2020-1, "STATPHYS", AULA 21

OBJETIVO: APRESENTAR OS RUDIMENTOS DO CÁLCULO ESTOCÁSTICO DE ITÔ.

ONDE ESTAMOS: 2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS, 2.5 PROCESSOS DE DIFUSÃO

* CÁLCULO DE ITÔ

• MOTIVAÇÃO

→ NA AULA 17, A PARTIR DA p. 17-5, DISCUTIMOS O PROCESSO DE WIENER $W(t)$ COMO UMA CONSTRUÇÃO BASEADA NOS AXIOMAS

(i) SE $s < t$, $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$,

(ii) $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$,

$$\operatorname{cov}\left[W(t_2) - W(t_1), W(t_4) - W(t_3)\right] = 0$$

E

(iii) $\mathbb{P}(W(0) = 0) = 1$.

→ ESSA CONSTRUÇÃO FOI MOTIVADA PELA RECORRÊNCIA

$$W(t_k) = W(t_j) + \sqrt{\Delta t} \sum_{i=j}^{k-1} \xi(t_i) \, ,$$

ONDE $\xi(t_i) \sim N(0,1)$ E

$$\mathrm{cov}\left[W(t_i), W(t_j)\right] = 0 \quad \text{SE } i \neq j .$$

REPRESENTAMOS SIMBOLICAMENTE ESSE COMPORTAMENTO COMO

$$\boxed{dW = \sqrt{dt}\, \xi(t)} \, ,$$

DE MODO QUE A "DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA" É TAL QUE

$$\boxed{dW \sim N(0, dt)}$$

E SUA "INTEGRAL ESTOCÁSTICA",

$$\int_0^t dW = W(t) - W(0) = W(t) \sim N(0,t).$$

→ PARA OS MATEMÁTICOS, O PROCESSO DE WIENER $\boxed{\text{É}}$ O MOVIMENTO BROWNIANO!!!

→ HÁ UMA ELABORADA TEORIA DE INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA:

- LAWRENCE C. EVANS, "AN INTRODUCTION TO STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS", AMS, 2013.
- BERNT ØKSENDAL, "STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS - AN INTRODUCTION WITH APPLICATIONS, 6TH, 2003. → SPRINGER
- UWE HASSLER, "STOCHASTIC PROCESSES AND CALCULUS", SPRINGER, 2016.
- HENRY C. TUCKWELL, "ELEMENTARY APPLICATIONS OF PROBABILITY THEORY", 2ND, CHAPMAN & HALL, 1995.

→ SEREMOS "HEURÍSTICOS" E "OPERACIONAIS": ESCREVEREMOS

$$\boxed{dX = a(X,t)\,dt + b(X,t)\,dW}$$

PARA REPRESENTAR

$$\boxed{X(t) = X(0) + \int_0^t a(X,s)\,ds + \int_0^t b(X,s)\,dW(s)}.$$

NÃO ATACAREMOS O CASO GERAL.

• CASOS SIMPLES DE RUÍDO ADITIVO

PORÉM, ENTRE OS CASOS PARTICULARES QUE VEREMOS, JÁ HAVERÁ NECESSIDADE DE REGRAS ESPECIAIS PARA DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS. $X(0)=0$

(i) $a(X,t)\equiv 0\,,\quad b(X,t)\equiv 1$

PROCESSO DE WIENER OU MOVIMENTO BROWNIANO PADRÃO : $X(t)=\int_0^t dW(s)=W(t)$

(ii) $a(X,t)\equiv 0\,,\quad b(X,t)=\sigma$ (CTE POSITIVA)

