Março de 2022

Notas de Aula do Modelo Clássico

Alex Luiz Ferreira[1]
Universidade de São Paulo, Departamento de Economia, FEA-RP

Sumário

[1]Departamento de Economia FEA-RP, Universidade de São Paulo, Av. Bandeirantes, 3900, CEP 14040-900, Ribeirão Preto, Brazil. Telefone: 55 16 36020507, e-mail: alexferreira@usp.br.
Favor não divulgar sem autorização.

1 Conteúdo da Aula

- O que você aprenderá nessas primeiras aulas?
  - Um modelo de preços flexíveis;
  - Propriedades gerais da função de produção;
    - Função de produção de Cobb-Douglas
  - Mercado de fatores e decisão das firmas
  - Equilíbrio de mercado e um pouco de estática comparativa

2 Hipóteses Principais do Modelo

2.1 Demografia e Condições Iniciais

1. Estático;
2. População é constante e predeterminada.
   (a) Mão-de-obra, $L = \bar{L}$;
3. Oferta (estoque) de capital disponível é predeterminada, $K = \bar{K}$.

2.2 Expectativas

1. Sem incerteza.
2. Há conhecimento perfeito ou "previsão perfeita";

2.3 Estrutura da Economia

1. Firma representativa e atomista.
2. Economia fechada.
3. Mercados competitivos.
4. Ausência de fricções.
5. Preços flexíveis.
6. Pleno emprego dos recursos.

2.4 Tecnologia de Produção Neoclássica

Define-se as variáveis principais da oferta, que é igual ao fluxo de um produto chamado de Y. Assume-se que a oferta é produzida combinando-se estoques de insumos[2]: (1) capital físico durável[3], representado por K; (2) trabalho humano[4], denotado por L; e (3) conhecimento, representado pela letra A. É comum referir-se ao conhecimento como "tecnologia" ou também efetividade do trabalho. A restrição técnica da economia é dada por uma função genérica de produção: $Y = F(K, AL)$. Observe que A e L entram de forma multiplicativa [5]. Portanto, a "tecnologia" afeta o produto de forma semelhante ao trabalho. Inicialmente assume-se que $A = 1$, uma vez que analisa-se o caso estático (isso é, com o tempo fixo) e assim simplifica-se o modelo. Mais adiante, nesse próprio curso, serão explorados os impactos das variações de A (e de outros insumos) sobre a economia.

Há apenas um setor na economia. O produto resultante, Y, é homogêneo. Ele pode ser consumido ou investido. Segue-se que

$$Y = F(K, L), \tag{1}$$

em que $F : \mathbb{R}^2_+ \mapsto \mathbb{R}_+$. Onde $\mathbb{R}^2_+$ é o domínio e $\mathbb{R}_+$ é o contra-domínio de $F(\cdot)$. Os domínio dos pares K e L é o dos Reais positivos. A seta indica uma regra de "mapeamento" e $F(\cdot)$ representa a regra particular ou específica de mapeamento. No momento, a forma funcional exata dessa função não será especificada, mas isso será feito ao longo dessa nota de aula. Mais adiante será assumida a função denominada de "Cobb-Douglas". O valor de F para o qual um valor do par K e L é mapeado é a imagem. O conjunto de todas as imagens é denominado a imagem da **função** F, que é o conjunto de todos os valores que F pode assumir e é representada num espaço tridimensional. Sugiro como leitura complementar um livro de Matemática para Economistas, como o de Alpha Chiang, *Matemática para Economistas*, por exemplo. Adota-se o princípio até o final desse curso, como no próprio livro-texto de Chiang, de que "em geral não haverá peocupação em

[2] Você deve ter se perguntado sobre outros insumos de produção, os quais podem ser relativamente importantes. Para simplificação do modelo, tais insumos serão omitidos. Em Teoria Macro III, você estudará funções de produção mais complexas. Entretanto, você verá que a função Cobb-Douglas consegue reproduzir muitos fatos observados pelos economistas para uma série de países/períodos de tempo.

