

SEM0585

Mecânica Geral

Aula #12 — Introdução ao conceito de vibrações

Prof. Assoc. Marcelo Becker
becker@sc.usp.br

Doutorando Gustavo José Giardini
Lahr
gustavo.lahr@usp.br

São Carlos, 23/06/20



Mecânica

Geral

Programa da Disciplina

1. Definição de força, momento de uma força e momento de um binário utilizando grandezas vetoriais.
2. Carregamentos equivalentes e forças distribuídas.
3. Definição de vínculos e apoios, introdução de forças e momentos de restrição.
4. Equilíbrio de corpo rígido, diagrama de corpo-livre, equações de equilíbrio.
5. Equilíbrio de um conjunto de corpos (estruturas de máquinas).
6. Atrito, aplicações em equilíbrio estático.
7. Esforços internos, métodos analíticos e gráficos, diagramas de esforços internos.
8. Cinemática de corpos rígidos e de um conjunto de corpos.
9. Momento de inércia de massa. Teorema de eixos paralelos.
10. Equações de Newton-Euler para corpos rígidos em movimento plano.
11. Conservação da Energia e Princípio do Trabalho e Energia.
12. Introdução ao conceito de vibrações.

INTRODUÇÃO ÀS VIBRAÇÕES



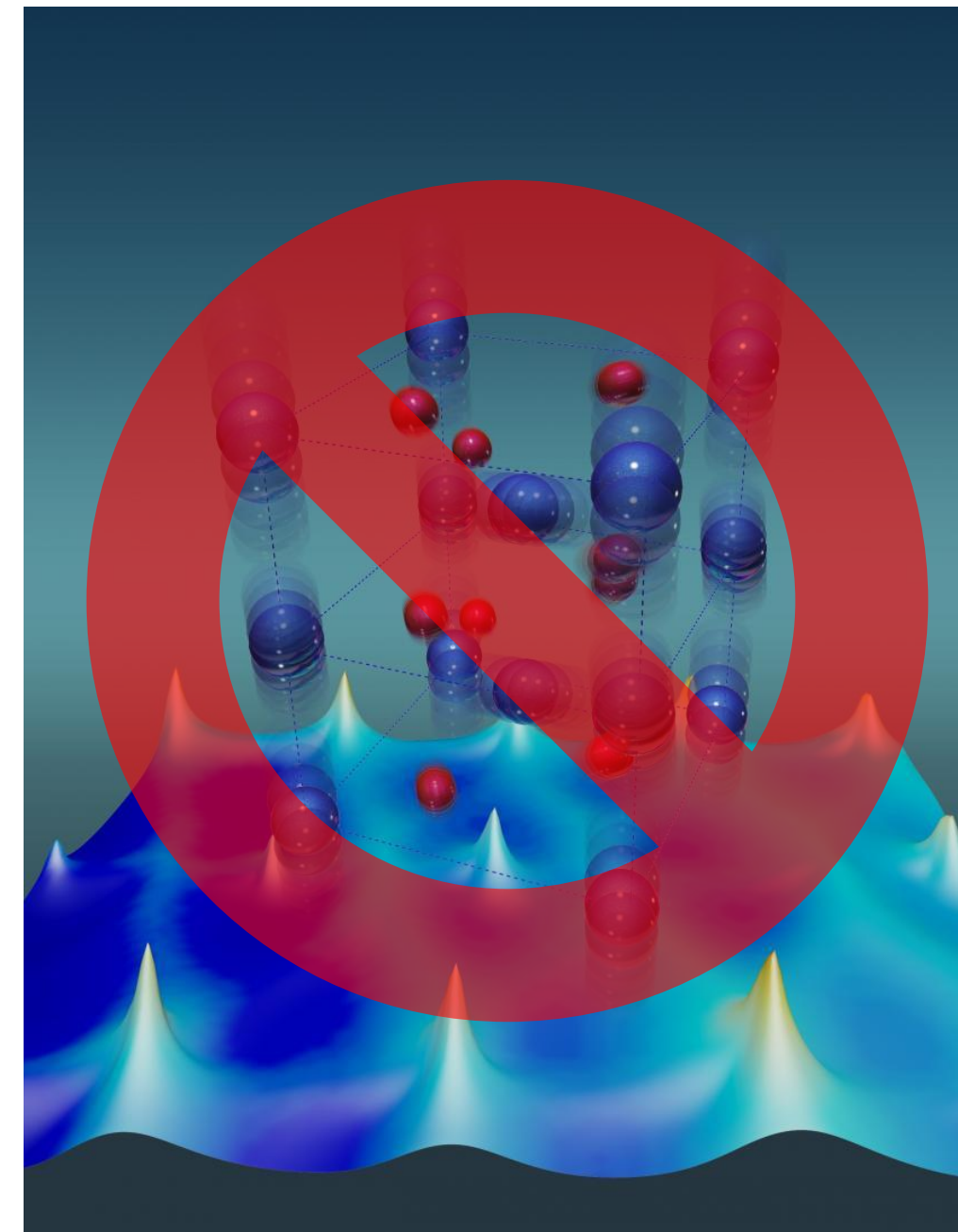


Quais corpos vibram?

