

Lista de Exercícios para Avaliação

- ① Num espaço-tempo curvo, a aceleração relativa entre geodésicas vizinhas, separadas por um vetor δx^a , é determinada pelo tensor de Riemann de modo que

$$u^a \nabla_a (u^b \nabla_b \delta x^d) = -R_{abc}{}^d u^a \delta x^b u^c,$$

onde u^a é a 4-velocidade das geodésicas.

- (a) Usando apenas *gravitação newtoniana*, mostre que a aceleração relativa entre trajetórias vizinhas em “queda livre”, separadas por um vetor $\delta \vec{x}$, sujeitas apenas ao potencial gravitacional $\phi(x)$, é dada por

$$\delta \vec{a} = -(\delta \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi$$

(ou, usando índices, $\delta a^j = -(\partial_k \partial^j \phi) \delta x^k$ – lembre-se que, em gravitação newtoniana, $\vec{a} = -\vec{\nabla} \phi$);

- (b) O resultado acima sugere a associação $\partial_j \partial^k \phi \leftrightarrow R_{ajc}{}^k u^a u^c$ entre gravitação newtoniana e Relatividade Geral (no limite não-relativístico). Usando que $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ na teoria newtoniana, onde G é a constante da gravitação universal e ρ é a densidade de massa que gera o campo gravitacional, mostre que a equação relativística

$$R_{ab} = 4\pi G [\alpha T_{ab} + (1 - \alpha) T g_{ab}]$$

possui o limite não-relativístico correto para *todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, onde $R_{ab} := R_{acb}{}^c$, T_{ab} é o tensor energia-momentum-estresse que descreve a fonte de gravitação e $T := g^{ab} T_{ab}$;

- (c) Rescreva a equação dada no item anterior na forma $G_{ab}(\alpha) = 4\pi G T_{ab}$, determinando $G_{ab}(\alpha)$ apenas em termos de tensores geométricos e de α . Em seguida, determine, *justificando*, o valor de α de modo que a conservação covariante de T_{ab} (ou seja, $\nabla_a T^{ab} = 0$) seja consequência dessa equação.

- ② Considere um espaço bidimensional com elemento-de-linha dado por

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2} + r^2 d\varphi^2$$

onde $M > 0$ é uma constante.

- (a) Calcule a distância física entre as circunferências com coordenadas $r = r_1$ e $r = r_2$ (com, digamos, $M < r_1 < r_2$). O que acontece quando $r_1 \rightarrow M$?
- (b) Calcule a área entre essas mesmas circunferências e discuta o que ocorre quando $r_1 \rightarrow M$;
- (c) Calcule os escalares R , $R_{abcd}R^{abcd}$ e $R_{ab}R^{ab}$.
- ③ Num dos exercícios da “Lista de Aquecimento”, mostrou-se que o espaço-tempo nas imediações de um corpo esférico de massa M pode ser aproximado por

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

com $\Phi = -GM/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (no regime em que $|\Phi| \ll 1$).

- (a) Mostre que esse mesmo elemento-de-linha pode ser colocado na forma

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 (\sin \theta)^2 d\varphi^2, \quad |\phi| \ll 1,$$

onde $\phi = -GM/r$. Deixe clara a relação entre r e x, y, z , sendo consistente com as ordens de aproximação;

(Atenção: Note que o fator $1 - 2\phi$ multiplica apenas dr^2 nas novas coordenadas. Logo, r não é meramente $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. A coordenada r é chamada “coordenada radial areal”, pois mesmo que não represente necessariamente a distância física ao longo da direção radial – assim como $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ também não representa –, a área de esferas com $r = \text{constante}$ vale $4\pi r^2$ – tente entender por que.)

- (b) Considerando que órbitas circulares podem ser aproximadas pelas órbitas newtonianas, calcule a relação entre a passagem do tempo a bordo de um satélite numa órbita de raio R_o e o tempo na superfície da Terra (com raio $R_\oplus$ – despreze o movimento de rotação da Terra);
- (c) A título de curiosidade, separe o efeito anterior numa parte devida apenas ao campo gravitacional (Relatividade Geral) e noutra devida à velocidade do satélite (Relatividade Restrita). Qual o valor de R_o no qual esses efeitos têm a mesma importância? Considerando que os satélites da constelação GPS orbitam num raio $R_o \approx 4R_\oplus$, qual desses efeitos é mais importante nesse caso?