[3] Conjunto de "ferramentas": máquinas, prédios, computadores, calculadora etc. É um bem rival, com as características delineadas acima, produzido no passado por uma tecnologia de produção similar aquela que será aqui apresentada.

[4] Número de trabalhadores, o seu tempo de trabalho, suas habilidades saúde, força física. É também um insumo rival.

[5] Essa forma é conhecida como *labor augmenting* - aumentadora de trabalho - ou Harrod neutra (definição de Roy Harrod)

especificar o domínio de cada função em cada modelo".

2.4.1 Propriedades da Função de Produção

1. Retornos constantes de Escala:

$$F(\lambda K, \lambda AL) = \lambda F(K, AL), \tag{2}$$

$\forall \lambda \geq 0$. Implica ausência de ganhos de especialização.

2. Essencialidade:
A função (2) satisfaz $F(0, L) = 0$ e $F(K, 0) = 0$.

3. Retornos positivos e decrescentes dos insumos individuais:
$\frac{\partial F(\bullet)}{\partial K} = F_K(\bullet) > 0$ e $\frac{\partial F(\bullet)}{\partial L} = F_L > 0$; F_K é a taxa de variação de F para variações infinitesimais do capital, F_L possui uma interpretação análoga; "Lei dos Rendimentos Decrescentes": $F_{KK} < 0$ e $F_{LL} < 0$. F é continuamente diferenciável, estritamente crescente, homogênea de grau 1 e estritamente quase-côncava.

4. Condições Inada (1963):

$$\lim_{K \to \infty} F_K(\bullet) = \lim_{L \to \infty} F_L(\bullet) = 0,$$

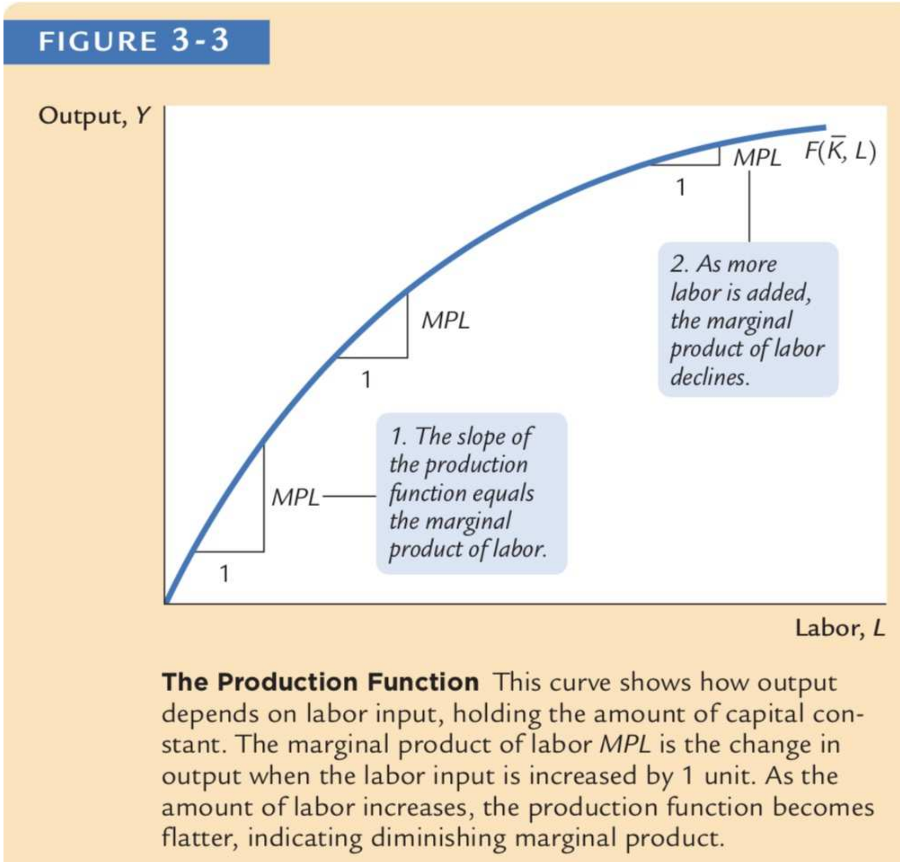
$$\lim_{K \to 0} F_K(\bullet) = \lim_{L \to 0} F_L(\bullet) = \infty.$$

2.5 Função de Produção de Cobb-Douglas

Proposto por Knut Wicksell; evidência encontrada por Paul Douglas e por Charles Cobb em 1928[6].