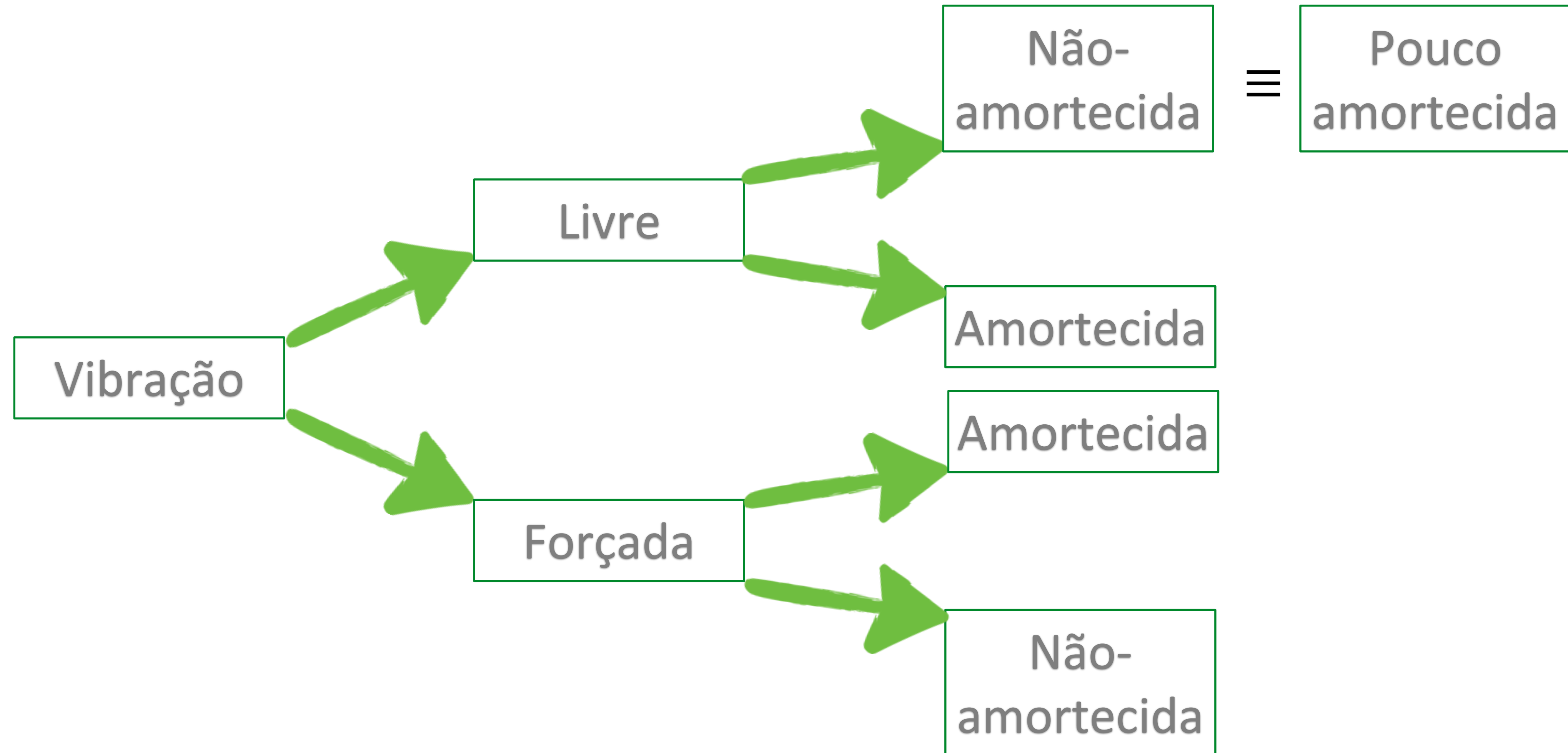


Definição de Vibração

- Movimento periódico de um corpo ou sistema de corpos em relação a um ponto de equilíbrio
- Todo corpo vibra em algum grau
- Do ponto de vista físico, átomos vibram
- Estamos interessados em 1 grau de liberdade de corpos rígidos



Tipos de vibração



VIBRAÇÕES LIVRES NÃO-AMORTECIDAS



Vibrações livres não-amortecidas