$$X(t)=\int_0^t \sigma\, dW(s)=\sigma W(t)$$

$$X(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$$

(iii) $a(X,t)\equiv 0\,,\quad b(X,t)\rightarrow g(t)$

$$X(t)=\sqrt{\int_0^t g^2(s)\,ds}\;\cdot\;\underbrace{\xi(t)}_{\sim N(0,1)}$$

OU

$$X(t)\sim N\left(0,\int_0^t g^2(s)\,ds\right)$$

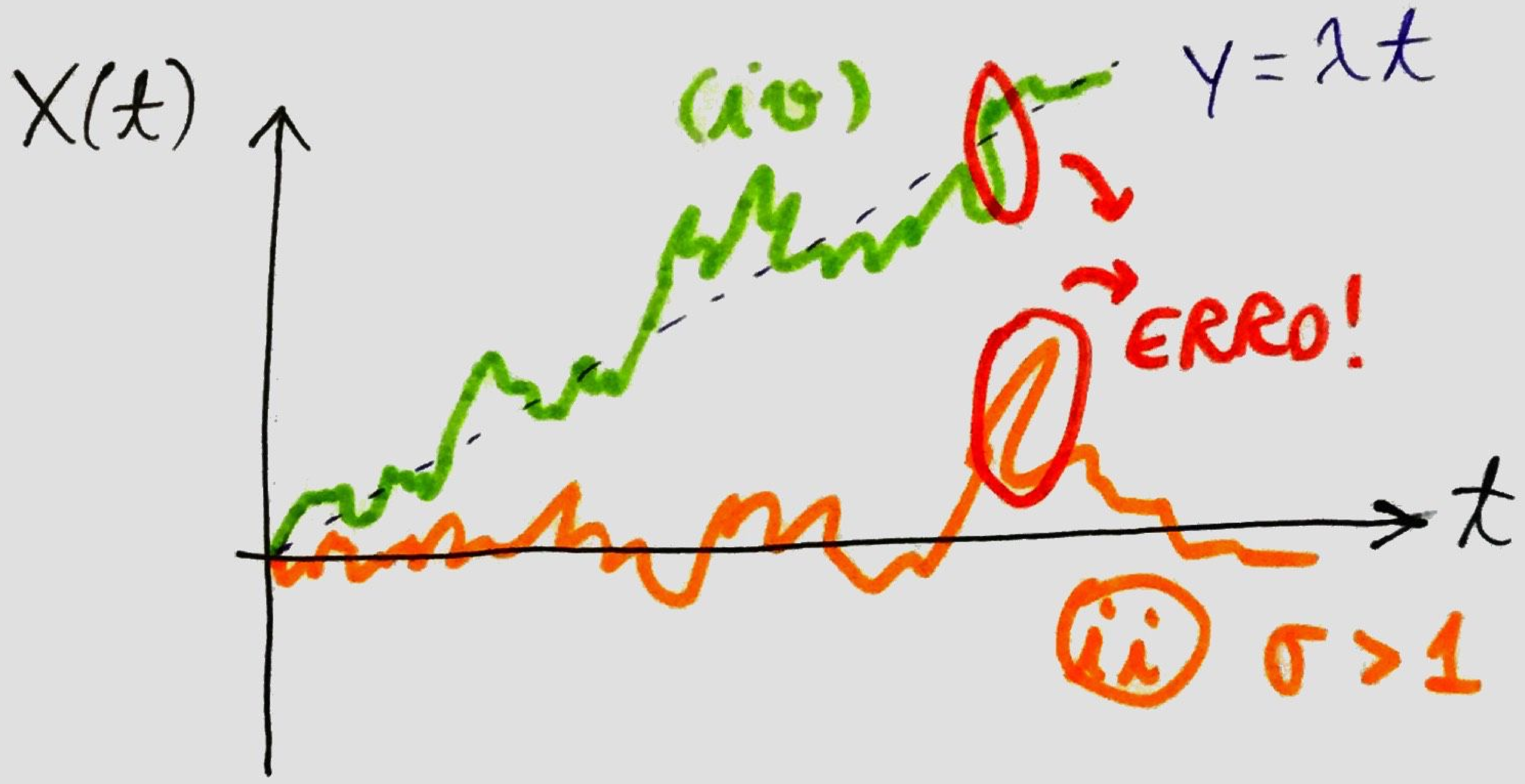
QUANDO b REALMENTE DEPENDE DE X E t, TEMOS O DIFÍCIL CASO DO RUÍDO MULTIPLICATIVO. DISCUTIREMOS UM

ÚNICO CASO PARTICULAR NESSAS CONDIÇÕES, APÓS OS CASOS DE RUÍDO ADITIVO, $a(X,t)$, $b(X,t) \to g(t)$.

