

■ TEOREMA de Birkhoff e colapso esférico

Até aqui, suposemos que a situação esféricamente simétrica que estávamos considerando era uma situação estática. Porém, na região de vácuo essa hipótese pode ser relaxada (como uma imposição) pois segue como consequência da simetria esférica. Esse é o conteúdo do chamado Teorema de Birkhoff.

Para provar esse resultado, note que ao se relaxar a hipótese de estaticidade sobre o espaço-tempo, mas mantendo a simetria esférica, o elemento-de-linha geral compatível com essa simetria assume a forma:

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{0r} dt dr + g_{rr} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

onde g_{00} , g_{0r} e g_{rr} podem depender de t e r . Mas essa forma pode ser simplificada, como mostrado no exercício abaixo:

Exercício: Mostre que através de uma mudança no parâmetro temporal, $t \mapsto t' = F(t, r)$, o elemento-de-linha acima pode ser colocado na forma

$$ds^2 = -f(t', r) dt'^2 + g(t', r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Deixe clara a argumentação da existência de tal $F(t, r)$ que faz o trabalho.

Exercício: Obtenha a componente R_{0r} do tensor de Ricci nas coordenadas do exercício acima. (Resposta: $R_{0r} = (\partial_r g) / (rg)$.)

Os exercícios acima mostram que numa região de vácuo de um espaço-tempo esféricamente simétrico, g_{rr} não pode depender da variável temporal (t') do sistema de coordenadas do exercício acima. Ou seja, na região de vácuo:

$$ds^2 = -f(t', r) dt'^2 + g(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Como consequência, tem-se os resultados abaixo:

Exercício: Mostre que, ainda sob as hipóteses de simetria esférica e vácuo, $f(t', r)$ e $g(r)$ satisfazem as mesmas equações que no caso estático, o que leva a

$$g(r) = \frac{1}{\left(1 - \frac{C}{r}\right)},$$

$$f(t', r) = A(t') \left(1 - \frac{C}{r}\right),$$

onde C é uma constante e $A(t') > 0$ é uma função qualquer ($A(t')$ aqui).

Note que como $A(t')$ pode ser absorvida numa redefinição $t' \rightarrow t(t')$ tal que $dt = \sqrt{A(t')} dt'$, o espaço-tempo resultante é estático (na região em que $r > C$; na região $r < C$, se tal existir, então o espaço-tempo é espacialmente homogêneo, pois t' passa a ser uma coordenada espacial). Isso completa a demonstração o teorema de Birkhoff. (A seguir estaremos interessados na região $r > C$.)

O teorema de Birkhoff mostra que se a distribuição esférica de ENERGIA NÃO for estática, ainda assim a quantidade M que NO CASO ESTÁTICO é calculada como

$$M = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r),$$

Embora NÃO seja a massa própria do sistema (pois esta seria obtida com o elemento de volume próprio $4\pi dr r^2 \sqrt{g(r)}$), é uma quantidade conservada. Assim, não importa o movimento radial que uma distribuição de massa/energia execute, a massa gravitacional total inferida pelo "campo gravitacional" no infinito é constante (condizente com o fato que NÃO existe ondas gravitacionais de monopolo).

Embora M tenha unidade de massa/energia e seja conservada num colapso esférico, sua interpretação exige maiores justificativas, pois esta quantidade é obtida a partir da integração da densidade própria de energia local usando apenas o elemento de volume coordenado $4\pi r^2 dr$ e não o físico $4\pi r^2 dr \sqrt{g(r)}$. Logo, vale a pena definirmos as quantidades que têm interpretação natural de massa/energia e, então, compará-las com M .

- MASSA PRÓPRIA: É a soma dos elementos de massa/energia medidos localmente por uma família de observadores:

$$M_p := \int d^3x \sqrt{|h|} T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \text{ onde } u^\mu \text{ é a 4-velocidade dos observadores e } h = \det(h_{\mu\nu}), \text{ onde } h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu \text{ é a métrica espacial segundo esses observadores.}$$

Note que no caso de Schwarzschild, para observadores estáticos,

$$M_p = 4\pi \int_0^{\infty} dr \frac{r^2 \rho(r)}{\sqrt{1 - \frac{2GM(r)}{r}}}, \text{ onde } m(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r')$$

Logo, $M_p \geq M$. (Por quê?)