- Ocorrem mantidas por forças gravitacionais ou potenciais elásticas
- Podemos criar modelos físicos para equipamentos reais
- Desprezando atrito

- $\pm \rightarrow \Sigma F_x = ma_x \rightarrow -kx = m\ddot{x}$

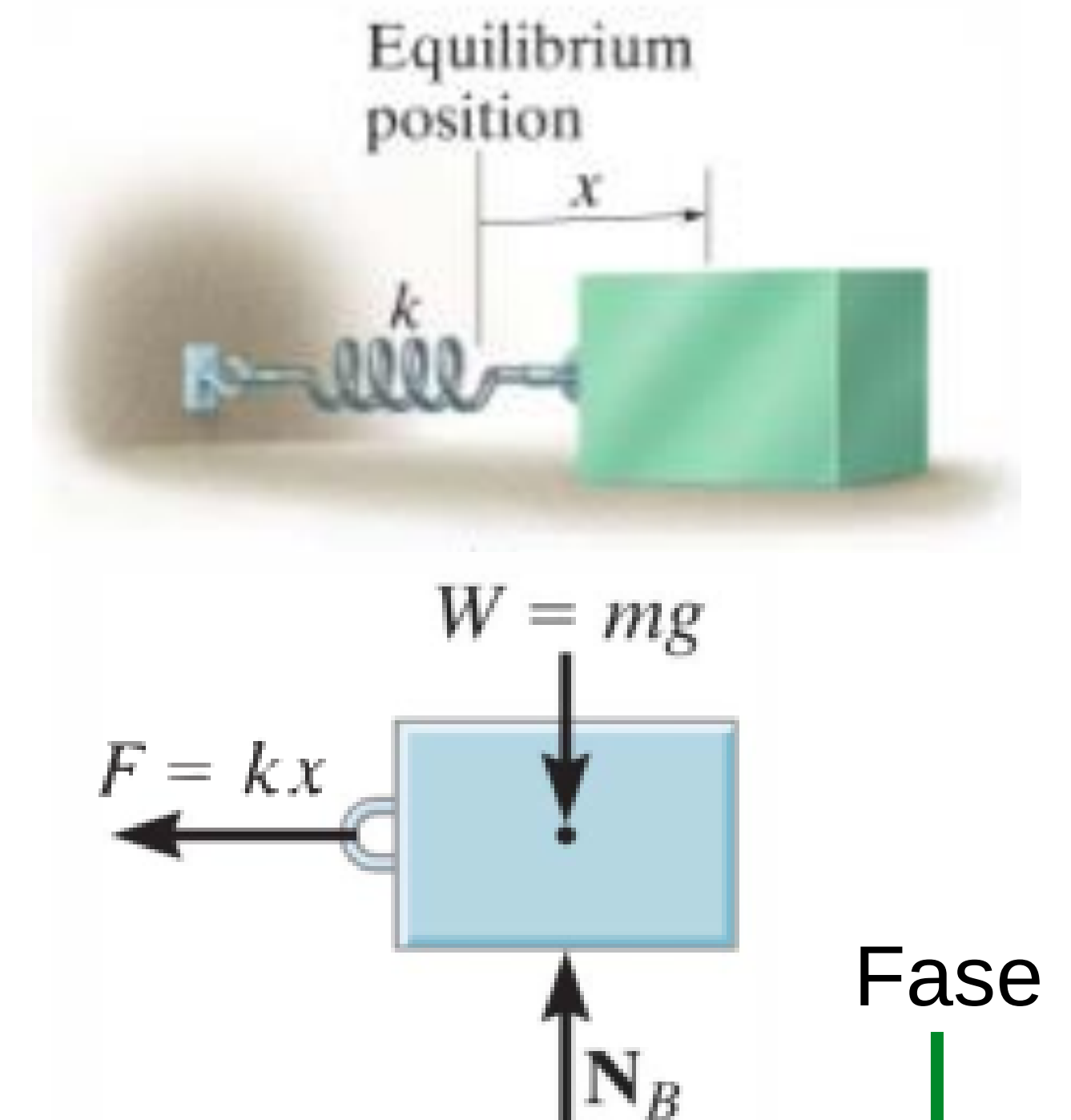
- $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0;$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frequência Natural