(iv) $a(X,t) \equiv \lambda$ (CTE), $b(X,t) \equiv 1$

$$dX = \lambda dt + dW \quad (*)$$

INTEGRAÇÃO DIRETA: $X(t) = X(0) + \lambda t + W(t)$



FORMALMENTE: DETERMINÍSTICO

$$X_D(t) = X_D(0) + \lambda t$$

$\downarrow$ MUDANÇA DE VARIÁVEL

$$X(t) = Y(t) + \lambda t$$

$$Y(t) \equiv X(t) - \lambda t$$

$$\Downarrow$$

$$dY = dX - \lambda dt \overset{*}{=} dW$$

$$Y(t) = Y(0) + W(t)$$

$$X(t) = \lambda t + W(t) + X(0)$$

(v) $dX = f(t)\,dt + dW$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s)\,ds + W(t)$$

(vi) $dX = \lambda . X(t)\,dt + \sigma\,dW$ (**)

DETERMINÍSTICO: $dX_D = \lambda X_D\,dt \Rightarrow X_D(t) = X_D(0)e^{\lambda t}$

$$X(t) = Y(t)e^{\lambda t} \Rightarrow Y(t) = e^{-\lambda t}X(t)$$

$$\Rightarrow dY = e^{-\lambda t}(-\lambda X\,dt + dX)$$

** $\rightarrow$ $dY = e^{-\lambda t}\sigma\,dW \overset{iii}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \quad Y(t) = \sqrt{\int_0^t \sigma^2 e^{-2\lambda s}\,ds}\;.\;\xi(t) + Y(0)$$

$$\therefore\; X(t) = \underbrace{X(0)}_{=\,Y(0)}.e^{\lambda t} + e^{\lambda t}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right)}\;.\;\xi(t)$$

PORTANTO, $X(t)$ É UMA NORMAL DE MÉDIA $X(0).e^{\lambda t}$ E VARIÂNCIA $\frac{\sigma^2}{2\lambda}(e^{2\lambda t} - 1)$.

SE $X(t) \rightarrow v(t)$, $\lambda \rightarrow -\gamma$, $\sigma^2 \rightarrow \Gamma$, TEMOS A EQ. DE LANGEVIN, QUE É "O MOVIMENTO BROWNIANO" PARA OS FÍSICOS!!!

REALMENTE, $\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \xi(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow dv = -\gamma v\, dt + \xi(t)\, dt = -\gamma v\, dt + \sqrt{\frac{\Gamma}{dt}}\, \xi\, dt$$

$$= -\gamma v\, dt + \sqrt{\Gamma}\sqrt{dt}\,.\,\xi(t)$$

$$= -\gamma v\, dt + \sqrt{\Gamma}\,.\,dW.$$

PARA OS MATEMÁTICOS, ESSE É O PROCESSO DE ORNSTEIN-UHLENBECK. O RUÍDO BRANCO É, ESSENCIALMENTE (A MENOS DE UMA ESCALA ARBITRÁRIA $\sqrt{\Gamma}$),

$$\xi(t) = \frac{dW}{dt},$$

O QUE NÃO TEM SENTIDO MATEMÁTICO ISOLADAMENTE (NEM MESMO dW SOZINHO FAZ SENTIDO...).

- A FÓRMULA DE ITÔ

→ OS CASOS SIMPLES (iv), (v) E (vi) QUE ACABAMOS DE ESTUDAR LEVARAM, SOB MUDANÇAS DE VARIÁVEIS $Y = f(X,t)$, A EQUAÇÕES DO TIPO $dY = g(t)\, dW$.

