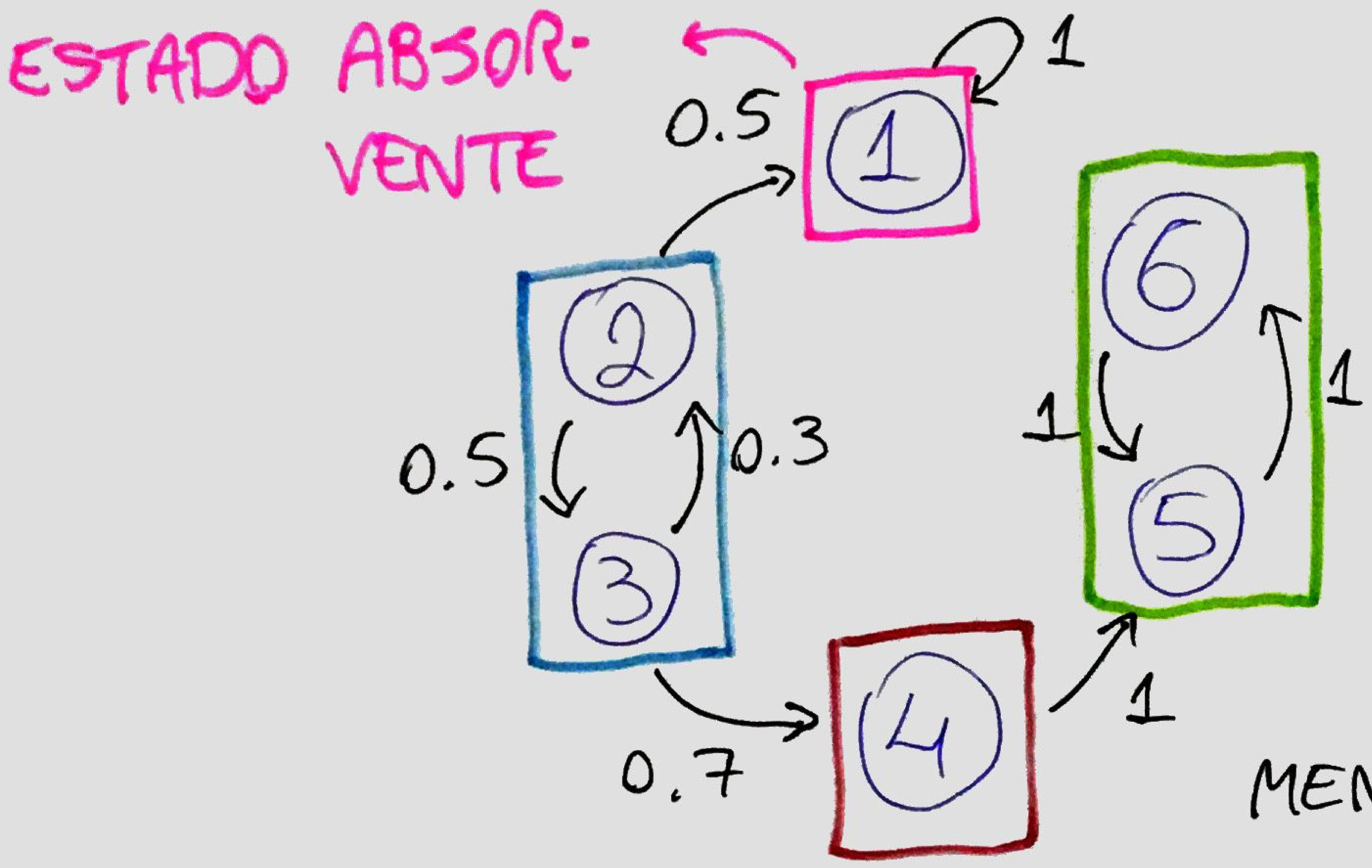
2020-1, "STATPHYS", AULA 10

OBJETIVOS: DISCUTIR ELEMENTOS CENTRAIS DA TEORIA DE CADEIAS DE MARKOV DE TEMPO DISCRETO (CMTD)

ONDE ESTAMOS: 2.2 CMTD's

* DIAGRAMA DE ESTADOS



$S = C_1 \cup C_{23} \cup C_4 \cup C_{56}$

4 CLASSES DE COMUNICAÇÃO

2 E 3 SÃO MUTUAMENTE ACESSÍVEIS. 5 E 6 TAMBÉM.

- GRAFO DIRIGIDO CONEXO
- MATRIZ ESTOCÁSTICA: $T_{ij} \geq 0$, $\sum_{i \in S} T_{ij} = 1$ $\forall j \in S$