- MASSA total medida no infinito: É a energia total assim como aferida "à distância" por um dado observador no infinito. Para que seja definida, é necessário um campo de Killing tipo-tempo ξ^a , para que a corrente conservada $j^a = T^{ab} \xi_b$ seja definida (vide aula de QUANTIDADES CONSERVADAS e CAMPO DE Killing):

$$M_{\infty} = \int d^3x \sqrt{h} T_{ab} u^a \xi^b = \int d^3x \sqrt{h} \sqrt{|\xi^c \xi_c|} T_{ab} u^a u^b$$

onde $u^a = \frac{\xi^a}{\sqrt{|\xi^c \xi_c|}}$ é a 4-velocidade dos observadores estacionários (e

ADOPTA-SE ξ^a normalizado na posição do observador aferindo o valor de M_{∞} ; ou seja, no infinito). É interpretada como a soma dos elementos de massa/energia local CORRIGIDO por um fator de red-shift, para "trazer" o valor p/ o aferido à distância.

No caso de Schwarzschild:

$$M_{\infty} = 4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{\sqrt{f(r)} \rho(r)}{\sqrt{1 - \frac{2GM(r)}{r}}}$$

A relação de ordem entre M_{∞} e M é obtida pelo resultado do exercício abaixo:

Exercício: Usando as EOs. de Einstein p/ simetria esférica e estaticidade, mostre que

$$M := 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{\sqrt{f(r)} (p + p_\perp + 2p_\parallel)}{\sqrt{1 - \frac{2Gm(r)}{r}}}.$$

Do resultado acima vemos que, como $p_\perp + 2p_\parallel > 0$,

$M \geq M_\infty$,
de onde temos a hierarquia

$$M_\infty \leq M \leq M_p$$

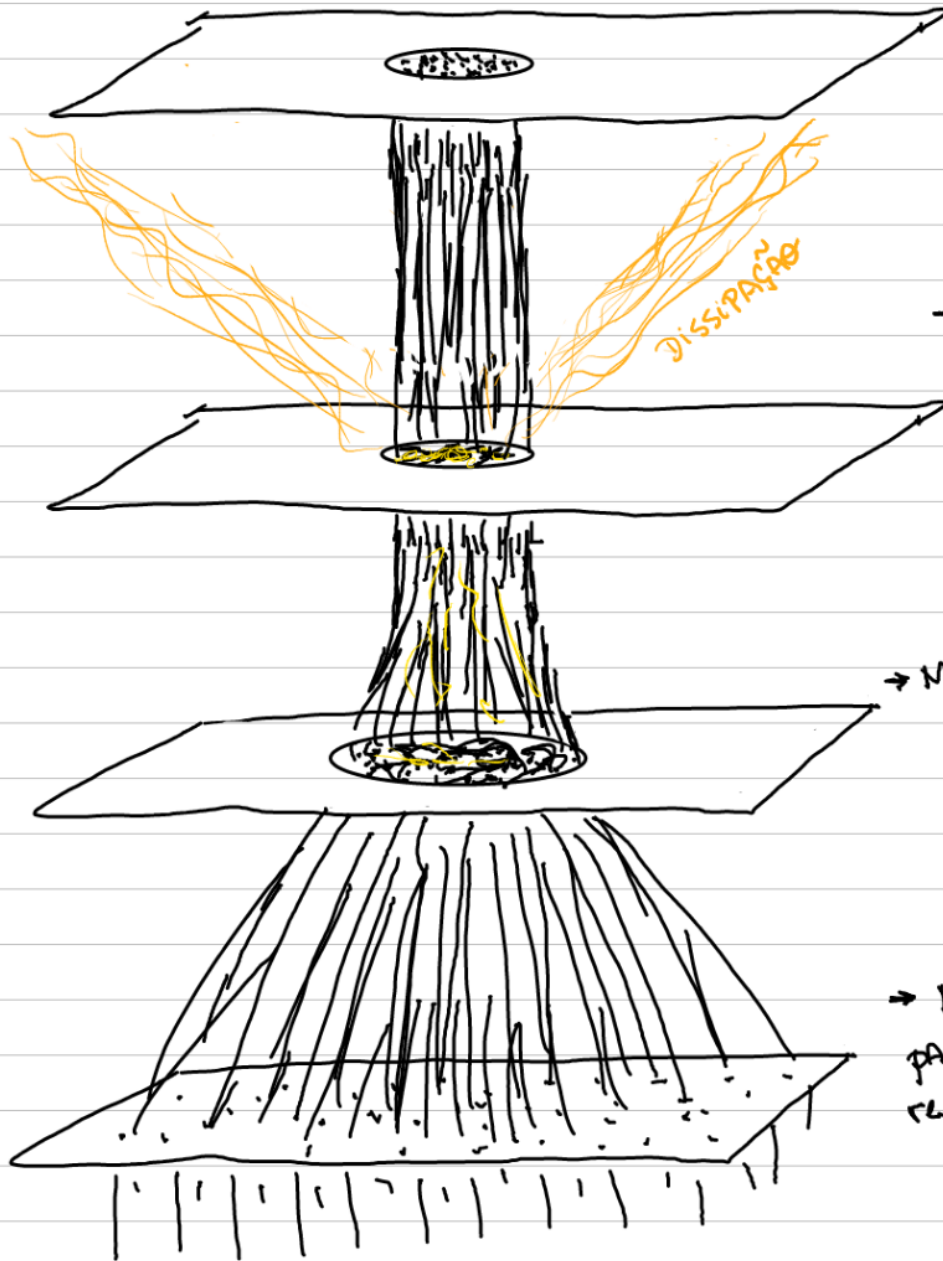
↑ Conservada no colapso esférico
(massa ADM - de Arnowitt, Deser & Misner)

