discutimos até agora, sob a forma $\in f(x)\,\mathrm{d}x$, tiveram uma única variável independente, normal mente chamada de x. Integrais duplas são definidas similarmente para *duas* variáveis independentes, x e y. Geralmente, integrais múltiplas são definidas com um número arbitrário de variáveis independentes, mas vamos considerar apenas duas por aqui. Note que até o momento y foi muitas vezes tratada como variável dependente: $y = f(x)$. Nesta seção, entretanto, y, juntamente com x, sempre será uma variável independente e $z = f(x, y)$ será a variável dependente. Logo, z é função de duas variáveis.

Na lição **339**, a integral definida de $f(X)$ entre a e b foi definida por

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x.$$

A integral dupla é definida de maneira semelhante, porém com dua variáveis independentes. Contudo, existem algumas diferenças importantes. Para uma única integral definida, a integração acontece em um intervalo fechado entre a e b no eixo x. Em contrapartida, a integração de $f(x, y)$ acontece em uma região fechada R no plano $x - y$.

Para definir a integral dupla, dividimos a região R em N regiões menores, cada uma de área ΔA_i.



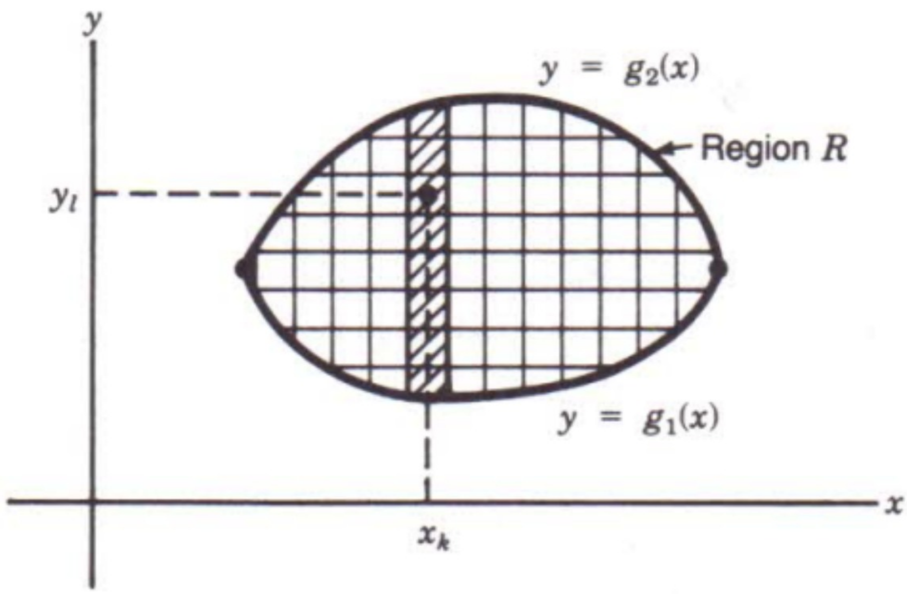
Sejam x_i, y_i pontos arbitrários dentro da região ΔA_i. Então, analogamente a integral de uma variável, a integral dupla é definida por

$$\iint f(x,y)\,\mathrm{d}A = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)\Delta A_i.$$

Vá para **376**.

376

Muitas vezes, a integral dupla é calculada tomando ΔA_i como um pequeno retângulo com lados paralelos aos eixos x e y, e primeiramente avaliando a soma e o limite ao longo de uma direção e depois de outra. Considere que a porção superior da região R no plano $x - y$ é limitada pela curva $y = g_2(x)$, ao passo que a porção inferior é limitada por $g_1(x)$, como visto no diagrama.



Se considerarmos $\Delta A_i = \Delta x_k \Delta y_l$, então

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A &= \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)\Delta A_i \\ &= \lim_{\Delta x_k \to 0} \lim_{\Delta y_l \to 0} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} f(x_k, y_l)\Delta y_l \Delta x_k\end{aligned}$$

Isso é uma expressão complicada, mas ela pode ser simplificada em dois passos separados. Vamos inserir colchetes para deixar explicito os passos separados.

