Questão 4) O método de Runge-Kutta de quarta ordem, para solução aproximada de uma equação diferencial

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \qquad x(t_0) = x_0$$

é dado por:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Onde x_i aproxima a solução no instante $t_i = t_0 + hi$, onde:

$k_1 = f(t_i, x_i)$	$k_2 = f(t_i + 0{,}5h, x_i + 0{,}5hk_1)$
$k_3 = f(t_i + 0{,}5h, x_i + 0{,}5hk_2)$	$k_4 = f(t_i + h, x_i + hk_3)$

Determine qual a aproximação que se obtém para o valor de $x(1)$ ao se utilizar este método para resolver $x'(t) = x(t)$, $x(0) = 1$ com um espaçamento $h = {}^{1}/_{n}$, com n qualquer. Avalie numericamente qual o valor obtido com $n = 1$, $n = 2$ e $n = 4$ e compare com o valor da solução exata da equação diferencial.

Resolução:

1) <u>Solução exata:</u>

Passando para o domínio de Laplace:

$$sX(s) - x(0) = X(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{s-1}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = e^t$$

Solução exata = $x(1) = e \approx 2{,}718282$

2) <u>Método de Runge-Kutta</u>

Dado no enunciado: $t_0 = 0$ e $x_0 = 1$.

2.1) Resolução Lenta:

Para $n = 1, h = 1, i = 0$:

$k_1 = 1$	$k_2 = 1 + 0{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$
$k_3 = 1 + 0{,}5 \cdot 1{,}5 = 1{,}75$	$k_4 = 1 + 1{,}75 = 2{,}75$

$$x_1 = x(1) = 1 + \frac{1}{6}(1 + 2 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1{,}75 + 2{,}75) \approx 2{,}708333$$

Para $n = 2$ e $n = 4$ é preferível utilizar o método recursivo por ser muito mais rápido.

2.2) Resolução Recursiva:

$x_i = x(i \cdot h)$

Como $f\big(t, x(t)\big) = x'(t) = x(t)$:

$k_1 = x_i$	$k_2 = x_i(1 + {}^{h}/_{2})$
$k_3 = x_i(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4})$	$k_4 = x_i(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4})$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(x_i + 2x_i\left(1 + \frac{h}{2}\right) + 2x_i\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right) + x_i\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right))$$

$$x_{\mathrm{i+1}} = x_{\mathrm{i}}(\frac{h^4}{24} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^2}{2} + h + 1)$$

Tornando-a recursiva:

$$x((i + j)h) = x_{\mathrm{i+j}} = x_i(\frac{h^4}{24} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^2}{2} + h + 1)^j$$

Iniciando em $i = 0$, tomando $j = n$, e como $h = 1/n$:

$$x(1) = x_{\mathrm{n}} = x_0(\frac{1}{24n^4} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} + 1)^n$$

$$n = 2 \Rightarrow x(1) \approx 2{,}717346$$

$$n = 4 \Rightarrow x(1) \approx 2{,}718210$$

Comparação dos resultados, com 6 algarismos decimais:

n	$x(1)$	$\lvert Erro \rvert$
$n = 1$	2,708333	$9{,}948 \cdot 10^{-3}$
$n = 2$	2,717346	$9{,}356 \cdot 10^{-4}$
$n = 4$	2,718210	$7{,}190 \cdot 10^{-5}$
Solução Exata	2,718282	0

Pode-se notar que o erro diminui exponencialmente conforme se diminui o espaçamento.