A expressão do exercício acima, onde M é expresso como uma integral volumétrica em termos do elemento de volume físico ($4\pi r^2 dr \sqrt{g_{rr}}$), mas corrigido pelo fator de red-shift ($\sqrt{f(r)}$) p/ o infinito, mostra que as pressões contribuem p/ a massa gravitacional do corpo, assim como referido pelos observadores no infinito.

A seguir, ilustramos o comportamento dessas massas no decorrer de um colapso gravitacional.

Cenário possível: colapso esférico com conservação de número de partículas e suas massas de repouso

$$E_{\text{lig}} := M_p - M$$



→ Situação estática FINAL:

$$M + M_{\text{dis}} = Nm_B \Rightarrow M < Nm_B,$$

$$M_p = Nm_B \text{ (OBJETO "Frio")},$$

$$M_{\infty} < M$$

→ Situação (outra) estática INTERMEDIÁRIA:

$$M = Nm_B \text{ (CONSERVAÇÃO)}, M_p > Nm_B \text{ (} M_p - Nm_B =$$

soma das energias cinéticas medidas localmente),

$$M_{\infty} < Nm_B \text{ (soma das energias locais corrigidas pelo fator de red-shift p/ o infinito)}$$

→ Matéria colapsando, ainda em situação transitente:

$$M_{\infty} = ? \text{ (NÃO DEFINIDO)}, M = Nm_B \text{ (CONSERVAÇÃO)},$$

$$M_p \geq Nm_B \text{ (cada observador mede, localmente, no mínimo a densidade associada à massa de repouso das partículas)}$$

→ Matéria ESPARSA ($p \approx 0, p=0$) constituída de N partículas não-interagentes com massa de repouso m_B , aproximadamente em repouso:

$$M_{\infty} = M = M_p = Nm_B$$

Exercício: Suponha que um objeto esférico foi formado a partir de matéria inicialmente muito esparsa ($\rho_i = 0$) que, por pura ação gravitacional, se comprimiu, sempre preservando a simetria esférica, até formar um objeto com densidade uniforme ρ_0 e raio R (estático no final). Suponha que o número N de bárions formando o objeto tenha sido conservado ao longo de todo o processo (sendo m_B a massa de repouso média de cada um deles).