- EDO homogênea, segunda ordem, coeficientes constantes:

$$x = C \sin(\omega_n t + \phi)$$



Vibrações livres não-amortecidas

- ATENÇÃO

$$x = C \sin(\omega_n t + \phi)$$

- ω_n é uma característica do sistema $\left(\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \right)$
- C e ϕ são características do problema, isto é, dados pelas condições iniciais
- x_0 é a posição inicial e $\dot{x}_0$ é a velocidade inicial

Vibrações livres não-amortecidas

- EXEMPLO: Resposta no tempo de uma caixa d'água

- Da mecânica dos sólidos: $k_{eq} = \frac{P}{\delta} = \frac{3EI}{l^3}$

- $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{3EI}{l^3 m}}$

- Caso tenhamos um deslocamento inicial x_0 e velocidade nula $\dot{x}_0$:

- $x(0) = x_0 = C \sen(\phi); \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = C \omega_n \cos(\phi)$

- Nesse caso: $\tg(\phi) = \frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0}$ e temos ϕ e C



Procedimento de análise

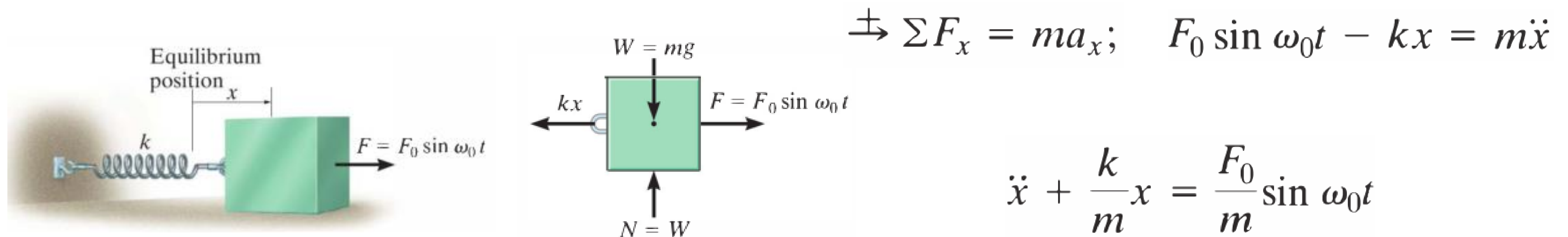
- 1) Construção do modelo físico
- 2) Diagrama de corpo livre com análise do ponto de equilíbrio
- 3) Aplicação da 2ª Lei de Newton
- 4) Reescrita da equação diferencial e identificação dos termos de projeto
- 5) Solução das equações temporais

VIBRAÇÕES FORÇADAS NÃO-AMORTECIDAS



Vibrações forçadas não-amortecidas

- Um dos tipos mais importantes
- Não-amortecidas $\rightarrow$ baixíssimo coeficiente de atrito
- O mesmo sistema anterior, porém, com força externa periódica



Vibrações forçadas não-amortecidas

- Solução: EDO não-homogênea de segunda ordem. Logo, solução é a solução da homogênea + solução particular.
- Solução da homogênea nós já sabemos: $x_h = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)$
- Propondo uma solução da particular: $x_p = X \operatorname{sen}(\omega_0 t)$
- Derivando e substituindo na equação geral: $-X\omega_0^2 \sin \omega_0 t + \frac{k}{m}(X \sin \omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t$

$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \sin \omega_0 t$$

Vibrações forçadas não-amortecidas

- Como $x = x_h + x_p$, temos que

$$x = x_h + x_p = C \sin(\omega_n t + \phi) + \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \sin \omega_0 t$$

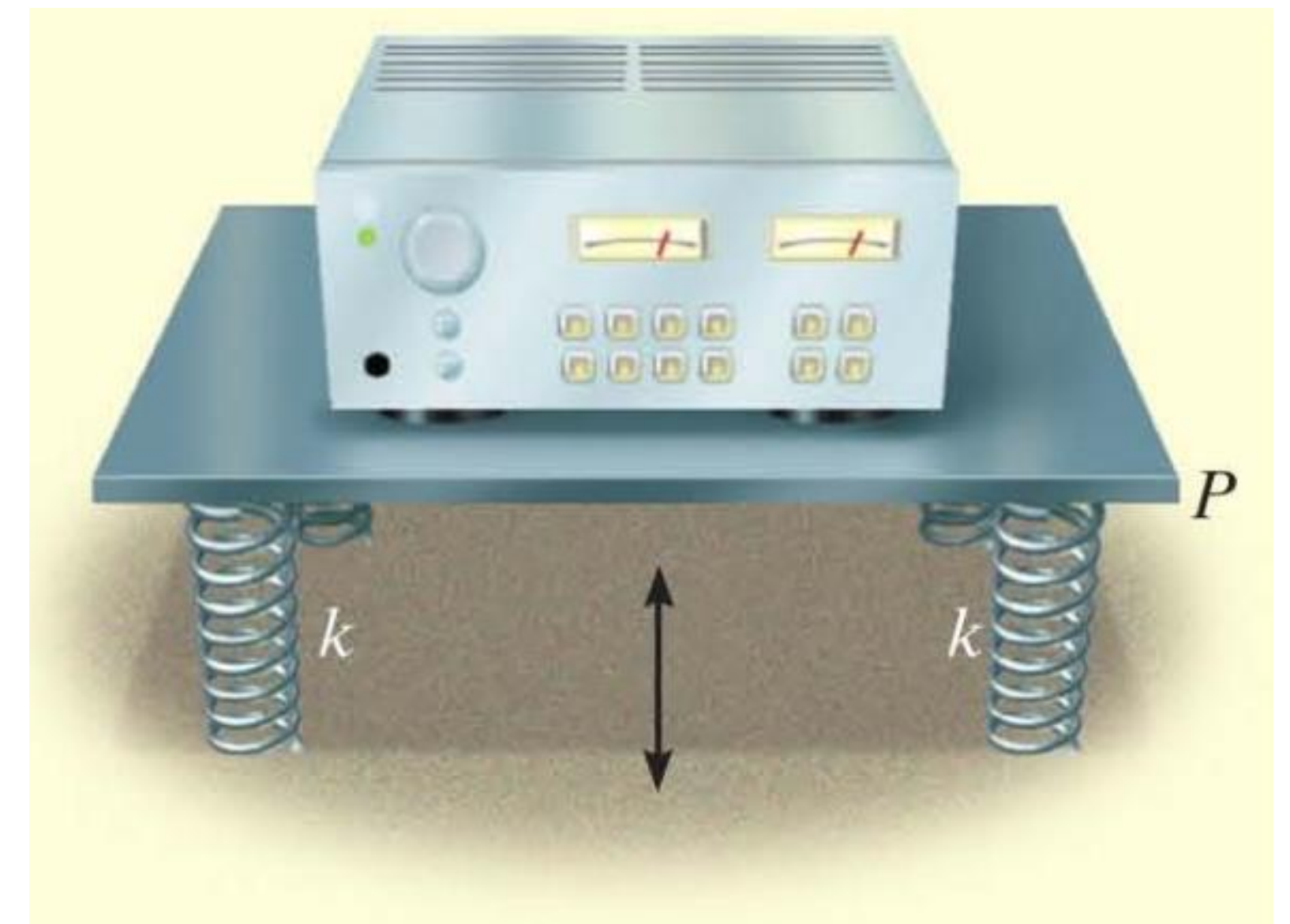
- Contudo, a solução da homogênea, por ser livre, vai ser mitigada. Ela só altera no chamado transiente.
- Na condição de regime permanente, quando a máquina já foi ligada e está funcionando tem algum tempo, só teremos a solução da particular acontecendo
- O termo F_0/k é a deformação estática e $\frac{1}{1 - (\frac{\omega_0}{\omega_n})^2}$ é o fator de amplificação, MF
- Logo, caso $\omega_0 \rightarrow \omega_n$, teremos um comportamento de ressonância

Vibrações forçadas não-amortecidas

- EXEMPLO: Um instrumento está rigidamente anexado à plataforma P, a qual está conectada ao chão por 4 molas com $k = 800 \text{ N/m}$ cada. Se o chão está sujeito a um deslocamento periódico de $\delta = 10 \sin(8t) \text{ mm}$. Massa total: 20 kg.
a) Qual a amplitude de vibração no regime?
b) Qual deve ser a frequência do chão para causar ressonância no equipamento?
- RESOLUÇÃO: É um sistema de vibração forçada não-amortecida, logo a resposta de regime é dada por

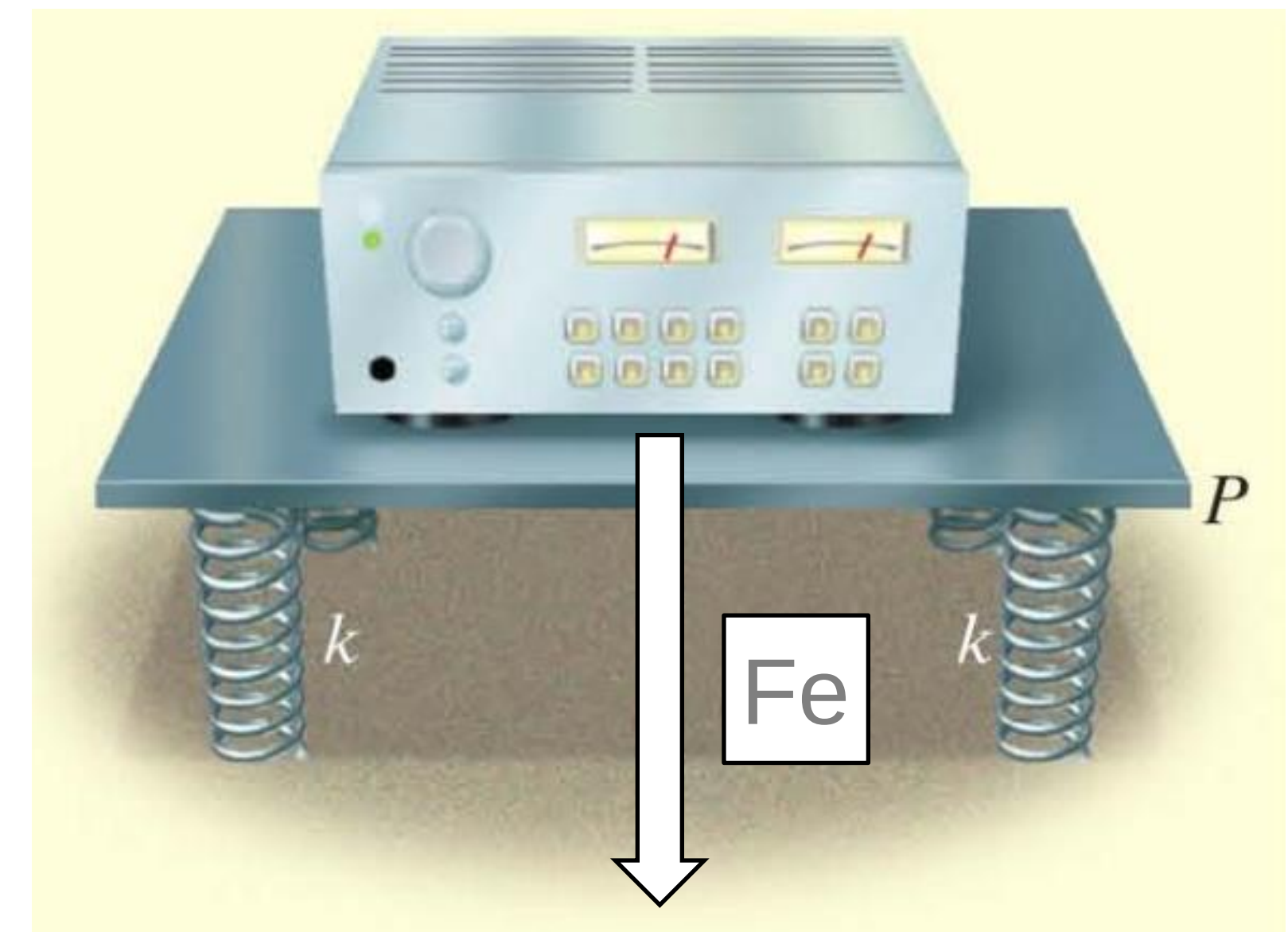
$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \sin \omega_0 t$$

- Calculando: $\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{m}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 800}{20}} = 12,65 \text{ rad/s}$



Vibrações forçadas não-amortecidas

- O DCL e a 2a Lei de newton:
- $\rightarrow + \sum F_{ext} = m\ddot{x} \Rightarrow -k(x - \delta) = m\ddot{x} \Rightarrow$
- $\Rightarrow -k_{eq}[x - \delta_0 \text{sen}(\omega_0 t)] = m\ddot{x} \Rightarrow$
- $\Rightarrow m\ddot{x} + k_{eq}x = \delta_0 k_{eq} \text{sen}(\omega_0 t)$
- Perceba que $\delta_0 k_{eq}$ tem dimensão de força



- Sabemos que a amplitude desses sistemas é dada por: $\frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \Rightarrow \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}$

Vibrações forçadas não-amortecidas

- Portanto, $X = \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} = \frac{10}{1 - \left(\frac{8}{12,65}\right)^2} = 16,7 \text{ mm (a)}$
- A ressonância ocorre quando $\omega_0 \rightarrow \omega_n = 12,65 \text{ rad/s (b)}$

TAKE-HOME MESSAGES



Vibrações

- Vibração = movimento periódico em torno de um ponto de equilíbrio
- Pode ser livre ou forçada
- Pode ser amortecida ou não
- Ressonância é amplificação exagerada da amplitude de saída para uma pequena amplitude de entrada
- Próxima aula: vibrações livres/forçadas amortecidas.

That's all Folks!