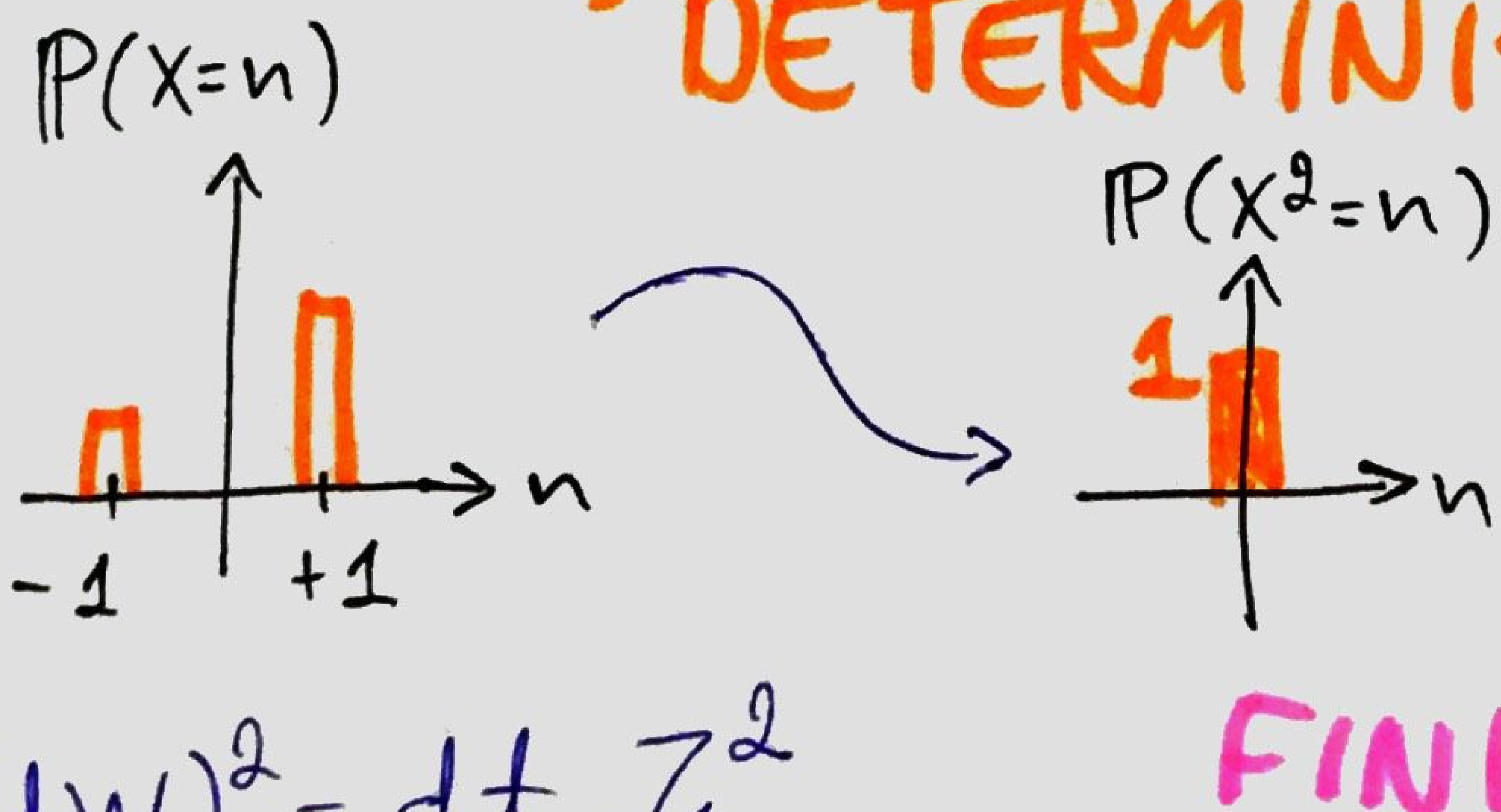
ISSO É ENGANADOR E RESTRITIVO. EM GERAL, SE $\boxed{dX = a(X,t)\,dt + b(X,t)\,dW}$,