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{p} \left[\lim_{\Delta y_l \to 0} \sum_{l=1}^{q} f(x_k, y_l)\Delta y_l \right] \Delta x_k.$$

O primeiro passo é resolver a operação entre os colchetes. Note que x_k não é alterado conforme somamos sobre l nos colchetes. Isso corresponde a somar sobre toda a faixa hachurada no diagrama com x_k sendo tratado como aproximadamente constante. A quantidade nos colchetes é essencialmente uma integral definida da variável y, com x constante. Note que, apesar dos limites de integração, $g_1(x)$ e $g_2(x)$, serem constantes para um valor particular de x, em geral, eles são funções não constantes de x. A expressão entre colchetes pode ser escrita como

$$\int_{g_1(x_k)}^{g_2(x_k)} f(x_k, y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Essa expressão não vai mais depender de y, mas sim de x_k tanto pelo integrando $f(x_k, y)$, quanto pelos limites $g_1(x_k)$ e $g_2(x_k)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A &= \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{p} \left[\int_{g_1(x_k)}^{g_2(x_k)} f(x_k, y)\,\mathrm{d}y\right]\Delta x_k \\ &= \int_a^b \left[\int_{g_1(x_k)}^{g_2(x_k)} f(x_k, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Na operações é essencial que você avalie primeiro a integral entre colchetes tratando x como constante. O resultado é alguma função que depende apenas de x. O próximo passo é calcular a integral dessa função com respeito a x, agora sendo tratado como variável.

A integral dupla expressa acima é comumente chamada de *integral iterada.*

Vá para **377**.

377

Integrais múltiplas são mais facilmente calculadas se a região R é um retângulo cujos lados são paralelos aos eixos x e y, como se pode ver no desenho

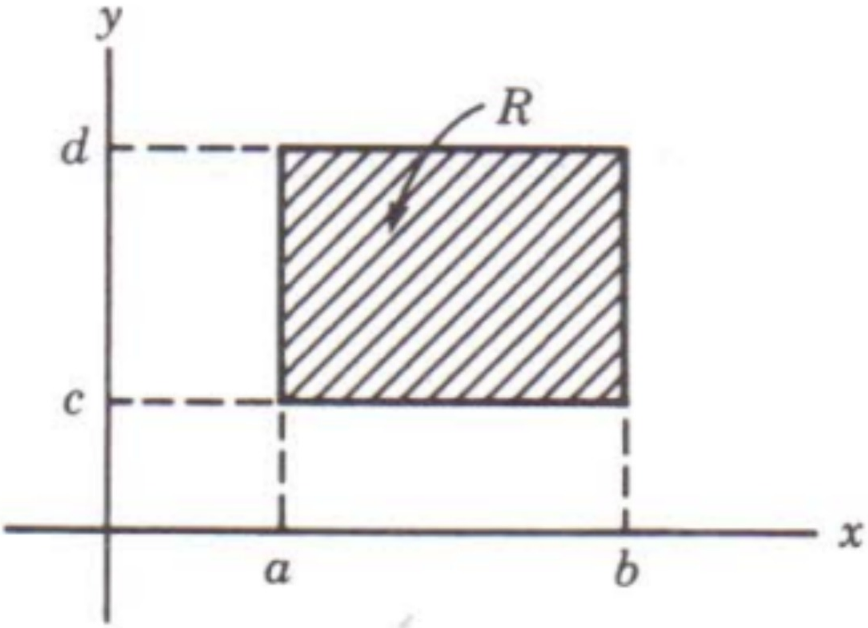
A integral dupla é

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\,.$$

Como exercício para testar seu entendimento, como a expressão acima seria escrita se a integral em x fosse calculada antes da integral em y.

Vá para **378**.

378



a integral dupla, integrada primeiramente sobre x, é escrita como

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\,.$$

Isso pode ser encontrado meramente trocando as operações de y e x nas integrais. (Note que os limites de integração mudaram concomitantemente.)

Para ver como isso funciona, vamos calcular a integral dupla de $f(x,y) = 3x^2 + 2y$ no retângulo do plano $x - y$ imitado pelas linhas $x = 0$, $x = 3$, $y = 2$ e $y = 4$.

A integral dupla é igual a integral iterada.

$$\iint_R (3x^2 + 2y)\,\mathrm{d}A = \int_0^3 \left[\int_2^4 (3x^2 + 2y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\,.$$

Alternativamente, poderíamos ter escrito

$$\iint_R (3x^2 + 2y)\,\mathrm{d}A = \int_2^4 \left[\int_0^3 (3x^2 + 2y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\,.$$

Calcule cada uma das expressões acima. As respostas deveriam ser as mesmas.

Integral =________________

Se você errou ou quer mais explicações, vá para **379**.

Caso contrário, vá para **380**.

