



PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – P2 – 09/06/2022

Duração: 100 minutos

*É permitido apenas o uso de calculadoras simples (quatro operações + raiz quadrada)*

*Não é permitido o uso de calculadoras científicas, celulares, relógios ou outros*

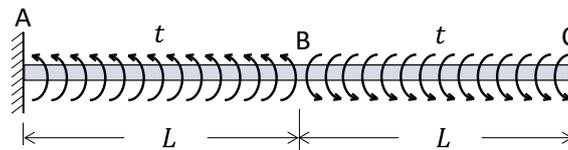
*equipamentos eletrônicos)*

Nome: \_\_\_\_\_ N.USP: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

**1ª Questão** (3,0 pontos)

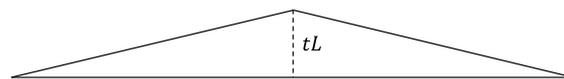
O eixo circular prismático ABC da figura tem comprimento  $2L$ , diâmetro  $d$  e está engastado na sua extremidade A. O material que forma o eixo tem módulo de elasticidade a cisalhamento  $G$ . Em seu trecho AB, o eixo está submetido a um torque  $t$  uniformemente distribuído e, em seu trecho BC, está submetido a um torque uniformemente distribuído de mesma magnitude  $t$ , porém de sentido contrário. Pede-se determinar:

- em qual seção do eixo ocorre a máxima tensão de cisalhamento e qual é a sua magnitude;
- em qual seção do eixo ocorre a máxima tensão de tração e qual é a sua magnitude;
- o giro sofrido pela seção B;
- o giro sofrido pela seção C.



**Resolução:**

- o diagrama de momentos de torção é:



Então o momento de torção máximo ocorre na seção intermediária do eixo (B) e é nessa seção que ocorre a máxima tensão de cisalhamento:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T_{m\acute{a}x}r}{GI_p} = \frac{16T_{m\acute{a}x}}{\pi d^3} \Rightarrow \tau_{m\acute{a}x} = \frac{16tL}{\pi d^3}$$

(1,0 pts)

- a máxima tensão de tração ocorre na mesma seção B e será numericamente igual à máxima tensão de cisalhamento:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{16tL}{\pi d^3}$$

(0,5 pts)

- 

$$\phi_B = \int_0^L \frac{T(x)}{GI_p} dx = \frac{32}{G\pi d^4} \int_0^L tx dx \Rightarrow \phi_B = \frac{16tL^2}{G\pi d^4}$$

(1,0 pts)

- 

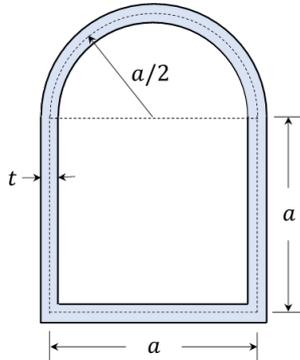
$$\phi_C = \phi_B + \int_0^L \frac{tL - tx}{GI_p} dx = \frac{32tL^2}{G\pi d^4}$$

(0,5 pts)



Nome: \_\_\_\_\_ N.USP: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

2ª Questão (2,0 pontos)



Uma barra tubular de alumínio, cuja seção transversal está indicada na figura, tem espessura de parede constante  $t$  e deve resistir a um torque  $T$ . Sabendo que a tensão de cisalhamento de escoamento do material é  $\tau_y$ , pede-se determinar o *fator de segurança*. (Despreze eventuais concentrações de tensão nos cantos do perfil)

Dados:

$a = 50 \text{ mm}$ ;  $t = 3 \text{ mm}$ ;  $T = 1 \text{ kNm}$  e  $\tau_y = 100 \text{ MPa}$

Resolução:

$$\tau = \frac{T}{2tA_m}$$

(0,5 pts)

$$FS = \frac{\tau_y}{\tau} = \frac{2tA_m\tau_y}{T}$$

(0,5 pts)

$$A_m = a^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{\pi}{8}\right)a^2$$

(0,5 pts)

$$FS = \left(1 + \frac{\pi}{8}\right)\frac{2t a^2 \tau_y}{T}$$

$$\Rightarrow FS = 2,09$$

(0,5 pts)