- ④ Considere um raio de luz se propagando no espaço-tempo do exercício anterior, nas coordenadas $\{(t, x, y, z)\}$. Calcule a deflexão sofrida pelo raio de luz ao passar nas imediações do Sol, usando o roteiro indicado nos itens abaixo:

- (a) Mostre que a equação da geodésica para esse raio, no regime de gravidade linearizada, implica em

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -2\vec{\nabla}\Phi + 4(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\Phi)\vec{V},$$

onde $\vec{V} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$;

- (b) Resolva a EDO acima, obtendo a solução geral (em forma implícita)

$$\vec{V}(t) = [1 + 4\Phi(t) - 4\Phi_0]\vec{V}_0 - 2 \int_{t_0}^t dt' (\vec{\nabla}\Phi)(t'),$$

onde $\Phi(t) := \Phi(x(t), y(t), z(t))$, $(\vec{\nabla}\Phi)(t) := (\vec{\nabla}\Phi)(x(t), y(t), z(t))$, $\Phi_0 := \Phi(t_0)$ e $\vec{V}_0 = \vec{V}(t_0)$;

- (c) Calcule a deflexão α indicada na Fig. 1, como função de M e b . Em seguida, aplique o resultado para um raio de luz vindo do infinito passando rasante ao Sol. (**Sugestão:** Resolva *iterativamente* a expressão acima, lembrando que desejamos apenas efeitos de primeira ordem em Φ .)

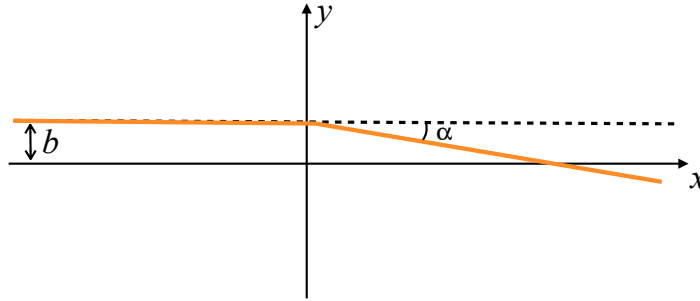


Figura 1: Deflexão de raio de luz.

- ⑤ Sendo u^μ as componentes da 4-velocidade de uma partícula livre, com velocidade *arbitrária*, no espaço-tempo do exercício ② em coordenadas $\{(t, r, \theta, \varphi)\}$, pede-se:

- (a) Mostre que $u_0 = g_{0\mu}u^\mu$ e $u_3 = g_{3\mu}u^\mu$ são constantes de movimento;
- (b) Mostre que sempre podemos escolher as coordenadas $\{(\theta, \varphi)\}$ de modo que o movimento de uma partícula livre tenha $\theta = \text{constante}$. Qual o valor dessa constante?
- (c) Obtenha uma equação formalmente análoga à de “conservação de energia”,

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V(r) = E,$$

onde $\dot{r} = dr/d\lambda$ (com λ sendo o tempo próprio no caso tipo-tempo e apenas um parâmetro afim no caso tipo-luz), E é uma constante e $V(r)$ é uma função (a ser determinada) apenas da coordenada radial r (mas dependente de outros parâmetros constantes); (**Sugestão:** use os resultados dos itens anteriores no vínculo que 4-velocidades devem satisfazer em cada caso: tipo-tempo e tipo-luz.)

- (d) Com a ajuda da equação do item anterior, calcule o período (na coordenada t) de uma órbita *circular* de raio $r = r_0$, deixando clara a correção relativística em comparação com o resultado newtoniano;
 - (e) Considerando órbitas ligeiramente perturbadas em relação às circulares ($r(\lambda) = r_0 + \delta r(\lambda)$, com $|\delta r(\lambda)| \ll r_0$), obtenha a precessão (ângulo por unidade de “tempo”) do periastro dessa órbita; (**Sugestão:** a partir da equação do item (c), obtenha uma equação “tipo oscilador harmônico” para a perturbação $\delta r(\lambda)$, calcule a frequência dessa oscilação e compare com a frequência do movimento angular. Certifique-se de fazer todas as comparações de frequência e período usando a mesma “variável temporal”.)
- ⑥ Considerando o efeito da rotação da Terra no seu campo gravitacional e fazendo uso da analogia com eletromagnetismo (e do resultado fornecido num dos exercícios da “Lista de Aquecimento”), *estime* a ordem de grandeza da mudança fracional no raio de órbitas equatoriais devido a esse efeito (para órbitas com a mesma velocidade).
- ⑦ Uma partícula clássica com massa m , carga elétrica q e spin $\vec{S}$ possui momento de dipolo magnético dado por $\vec{\mu} = q\vec{S}/(2m)$. Quando sujeita a um campo magnético $\vec{B}$, o spin dessa partícula precessiona de acordo

com a equação

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B},$$

de onde segue que a velocidade angular de precessão é dada por $\Omega = qB/(2m)$.

- (a) Com base na analogia de gravitomagnetismo, encontre (argumentando) a equação análoga para o spin $\vec{S}$ de um giroscópio sujeito a um campo gravitomagnético $\vec{B}_g$;
- (b) *Estime* a ordem de grandeza da velocidade angular de precessão de um giroscópio nas imediações da Terra devido ao efeito gravitomagnético gerado por sua rotação.