379

Pela primeira expressão,

$$\begin{aligned}\int_0^3 \left[\int_2^4 (3x^2+2y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x &= \int_0^3 (3x^2y+y^2)\Big|_2^4\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^3 [3x^2(4-2)+(16-4)]\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (6x^2+12)\,\mathrm{d}x\\ &= \left(6\frac{x^3}{3}+12x\right)\Big|_0^3 = 54+36=90.\end{aligned}$$

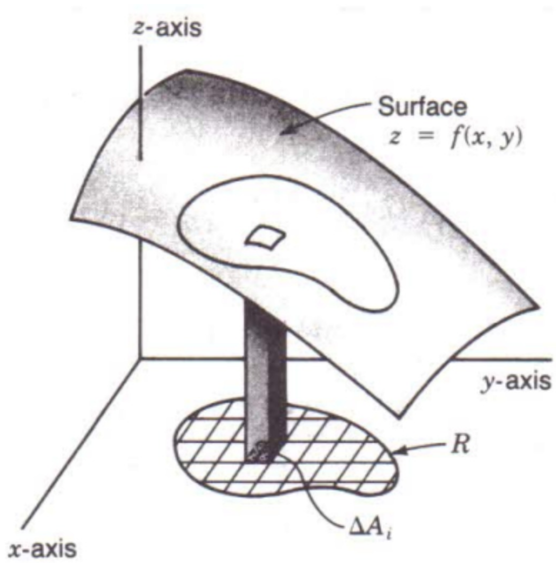
Pela segunda expressão,

$$\begin{aligned}\int_2^4 \left[\int_0^3 (3x^2+2y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y &= \int_2^4 (x^3+2xy^2)\Big|_0^3\,\mathrm{d}y\\ &= \int_2^4 (27+6y)\,\mathrm{d}y = \left(27y+3y^2\right)\Big|_2^4\\ &= 108+48-(54+12)=90.\end{aligned}$$

Vá para **380**.

380

Assim como a equação $y=f(x)$ define uma curva em um plano $x-y$ bidimensional, a equação $z=f(x,y)$ define uma superfície no espaço $x-y-z$ tridimensional, já que essa equação determina o valor de z para quaisquer valores x e y correspondentes. Facilmente, nós podemos



ver da definição acima de integral dupla que $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A$ é igual ao volume V do espaço embaixo da superfície $z = f(x, y)$ e acima da região R. Nesse caso, $f(x_i, y_i)$ é a altura da coluna acima ΔA_i. Logo, $f(x_i, y_i)\Delta A_i$ é aproximadamente igual ao volume dessa coluna. A soma de todas essa colunas é, portanto, aproximadamente igual ao volume embaixo da superfície. No limite em que $\Delta A_i \to 0$, a soma definindo a integral dupla se torna igual ao volume embaixo da superfície e acima de R, então

$$V = \iint_R z \, \mathrm{d}A = \iint_R f(x, y) \, \mathrm{d}A \, .$$

Calcule o volume embaixo da superfície definida por $z = x + y$ e acima do retângulo cujos lados são determinados pelas retas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e $y = 3$.
Vá para **381**.

381

A resposta[3] é 36. Se você obteve esse resultado, vá para a lição **382**. Caso contrário, estude o seguinte raciocínio

$$\begin{aligned} V = \iint_R (x + y) \, \mathrm{d}A &= \int_1^4 \left[\int_0^3 (x + y) \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\ &= \int_1^4 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^3 \mathrm{d}x = \int_1^4 \left(3x + \frac{9}{2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{9x}{2} \right) \Big|_1^4 = \frac{(3)(16)}{2} + \frac{(9)(4)}{2} - \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = 36. \end{aligned}$$

A integral iterada poderia também ter sido avaliada em outra ordem.

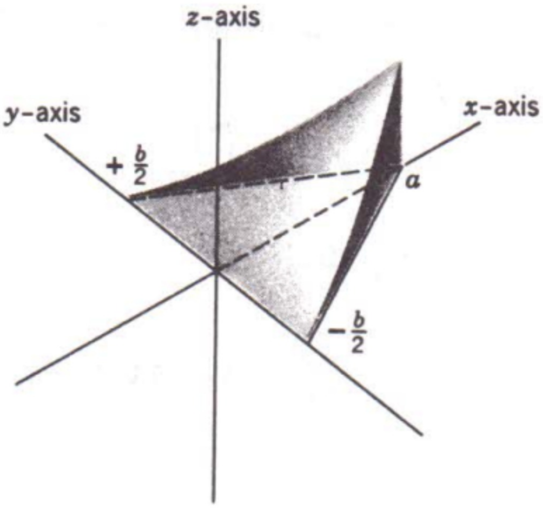
$$\begin{aligned} \int_0^3 \left[\int_1^4 (x + y) \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y &= \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_1^4 \mathrm{d}y \\ &= \int_0^3 \left(\frac{16}{2} + 4y - \frac{1}{2} - y \right) \Big|_1^4 \mathrm{d}y = \int_0^3 \left(3y + \frac{15}{2} \right) \mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{3y^2}{2} + \frac{15y}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{27}{2} + \frac{45}{2} = 36. \end{aligned}$$

Vá para **382**.

