Simetrias e campos de Killing

Definição: Seja ξ um espaço-tempo c/ campo métrico $g_{ab}(p)$, $p \in \xi$. Uma isometria (i.e., simetria geométrica) de ξ é um difeomorfismo $\phi : \xi \to \xi$ (i.e., ϕ é suave, bijetora e ϕ^{-1} é suave) tal que, na "visão passiva", as componentes da métrica num sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ e no sistema de coordenadas $\{x'^\mu\}$, com $x'^\mu(p) := x^\mu(\phi^{-1}(p))$, são iguais: $g'_{\mu\nu}(p) \equiv g_{\mu\nu}(\phi^{-1}(p))$ $\left(\Leftrightarrow g'_{\mu\nu}(x) \equiv g_{\mu\nu}(x)\right)$

Exemplo: (Translação em E^2) Seja um espaço bidimensional euclidiano e consideremos seu elemento-de-linha em coordenadas polares (apenas porque seria trivial se considerássemos coord. cartesianas): $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. Uma translação de uma distância α na direção dada por $\theta = \beta$ induz a seguinte mudança de coordenadas (certifique-se que você compreende isso):

$$r' := \sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha\cos(\theta - \beta)}$$

$$\theta' \text{ tal que } \cos\theta' = \frac{r\cos\theta - \alpha\cos\beta}{\sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha\cos(\theta-\beta)}} \quad \text{e} \quad \sin\theta' = \frac{r\sin\theta - \alpha\sin\beta}{\sqrt{r^2+\alpha^2 - 2r\alpha\cos(\theta-\beta)}}.$$

A matriz $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa}$ de mudança de coordenadas vale (calcule!):

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial r'} = \dfrac{r' + \alpha\cos(\theta' - \beta)}{\sqrt{r'^2 + \alpha^2 + 2r'\alpha\cos(\theta'-\beta)}} & \dfrac{\partial r}{\partial \theta'} = \dfrac{-r'\alpha\sin(\theta'-\beta)}{\sqrt{r'^2+\alpha^2+2r'\alpha\cos(\theta'-\beta)}} \\[3ex] \dfrac{\partial \theta}{\partial r'} = \dfrac{\alpha\sin(\theta'-\beta)}{[r'^2+\alpha^2+2r'\alpha\cos(\theta'-\beta)]} & \dfrac{\partial\theta}{\partial\theta'} = \dfrac{r'[r' + \alpha\cos(\theta'-\beta)]}{[r'^2+\alpha^2+2r'\alpha\cos(\theta'-\beta)]} \end{pmatrix}$$

Assim, usando $g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}$, temos:

$$g'_{jk} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} g_{lm} = \frac{\partial r}{\partial x'^j}\frac{\partial r}{\partial x'^k} + r^2 \frac{\partial \theta}{\partial x'^j}\frac{\partial \theta}{\partial x'^k} = \frac{\partial r}{\partial x'^j}\frac{\partial r}{\partial x'^k} + [r'^2 + \alpha^2 + 2\alpha r'\cos(\theta'-\beta)]\frac{\partial \theta}{\partial x'^j}\frac{\partial \theta}{\partial x'^k} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(r'+\alpha\cos(\theta'-\beta))^2 + \alpha^2\sin^2(\theta'-\beta)}{(r'^2+\alpha^2+2\alpha r'\cos(\theta'-\beta))} & \frac{-(r'+\alpha\cos(\theta'-\beta))r'\alpha\sin(\theta'-\beta) + \alpha\sin(\theta'-\beta)r'(r'+\alpha\cos(\theta'-\beta))}{(r'^2+\alpha^2+2\alpha r'\cos(\theta'-\beta))} \\ = & \frac{r'^2\alpha^2\sin^2(\theta'-\beta) + r'^2(r'+\alpha\cos(\theta'-\beta))^2}{(r'^2+\alpha^2+2\alpha r'\cos(\theta'-\beta))} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r'^2 \end{pmatrix}.$$

Logo, vemos que $g'_{jk}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r'^2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2(\phi\circ\phi^{-1}(p))^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r(\phi^{-1}(p))^2 \end{pmatrix} = g_{jk}(\phi^{-1}(p))$,

o que mostra que a transformação dada acima é uma isometria.

Exercício: Mostre que o conjunto de isometrias de um espaço-tempo dado constitui um grupo pela operação de composição.

- <u>Grupo de isometrias a um parâmetro e campos de Killing</u>

$\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tal que $\begin{cases} \phi_\lambda := \phi(\lambda, \cdot) : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \text{ é uma isometria p/ todo } \lambda \in \mathbb{R}; \\ \phi_0(p) = p, \quad p \in \mathcal{V}; \\ \phi_{\lambda+\sigma}(p) = \phi_\lambda(\phi_\sigma(p)), \quad \lambda, \sigma \in \mathbb{R}, \ p \in \mathcal{V}; \\ \text{P/ qualquer evento } p \in \mathcal{V} \text{ fixo, } g_p(\lambda) := \phi_\lambda(p), \lambda \in \mathbb{R}, \text{ é uma} \\ \text{curva suave em } \mathcal{V} \text{ (\underline{órbita} de } p \text{ por } \phi_\lambda) \end{cases}$

Note que se conhecermos $\phi_{\bar\lambda}$ p/ $\bar\lambda \in [0, \varepsilon]$, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, podemos reconstruir todo o grupo $\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, pois

$$\phi_\lambda = \underbrace{\phi_{\lambda/N} \circ \phi_{\lambda/N} \circ \dots \circ \phi_{\lambda/N}}_{N \text{ vezes}} =: \phi^{(N)}_{\lambda/N}$$

E qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$, sempre podemos escolher N suficientemente grande de modo que $\lambda/N \in [0, \varepsilon]$. (Se $\lambda < 0$, basta lembrarmos que $\phi_{-\lambda} = \phi_\lambda^{-1}$.)

