Lista de Exercícios I

① Considere o espaço vetorial de funções reais contínuas com primeiras derivadas contínuas no intervalo fechado $[0, 1]$. Qual das seguintes definições pode ser um produto escalar?

(a) $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx + f(0)g(0)$

(b) $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx$

② Considere a seguinte equação em E_∞ (espaço Euclidiano de dimensão infinita) – seja o produto escalar $\langle x|y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n$):

$$Cx = a\,,$$

onde o operador C é definido (em alguma base) por:

$$C(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)\,.$$

Podemos dizer que C é:

(a) Um operador limitado (isto é, existe um número real não negativo α, tal que, para todo $x \in E_\infty$, tenhamos $|Cx| \leq \alpha|x|$ onde $|x| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$.)

(b) Um operador linear?

(c) Um operador hermitiano?

(d) $Cx = 0$ tem alguma solução não trivial? $Cx = a$ sempre tem solução?

Agora responda as mesmas perguntas para o operador definido por

$$G(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (\alpha_1, \alpha_2/2, \alpha_3/3, ...)\,.$$

Note que um vetor para pertencer a E_∞ deve ser normalizado, isto é, o produto escalar do vetor com ele mesmo deve existir.

③ Seja $A(x)$ um operador que depende de uma variável contínua x. Defina sua derivada por

$$\frac{dA}{dx} \equiv A'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{A(x+\epsilon) - A(x)}{\epsilon} \, .$$

Se A tiver inverso, mostre que

$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}A'A^{-1} \, ;$$

mostre também que se A e B ambos dependerem de x, então

$$\frac{d(AB)}{dx} = A'B + AB' \, .$$

④ Se A e B são dois operadores que não comutam entre si mas se ambos comutam com $[A, B]$ pode-se mostrar que

$$e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} = e^{A}e^{B}.$$

(a) Mostre que $[B, e^{xA}] = e^{xA}[B, A]x$;

(b) Definindo $G(x) = e^{xA}e^{xB}$, mostre que

$$\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{dx}} = (A + B + [A, B]x)G$$

.

(c) Integre a equação do item anterior para obter a relação desejada.

(d) Mostre ainda que para A e B arbitrários

$$\lim_{\alpha,\beta \to 0} e^{\alpha A}e^{\beta B} = e^{\alpha A+\beta B+\frac{1}{2}\alpha\beta[A,B]+X}$$

onde X depende de potências superiores de α e β.

⑤ Suponha que tenhamos um sistema com momento angular total 1. Escolha uma base correspondente aos três autovetores da componente z do momento angular, J_z, com autovalores $+1, 0, -1$, respectivamente. Seja um conjunto descrito pela matriz densidade:

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) ρ é uma matriz densidade admissível? Explique. Assuma para o resto do problema que sim. ρ descreve um estado puro ou uma mistura? Explique.

(b) Dado o conjunto descrito por ρ, qual o valor médio de J_z?

(c) Qual o desvio padrão para uma medida de J_z?

⑥ Considere a aplicação do formalismo de matriz densidade para o problema de uma partícula de spin 1/2 em um campo magnético estático $\mathbf{B}$. Em geral, a partícula com spin terá também um momento magnético, orientado ao longo da direção do spin. Para partículas de spin 1/2, o operador de momento magnético tem a forma:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\gamma\, \boldsymbol{\sigma} ,$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ são as matrizes de Pauli e γ é uma constante chamada de fator giromagnético. Lembre-se que a Hamiltoniana do sistema é $H = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$

A partícula de spin 1/2 pode ter uma orientação de spin, ou *vetor de polarização*, dado por

$$\boldsymbol{P} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle .$$

Qual a evolução temporal, $d\mathbf{P}/dt$, do vetor de polarização? Expresse sua resposta da forma mais simples (fisicamente transparente) que puder. Note que nenhuma suposição foi feita sobre a pureza do estado.

⑦ Considere um sistema de N partículas de spin 1/2 por unidade de volume em equilíbrio térmico, em um campo magnético externo $\mathbf{B}$. Lembre-se que a distribuição canônica é

$$\rho = \frac{e^{-H/kT}}{Z} ,$$

com função de partição:

$$Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-H/kT}\right) .$$

Tal sistema de partículas tenderá a se orientar ao longo do campo magnético, resultado em um magnetização $\mathbf{M}$.

(a) Forneça uma expressão para $\mathbf{M}$.

(b) Qual a magnetização no limite de altas temperaturas (em ordem mais baixa)?

⑧ Escreva explicitamente a matrix 4×4 produto tensorial das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$