- a) Mostre que o menor valor possível p/M na configuração inicial (antes de formar o objeto esférico) é $M = M_i := Nm_B$;
- b.) Argumente que depois do objeto ser formado (com consequente geração de calor, irradiação de energia térmica, etc.), o menor valor possível $p/M_0 := 4\pi\rho_0 R^3/3$ é a solução da eq.:

$$\frac{3}{2} M_0 \left[\frac{\text{Arccos}\left(\sqrt{2GM_0/R}\right)}{(2GM_0/R)^{3/2}} - \sqrt{\frac{R}{2GM_0} \left(\frac{R}{2GM_0} - 1 \right)} \right] = M_i (= Nm_B)$$

(verifique, como check de consistência, que $M_0 \rightarrow Nm_B$ $p/R \rightarrow \infty$.)

- c) Mostre que em ordem dominante em $R/GM_0 \gg 1$, tem-se

$$M_0 - M_i = -\frac{3}{5} \frac{GM_0^2}{R} + O\left(\left(\frac{GM_0}{R}\right)^2 M_0\right)$$

Qual a interpretação do resultado acima, $-3GM_0^2/(5R)$, no contexto de gravitação newtoniana. (Prove sua afirmação.)

d) Lembrando que para um objeto com densidade uniforme, o menor valor possível $p/R/GM_0$ é $3/4$, calcule o maior valor possível p a quantidade

$$\left| \frac{M_0 - M_i}{M_0} \right|;$$

e) Pelo teorema de Birkhoff, o valor de M_i tem que ser preservado ao longo de todo o colapso esférico. Mas se o objeto formado no fim possui $M = M_0$, o que aconteceu com a diferença $M_i - M_0$?

f) Considerando que a eficiência da conversão de massa em energia por reações de fusão nuclear é de, no máximo, da ordem de 1%, compare a eficiência da energia liberada num colapso gravitacional (p/ formar corpos com diferentes valores de GM/R) com a liberada por fusão nuclear.

Em particular, considere valor de GM/R típicos de uma estrela como o Sol e de uma estrela de nêutrons ($GM/R \sim 1/6$).

Exercício: Considere o colapso de uma casca esférica, como ilustrado abaixo (num diagrama espaço-tempo). Seja M a massa gravitacional dessa casca, assim como medida no infinito.



- a) Usando o teorema de Birkhoff, mostre que a região externa pode ser coberta com um sistema de coordenadas $\{t, r, \theta, \varphi\}$ tal que o elemento-de-linha seja dado, nessa região, por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

para $r > r_c(t)$, onde $r_c(t)$ é o valor da coordenada r da casca esférica durante o colapso (como função da coordenada t);

- b) Usando o teorema de Birkhoff, mostre que o espaço-tempo no interior da casca esférica é plano. Ou seja, que existe um sistema de coordenadas $\{T, R, \Theta, \Phi\}$ no qual o elemento-de-linha, nessa região, é dado por

$$ds^2 = -dT^2 + dR^2 + R^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2),$$

- para $R_0 < R_c(T)$, onde $R_c(T)$ é o valor da coordenada R da casca durante o colapso (como função da coordenada T);
- c) Mostre que, por continuidade das grandezas geométricas através da casca, a relação entre $\{t(t, r)\}$ e $\{T, R\}$ sobre a casca é tal que $r_c(t) = R_c(T)$;
- d) Ainda usando a continuidade de grandezas geométricas através da casca, mostre que $r_c(t)$ e $R_c(T)$ também devem satisfazer:

$$dt \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{r_c(t)}\right) - \frac{(dr_c/dt)^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r_c(t)}\right)}} = \sqrt{1 - \left(\frac{dR_c}{dT}\right)^2} dT.$$

(Certifique-se que você compreende o significado físico da quantidade acima.)

- e) Suponha que $R_c(T) = R_0 - VT$, com $R_0 > 2GM$ e $0 < V < 1$. Mostre que embora p/ um observador estático dentro da casca o colapso dure um tempo finito, para um observador estático na região externa a casca leva um tempo infinito p/ chegar em $r = 2GM$. (Vide figura abaixo):