VALE A FÓRMULA DE ITÔ,

$$\boxed{dY = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \boxed{\frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \right) dt + b \frac{\partial f}{\partial x}\, dW},$$

QUANDO OS PROCESSOS DE DIFUSÃO X E Y SÃO RELACIONADOS POR $y = f(x,t)$, $\boxed{Y = f(X,t)}$. A PRESENÇA SURPREENDENTE DO TERMO DE 2ª ORDEM DECORRE DA IDENTIDADE

$$\boxed{(\underbrace{dW}_{\text{ESTOCÁSTICO}})^2 = \underbrace{dt}_{\text{DETERMINÍSTICO}}}.$$



$dW = \sqrt{dt}\,\xi \Rightarrow (dW)^2 = dt \cdot \xi^2$

"DE CARA", $(dW)^2$ É "DETERMINÍSTICA" (INFINITESIMALMENTE): $\mathbb{V}[(dW)^2] = (dt)^2\, \mathbb{V}(\xi^2)$.

FINITA!

BASTA MOSTRARMOS QUE A MÉDIA DE ξ^2 É 1, POIS $\langle (dW)^2 \rangle = \langle dt . \xi^2 \rangle$

$$= dt . \langle \xi^2 \rangle ,$$

MAS O QUADRADO DE UMA NORMAL PADRÃO É UMA V.A. FAMOSA, A "CHI-QUADRADO", χ^2.

$$\langle \xi^2 \rangle = \int dx . x \, \rho_{\xi^2}(x)$$

$$= \int dx . x . \left[\int dz \, \rho_\xi(z) . \delta(x - z^2) \right]$$

$$= \int dz \, \underbrace{\rho_\xi(z)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}} \underbrace{\left[\int dx . x . \delta(x - z^2) \right]}_{= z^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int z^2 e^{-z^2/2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1) \left\{ \frac{d}{d\alpha} \left[\int dz \, e^{-\alpha z^2} \right] \right\}_{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1) \left\{ \frac{d}{d\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right\}_{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1) \sqrt{\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{-3/2} = 1$$

DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DE ITÔ:

A FÓRMULA DE ITÔ É A "EXPANSÃO DE TAYLOR" PARA FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS!!!

$$Y + dY = f(X + dX, t + dt)$$

V.A.'s

$$X(t+dt) = X(t) + dX$$

$$y(t) = f(x(t), t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt}$$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + ERRO$$

$\Downarrow$

EM (X, t)

$$dY = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} (a\,dt + b\,dW) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (b\,dW)^2 + ERRO'$$

$$\therefore dY = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \overbrace{b \frac{\partial f}{\partial x} dW}$$

EM (X, t)

21-10

◇ EXEMPLO: MOVIMENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW$$

$d(\log S) = ?$ $\boxed{d(\log S) \neq \frac{dS}{S}}$!!!

$\boxed{Y = \log S}$

$$d(\log S) = \left(\mu S \frac{1}{S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left(-\frac{1}{S^2}\right)\right)dt + $$

$$+ \sigma S \frac{1}{S}\,dW$$

$$= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\,dW,$$

ENQUANTO $\frac{dS}{S} = \mu\,dt + \sigma\,dW$.

SE $\nu \equiv \mu - \frac{\sigma^2}{2}$, $\boxed{d(\log S) = \nu\,dt + \sigma\,dW}$,

STOCK PRICE MODEL

E MODELAMOS INCREMENTOS NORMAIS P/ O LOGARITMO DO PREÇO DE UMA AÇÃO, QUE OBEDECERÁ UMA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL.