Lista EDOs, exercício 2.

- 1) Use o método de Euler com passo $h = 0{,}5$ para calcular uma aproximação de $y(1)$ onde $y(t)$ é solução da EDO:

$$(PVI): \begin{cases} y''(t) + t y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 4 \qquad y'(0) = 2 \end{cases}$$

2) Use o método de Euler modificado com passo $h = 0{,}5$ para calcular uma aproximação de $y(1)$

Resposta:

1) Primeiro vamos transformar o (PVI) de segunda ordem em um (SPVI) de primeira ordem. Definimos

$$\begin{cases} u_1(t) = y(t) \\ u_2(t) = y'(t) \end{cases} \quad e \quad u(t) = (u_1(t), u_2(t))$$

Então

$$\begin{cases} u_1'(t) = y'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = y''(t) = -ty'(t) - 2y(t) = -tu_2(t) - 2u_1(t) \end{cases}$$

Então temos

$$\begin{cases} u_1'(t) = f_1(t, u_1(t), u_2(t)) = u_2(t) \\ u_2'(t) = f_2(t, u_1(t), u_2(t)) = -tu_2(t) - 2u_1(t) \end{cases}$$

Usando a notação vetorial, podemos escrever o (SPVI) como:

$$(SPVI)\ \begin{cases} u' = f(t,u), & t \geq 0 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

com $f(t,u) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -tu_2 - 2u_1 \end{pmatrix}$ e $\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Observe que f é uma função vetorial!

- Agora vamos aplicar o método de Euler. Queremos obter uma aproximação de $y(1)$, com passo $h = 0,5$. Então precisamos calcular dois passos w_1 e w_2 do método de Euler e teremos $u(1) \simeq w_2$, onde $u(1) = \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix}$ então $y(1) \simeq w_{1,2}$, onde $w_2 = \begin{pmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \end{pmatrix}$, e w_i é a aproximação de u usando o método de Euler com passo $h = 0,5$.

- Euler: $\begin{cases} w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i) \\ w_0 = \alpha \end{cases}$

Aqui w_i é um vetor!

Notação: $w_i = \begin{pmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \end{pmatrix}$

Vamos calcular a primeira iteração usando Euler:

$$w_1 = w_0 + h f(t_0, w_0)$$

$$= \alpha + h \begin{pmatrix} w_{2,0} \\ -t_0 w_{2,0} - 2 w_{1,0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \cdot 4 \end{pmatrix} \quad (\text{pois } t_0 = 0)$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vamos calcular a segunda iteração usando Euler:

$$w_2 = w_1 + h f(t_1, w_1)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_{2,1} \\ -t_1 w_{2,1} - 2 w_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2}(-2) - 2 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ -2 + \frac{1}{2} - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

então $\boxed{y(1) \simeq w_{1,2} = 4}$

2) Agora vamos aplicar o método de Euler modificado:

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right) \\ w_0 = \alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Vamos calcular a primeira iteração: $w_0 = \begin{pmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$w_1 = w_0 + h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{h}{2} f(t_0, w_0)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left[w_{2,0} + \frac{h}{2} f_2(t_0, w_0)\right] \\ \left[-\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\left(w_{2,0} + \frac{h}{2} f_2(t_0, w_0)\right) - 2\left(w_{1,0} + \frac{h}{2} f_1(t_0, w_0)\right)\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \underbrace{2 + \frac{1}{4}\left(-0 \cdot w_{2,0} - 2 w_{1,0}\right)}_{=0} \\ -\frac{1}{4}\Big(\underbrace{2 + \frac{1}{4}\left(-0 \cdot w_{2,0} - 2 w_{1,0}\right)}_{=0}\Big) - 2\left(4 + \frac{1}{4} w_{2,0}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2,5 \end{pmatrix}}$$ Primeira iteração

Vamos calcular a segunda iteração: $w_1 = \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2,5 \end{pmatrix}$ 5

$$w_2 = w_1 + h f\left(t_1 + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{h}{2} f(t_1, w_1)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_{2,1} + \frac{h}{2} f_2(t_1, w_1) \\ -(t_1 + \frac{h}{2})(w_{2,1} + \frac{h}{2} f_2(t_1, w_1)) - 2(w_{1,1} + \frac{h}{2} f_1(t_1, w_1)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2,5 + \frac{1}{4}(-t_1 w_{2,1} - 2 w_{1,1}) \\ -(t_1 + \frac{h}{2})(w_{2,1} + \frac{h}{2} f_2(t_1, w_1)) - 2(w_{1,1} + \frac{1}{4}(w_{2,1}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \underbrace{-2,5 + \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}(-2,5) - 8)}_{= -4,1875} \\ -\frac{3}{4}(-4,1875) - 2(4 - \frac{2,5}{4}) \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1,90625 \\ -4,3046875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \end{pmatrix}$$

Conclusão: a aproximação de $y(1)$ usando o método de Euler modificado com $h = 0,5$ é $w_{1,2} = 1,90625$