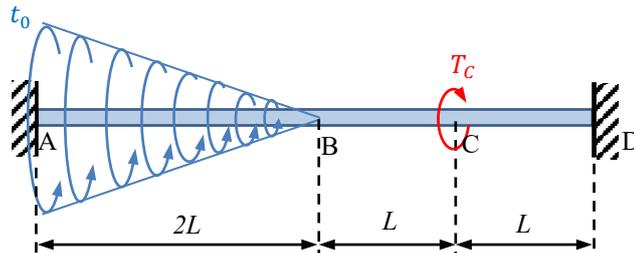


Nome: \_\_\_\_\_ N.USP: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

**3ª Questão (5,0 pontos)**

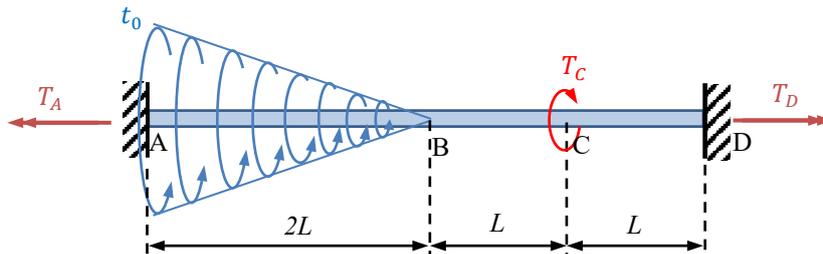
O eixo prismático ABCD da figura está engastado em A e em D. Em AB, ele está submetido a um torque distribuído (linearmente variável), de magnitude máxima  $t_0$  em A e aplicado no sentido anti-horário. Em C, há um torque concentrado de magnitude  $T_C = 2t_0L$ , aplicado no sentido horário. Determine:

- os torques reativos em A e em D, indicados em um diagrama de corpo livre com os sentidos corretos de atuação;
- o diagrama de momentos de torção;
- o ângulo de giro em B e o sentido em que ocorre (indique o sentido de rotação em um desenho do eixo ABCD).



**Resolução:**

- Diagrama de corpo livre do eixo:



Equação de equilíbrio de momentos:

$$T_D + \frac{t_0 2L}{2} = T_A + T_C = T_A + 2t_0L$$

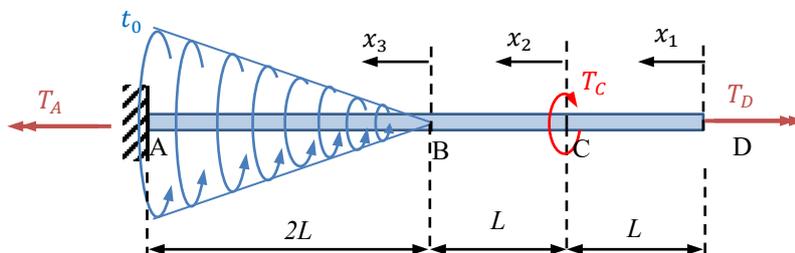
Logo:

$$T_D = T_A + t_0L$$

**(0,5 pts)**

O grau de hiperstaticidade estrutural é:  $g = 2 - 1 = 1$

Tomando  $T_D$  como incógnita hiperestática, teremos a seguinte estrutura isostática fundamental:



Denominando os trechos CD, BC e AB por 1, 2 e 3, respectivamente, teremos os seguintes torques internos:

No trecho  $D \rightarrow C$ :

$$T_1(x_1) = T_D, \quad (0 \leq x_1 < L)$$

No trecho  $C \rightarrow B$ :

$$T_2(x_2) = T_D - T_C = T_D - 2t_0L, \quad (0 \leq x_2 < L)$$



No trecho  $B \rightarrow A$ :

$$T_3(x_3) = T_D - 2t_0L + \int_0^{x_3} \left(\frac{t_0x_3}{2L}\right) dx_3 = T_D - 2t_0L + \frac{t_0x_3^2}{4L}, \quad (0 \leq x_3 < 2L)$$

A equação de compatibilidade é dada por:

$$\phi_{D,A} = \int_0^L \frac{T_1(x_1)}{GI_p} dx_1 + \int_0^L \frac{T_2(x_2)}{GI_p} dx_2 + \int_0^{2L} \frac{T_3(x_3)}{GI_p} dx_3 = 0$$