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}. \tag{3}$$

[6] Paul Howard Douglas: economista americano (Columbia University) encontrou evidência empírica favorável ao modelo neoclássico que o levou à formulação da função acima junto com o matemático Charles Douglas.



The Production Function This curve shows how output depends on labor input, holding the amount of capital constant. The marginal product of labor *MPL* is the change in output when the labor input is increased by 1 unit. As the amount of labor increases, the production function becomes flatter, indicating diminishing marginal product.

Figura 1: Função de Produção. Reprodução do livro-texto, Mankiw (2015).

Questão para os alunos: **Checar se as propriedades listadas acima são atendidas pela Cobb-Douglas**. Por exemplo, a de homogeneidade linear:

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}K^{\alpha}L^{1-\alpha}. \tag{4}$$

2.6 Firmas

1. **Hipótese de comportamento: maximizador**
2. Função objetivo: lucro
3. Variáveis de escolha: K e L.
4. Mercado competitivo: firma atomista (não influencia preços e salários de mercado, toma-os como predeterminados);
5. Propriedade do capital é das famílias que o alugam às firmas;

6. Variáveis exógenas: W (salário nominal do trabalhador), P (preço de mercado de Y) e R (custo de aluguel do capital);

2.7 Mercados de Fatores

Para a **firma** tem-se o seguinte problema:

$$\max_{K,L} \Pi(K,L) = PF(K,L) - RK - WL. \tag{5}$$

Resolvendo (5), tem-se as seguintes condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial \Pi(K,L)}{\partial K} = PF_K(\bullet) - R = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi(K,L)}{\partial L} = PF_L(\bullet) - W = 0,$$

Resolvendo-se as condições necessárias de primeira ordem acima, tem-se

$$PmgK \equiv F_K(\bullet) = R/P, \tag{6}$$

$$PmgL \equiv F_L(\bullet) = W/P. \tag{7}$$

Note que o produto marginal do capital, $F_K(\bullet)$, é igual ao custo real de aluguel do capital (R/P). Condição similar é obtida para o trabalho (L).

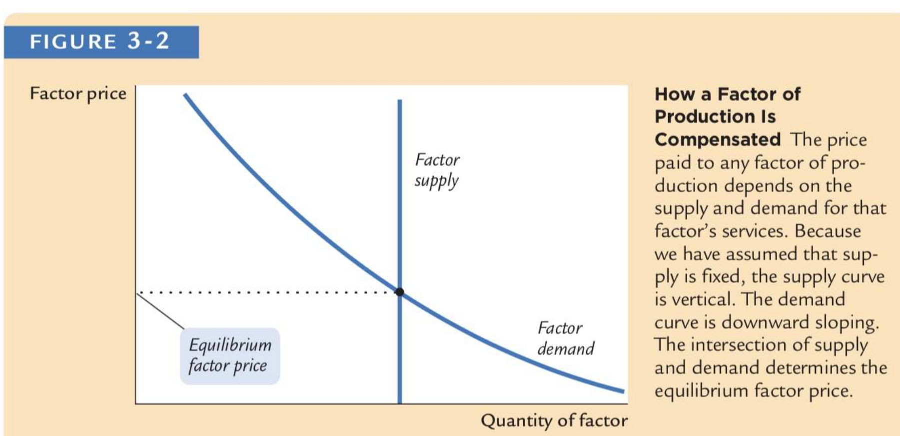


Figura 2: Equilíbrio no mercado de fatores. Reprodução do livro-texto, Mankiw (2015).

A condição (7) define, implicitamente, uma função demanda por mão de obra negativamente inclinada no plano cartesiano (L, W/P), com abcissa L e ordenada W/P. A razão é que quanto menor o salário real, maior será a quantidade de trabalho demandada, conforme mostrado na figura acima.