382

O fundo deste sólido em formato de arado forma um triângulo isósceles com base b e altura a. Quando orientado ao longo dos eixos $x - y$, como mostrado na figura, sua grossura é dada por

[3] **Resposta: (378)** 90.



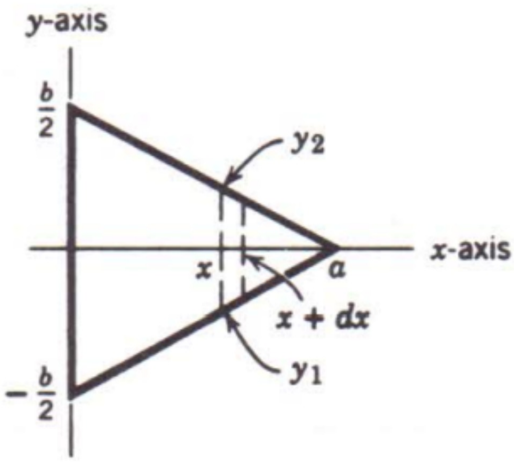
$z = Cx^2$, onde C é uma constante. O problema é achar uma expressão para o volume.

$$V = \underline{\hspace{4cm}}$$

Para verificar sua resposta, vá para **383**.

383

O volume é $Cba^3/12$. Leia a seguir se você quiser uma explicação; caso contrário, vá para **384**.
A base do objeto forma um triângulo, como mostrado. A integral pode ser feita com respeito



a x e y em qualquer ordem. Vamos integrar primeiro sobre y.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \left[\int_{y_1}^{y_2} z \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_0^a \left[\int_{y_1}^{y_2} Cx^2 \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_0^a Cx^2 y \Big|_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

A partir do desenho, $y_2 = \frac{b}{2}\big(1 - \frac{x}{a}\big) = -y_1$, então $Cx^2y\big|_{y_1}^{y_2} = Cx^2b\big(1 - \frac{x}{a}\big)$ e

$$V = Cb\int_0^a x^2\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)\,\mathrm{d}x = Cb\bigg(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4}\bigg) = \frac{Cba^3}{12}.$$

A integral também pode ser calculada na ordem inversa. O cálculo é simplificado pela utilização de simetria; o volume é duas vezes o volume do triângulo de cima. Então,

$$V = 2\int_0^{b/2}\left[\int_0^{x(y)} Cx^2\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\,,$$

onde $x(y) = a(1 - 2y/b)$. A resposta é a mesma, $Cba^3/12$.

Vá para **384**.

Conclusão

384

Bem, aqui está você na última lição. Você deveria ganhar alguma recompensa por todo seu esforço - tudo que podemos prometer é que tem apenas mais um "Vá para"neste livro.

Nessa altura do campeonato, você deve entender os princípios básicos de integração e conseguir resolver algumas integrais. Com a prática, seu repertório vai aumentar. Não se acanhe de usar tabelas de integrais - todo mundo usa[4]. Você pode encontrar tabelas bem grandes em

CRC Standard Mathematical Tables, e também em *The Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, Inc.,Boca Raton, Florida.

Table od Integrals, Series, and Products, I.S. Gradshteyn and I.W. Ryzhik, Academic Press, New York, 1980.

O próximo capítulo é uma revisão e lista em tópicos as ideias apresentadas ao longo do livro. Apesar de você já poder ter lido parte do capítulo, você deveria estudá-lo por inteiro. Você pode achá-lo útil como referência no futuro.

Os apêndices estão recheados com coisinhas interessantes: derivações de fórmulas, explicações de tópicos especiais e coisas do gênero.

No caso de você querer um pouco mais de castigo, ou então querer apenas mais alguma prática, temos uma lista de problemas de revisão, junto com as respostas, começando na página 245[5].

[4] N. do T.: Hoje em dia, é até mais comum a utilização de programas de computador capazes de resolver analiticamente uma quantidade surpreendente de problemas integrais.

[5] Não necessariamente esse é o número da página na versão traduzida.