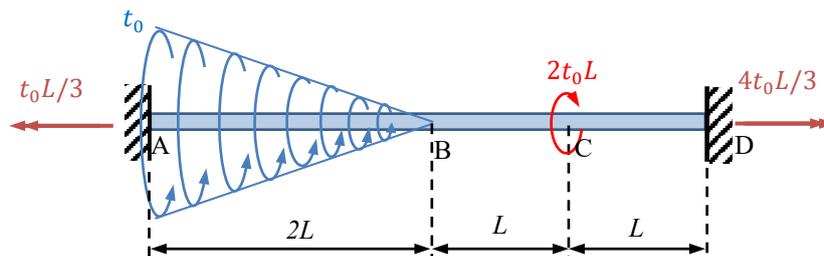
Resultando, após substituições e simplificações:

$$T_D = \frac{4}{3}t_0L$$

Logo, retornando à equação de equilíbrio:

$$T_A = \frac{t_0L}{3}$$

Os sinais positivos obtidos para  $T_D$  e para  $T_A$  mostram que os sentidos arbitrados para tais reações no D.C.L. estão corretas. Assim, o D.C.L. final fica:



(1,5 pts)

b) Os torques em cada segmento ficam dados por:

No trecho  $D \rightarrow C$ :

$$T_1(x_1) = \frac{4}{3}t_0L, \quad (0 \leq x_1 < L)$$

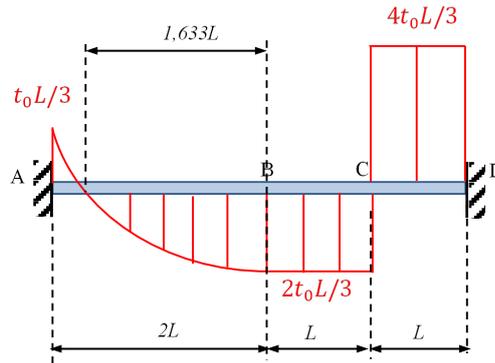
No trecho  $C \rightarrow B$ :

$$T_2(x_2) = -\frac{2}{3}t_0L, \quad (0 \leq x_2 < L)$$

No trecho  $B \rightarrow A$ :

$$T_3(x_3) = \frac{t_0x_3^2}{4L} - \frac{2}{3}t_0L, \quad (0 \leq x_3 < 2L)$$

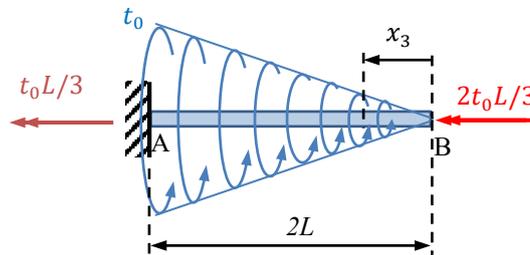
O diagrama final de momentos de torção fica:



(1,5 pts)

c) O ângulo de giro em B pode ser determinado analisando-se o segmento AB ou o segmento BCD. Seguem as análises:

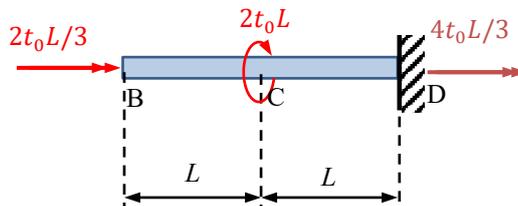
Analisando o segmento AB:



$$\phi_{B,A} = \int_0^{2L} \frac{T_3(x_3)}{GI_p} dx_3 = \frac{1}{GI_p} \int_0^{2L} \left( \frac{t_0 x_3^2}{4L} - \frac{2}{3} t_0 L \right) dx_3$$

$$\phi_{B,A} = \frac{1}{GI_p} \left( \frac{8}{12} t_0 L^2 - \frac{16}{12} t_0 L^2 \right) = -\frac{2}{3} \frac{t_0 L^2}{GI_p}$$

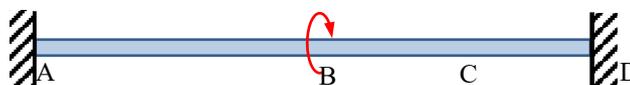
Analisando, alternativamente, o segmento BCD:



$$\phi_{B,D} = -\left(\frac{2t_0L}{3}\right) \frac{L}{GI_p} + \left(\frac{4t_0L}{3}\right) \frac{L}{GI_p} = \frac{2}{3} \frac{t_0 L^2}{GI_p}$$

(1,0 pts)

Representação da rotação da seção B em um desenho:



(0,5 pts)