A inclinação negativa da demanda deve-se à $F_{LL} < 0$, sendo que é decrescente em módulo.

2.8 Divisão da Renda Nacional

Tendo analisado como a firma decide o quanto cada fator vai utilizar, pode-se explicar como a distribuição da renda total dessa economia é determinada peloo mercado de fatores. Viu-se da equação (5) que o lucro da firma é o que resta após os fatores de produção serem pagos. Pode-se rearranjar (5) de forma que:

$$Y = F(K, L) = (R/P) \times K + (W/P) \times L + \Pi, \tag{8}$$

Utilizando (6) e (7), tem-se que

$$Y = F(K, L) = PMgK \times K + PMgL \times L + \Pi. \tag{9}$$

Ou seja, a renda é dividida entre retorno do trabalho, retorno do capital e o lucro econômico.

Teorema 1 *Teorema de Euler. Se a função de produção tem retornos constantes de escala, o lucro econômico deve ser zero, de forma que:*

$$F(K, L) = PmgK \times K + PmgL \times L. \tag{10}$$

Demonstração 1 *Da hipótese de retornos constantes escreve-se* (2)*, assumindo-se $A = 1$.*

$$\lambda F(K, L) = F(\lambda K, \lambda L). \tag{11}$$

A derivada de (11) *em relação à λ é*

$$F(K, L) = F_1(\lambda K, \lambda L)K + F_2(\lambda K, \lambda L)L, \tag{12}$$

note que os subscritos 1 e 2 referem-se às derivadas parciais do primeiro e segundo argumentos da função, respectivamente (veja a nota de rodapé 2 do livro texto do Mankiw, página 41). Avaliando-se (12) *em* $z = 1$ *resulta em*

$$F(K, L) = PmgK \times K + PmgL \times L, \tag{13}$$

c.q.d.

2.9 Demanda

Assume-se uma economia fechada com governo

$$Y = C + I + G. \tag{14}$$

Das condições de primeira ordem, pode-se escrever

$$I = I\left(F_K(K, L) - \frac{R}{P}\right). \tag{15}$$

Como será demonstrado em Macro II, com taxa de depreciação igual a zero, pode-se escrever $\frac{R}{P} = r$, em que r é a taxa de juros real, portanto $I = I(F_K(K, L) - r)$. Dado que $K = \bar{K}$ e $L = \bar{L}$, tem-se que o produto marginal é constante, $F_K(\bar{K}, \bar{L})$. Assim, pode-se simplificar a função investimento para

$$I = I(r), \tag{16}$$

em que $I'(\cdot) = \frac{dI}{dr} < 0$. Adicionalmente, assume

$$C = C(Y - T) \tag{17}$$

em que $\frac{\partial C(\cdot)}{\partial Y} = c$ e $0 < c < 1$;

Política Fiscal Assume-se que T são os impostos menos as transferências e G os gastos de consumo do governo. Ambos são *lump sum*. Assume-se que não há investimento do governo e que a política fiscal é exógena

$$G = \bar{G}, \tag{18}$$

$$I_G = \bar{I_G} = 0. \tag{19}$$

2.10 Equilíbrio do Modelo

O sistema de equações pode então ser escrito:

$$Y = C + I + G,$$

$$C = C(Y - T),$$

$$I = I(r),$$

e com as restrições de política fiscal e da oferta de fatores, tem-se, respectivamente: $T = \bar{T}$, $G = \bar{G}$ e $K = \bar{K}$, $L = \bar{L}$. As restrições de oferta implicam que $Y = F(\bar{K}, \bar{L}) = \bar{Y}$ e, portanto,

$$\underbrace{\bar{Y} - \bar{T} - C(\bar{Y} - \bar{T})}_{\text{poupança privada}} + \underbrace{\bar{T} - \bar{G}}_{\text{poupança pública}} = I(r), \tag{20}$$

ou

$$\bar{S} = I(r). \tag{21}$$

Note que os fundos emprestáveis (reais) determinarão a taxa de juros real.

3 Referências

Mankiw, N.G. (2015), *Macroeconomia*, 8ª ed. Rio de Janeiro, LTC.