Por outro lado, p/ $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, $\phi_{\bar\lambda}$, $\bar\lambda \in [0, \varepsilon]$, pode ser caracterizado pelo <u>gerador de ϕ_λ em torno da identidade</u>, ou seja, pelo <u>campo vetorial</u> $\xi^a(p)$ que em cada $p \in \mathcal{V}$ é tangente à órbita de p por ϕ_λ:

$$\xi^\mu(p) := \left. \frac{d}{d\lambda} x^\mu(\phi_\lambda(p)) \right|_{\lambda=0} \qquad (\text{na base coordenada } \partial^a_\mu)$$

Esse campo vetorial que gera o grupo de simetrias $\{\phi_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ é chamado de <u>Campo de Killing</u>.

→ <u>Eq. de Killing</u>:

Note que pela definição de isometrias, sendo $\{x^\mu\}$ um sistema de coordenadas qualquer, $x'^\mu_\lambda := x^\mu \circ \phi_{-\lambda}$ e ${}^{(\lambda)}g'_{\mu\nu}$ as componentes da métrica nas coordenadas $\{x'^\mu_\lambda\}$, tem-se

$$ {}^{(\lambda)}g'_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu}(\phi_{-\lambda}(p)) $$

Por outro lado, ${}^{(\lambda)}g'_{\mu\nu}(p) = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu_\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu_\lambda} g_{\alpha\beta} \right)\Big|_p$. Aplicando essa última expressão p/ uma mudança de coordenadas infinitesimal:

$$ x'^\mu_\epsilon(p) = x^\mu(\phi_{-\epsilon}(p)) = x^\mu(p) - \epsilon\,\xi^\mu(p) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \,; $$

$$ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu_\epsilon}(p) = \delta^\alpha_\mu + \epsilon\,\partial'_\mu \xi^\alpha \Big|_p + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \left(\delta^\alpha_\mu + \epsilon\,\partial_\mu \xi^\alpha\right)\Big|_p + \mathcal{O}(\epsilon^2) \,; $$

$$ {}^{(\epsilon)}g'_{\mu\nu}(p) = \left[(\delta^\alpha_\mu + \epsilon\,\partial_\mu \xi^\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2))(\delta^\beta_\nu + \epsilon\,\partial_\nu \xi^\beta + \mathcal{O}(\epsilon^2))\, g_{\alpha\beta} \right]\Big|_p = $$

$$ = g_{\mu\nu}(p) + \epsilon \left(g_{\alpha\nu}\,\partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\beta}\,\partial_\nu \xi^\beta \right)\Big|_p + \mathcal{O}(\epsilon^2) \,. $$

Assim, impondo a condição de isometria dada acima, temos:

$$ g_{\mu\nu}(p) + \epsilon \left(g_{\alpha\nu}\,\partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\,\partial_\nu \xi^\alpha \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = g_{\mu\nu}(\phi_{-\epsilon}(p)) $$

$$\Leftrightarrow \quad g_{\mu\nu}(p) - g_{\mu\nu}(\phi_{-\epsilon}(p)) + \epsilon\left(g_{\alpha\nu}\partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\nu \xi^\alpha\right)\Big|_p + O(\epsilon^2) = 0 \quad \overset{\div\epsilon}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\div\epsilon}{\Leftrightarrow} \quad \left[\frac{g_{\mu\nu}(p) - g_{\mu\nu}(\phi_{-\epsilon}(p))}{\epsilon}\right] + \left(g_{\mu\alpha}\partial_\nu \xi^\alpha + g_{\alpha\nu}\partial_\mu \xi^\alpha\right)\Big|_p + O(\epsilon) = 0 \quad \overset{\lim \epsilon\to 0}{\Rightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\mu\alpha}\partial_\nu \xi^\alpha + g_{\alpha\nu}\partial_\mu \xi^\alpha = 0} \quad \text{(Eq. de Killing em componentes)}$$

Exercício: Mostre que a forma tensorial da Eq. de Killing é dada por

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 ,$$

onde $\xi_a := g_{ab}\xi^b$ e ∇_a é a derivada covariante compatível com g_{ab}.

Exercício: No exemplo acima, da translação em um plano Euclidiano, obtenha as componentes do campo de Killing associado, nas coordenadas polares, e mostre explicitamente que satisfazem a Eq. de Killing.

Exercício: Mostre que o conjunto de campos de Killing de um Espaço-tempo forma um espaço vetorial (possivelmente trivial, $\{0\}$).

Exercício: Mostre que se o parâmetro λ do grupo de isometrias $\{\phi_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ for usado como uma das coordenadas do sistema de coordenadas (ou seja, o campo de Killing associado é um vetor da base coordenada, $\xi^a = \partial_\lambda^a$), então $g_{\mu\nu}$ não depende dessa coord. λ.

Exercício: Mostre que se num sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, nenhuma das componentes da métrica depender de uma das coordenadas, digamos $x^{\bar{\alpha}}$, com $\bar{\alpha} = 0, 1, 2$ ou 3, então $\partial_{\bar{\alpha}}$ é um campo de Killing do espaço-tempo.

Exercício: Considere um espaço-tempo plano bidimensional. Em coordenadas cartesianas inerciais $\{(t, x)\}$, o elemento-de-linha é $ds^2 = -dt^2 + dx^2$. Resolva a eq. de Killing e encontre 3 campos de Killing independentes.