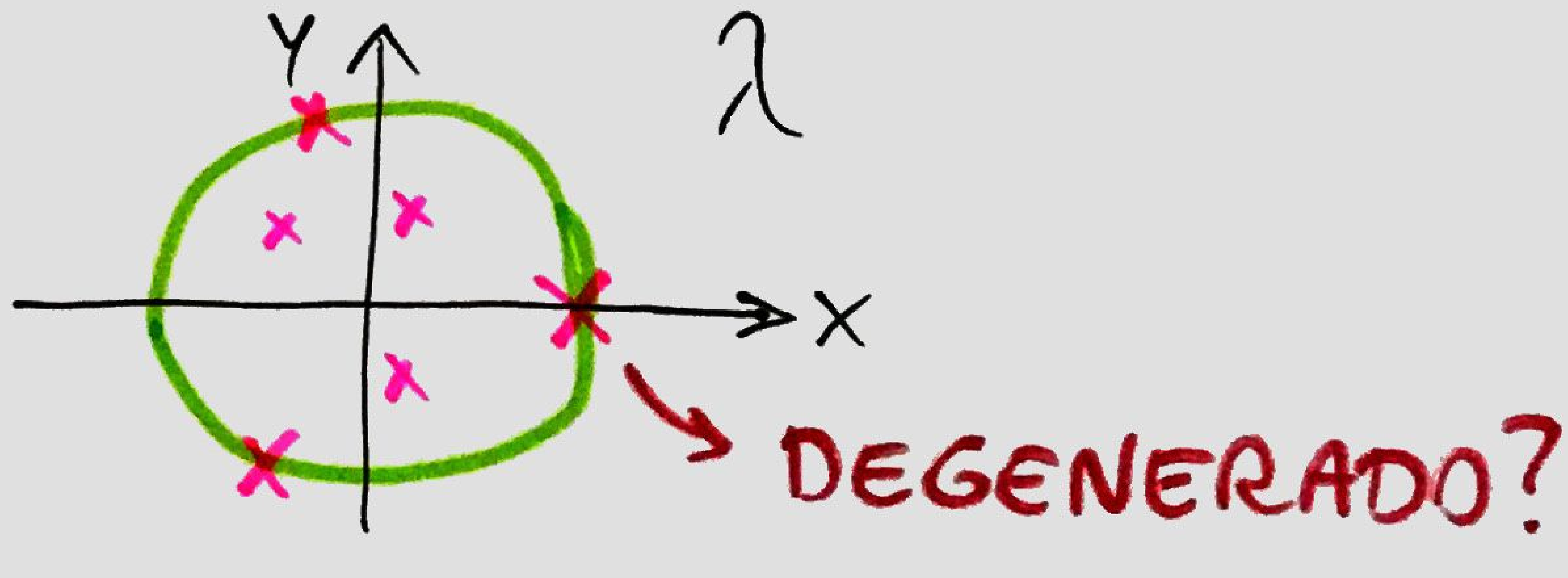
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ UMA MATRIZ ESTOCÁSTICA T É <u>IRREDUTÍVEL</u> SE $\forall (i,j) \in S \times S$ EXISTE $k = k(i,j)$ TAL QUE $(T^k)_{ij} > 0$, OU SEJA, SE HÁ APENAS UMA CLASSE DE COMUNICAÇÃO.

NOTE QUE $(T^k)_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+k} = i \mid X_n = j)$.

→ SEJA $\Lambda_T = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ O <u>ESPECTRO</u> DA MATRIZ T, $T|x\rangle = \lambda |x\rangle$, ORDENADO POR $|\lambda_{i+1}| \leq |\lambda_i|$.

→ SE T FOR ESTOCÁSTICA, $\boxed{\lambda_1 = 1}$, E AS COMPONENTES DO AUTOVETOR CORRESPONDENTE SÃO NÃO NEGATIVAS.



RELEVÂNCIA? $|\pi(t)\rangle = T|\pi(t-1)\rangle$

$\hookrightarrow 1 \cdot |\pi^*\rangle = T|\pi^*\rangle$

$|||$

$|\pi(\infty)\rangle$

<u>EXISTE</u> ESTADO ESTACIONÁRIO.

→ SE T FOR ESTOCÁSTICA <u>E</u> IRREDUTÍVEL, $\lambda = 1$ É NÃO DEGENERADO E SÃO ESTRITAMENTE POSITIVAS AS COMPONENTES DO AUTOVETOR CORRESPONDENTE. A <u>SOLUÇÃO</u> <u>ESTACIONÁRIA</u> <u>É</u> <u>ÚNICA</u>, EMBORA TALVEZ NÃO "ALCANÇÁVEL" A PARTIR DE QUALQUER $|\pi(0)\rangle$ – AINDA PODE HAVER $|\lambda_i| = 1$ COM $i \neq 1$ E $\mathrm{Im}(\lambda_i) \neq 0$, COMO EM MATRIZES CÍCLICAS.

→ T SERÁ <u>REGULAR</u> SE FOR ESTOCÁSTICA, IRREDUTÍVEL E APERIÓDICA:

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \;/\; (T^k)_{ij} > 0 \quad \forall (i,j) \in S \times S.$$

→ PARA T REGULAR C/ ESPECTRO NÃO DEGENERADO, CONSTRUIREMOS UMA DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL DE T. ALÉM DISSO, $|\lambda_i| < 1$ SE $i \neq 1$.

TEORIA DE PERRON-FROBENIUS

T NÃO É SIMÉTRICA, MESMO SE FOR REGULAR.

$$T|\psi_i\rangle = \lambda_i |\psi_i\rangle \qquad \langle\phi_i| \neq |\psi_i\rangle^T$$

$$\langle\phi_i| T = \overset{''}{\lambda_i} \langle\phi_i|$$

$$\boxed{i \neq j \Rightarrow \langle\phi_i|\psi_j\rangle = 0}$$ POIS

$$\begin{cases} \langle\phi_i|T|\psi_j\rangle = \lambda_j \langle\phi_i|\psi_j\rangle \\ \langle\phi_i|T|\psi_j\rangle = \lambda_i \langle\phi_i|\psi_j\rangle \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)\langle\phi_i|\psi_j\rangle = 0 .$$

ESCOLHA: $\boxed{\langle\phi_i|\psi_i\rangle = 1}$

$$\boxed{\langle\phi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}}$$

COMPLETEZA: $\{|\psi_i\rangle\}$ BASE

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j |\psi_j\rangle \Rightarrow \alpha_j = \langle\phi_i|x\rangle$$

$$|x\rangle = \sum_j \langle\phi_j|x\rangle |\psi_j\rangle = \left(\sum_j |\psi_j\rangle\langle\phi_j|\right)|x\rangle$$

$$\therefore \boxed{I = \sum_j |\psi_j\rangle\langle\phi_j|} = \sum_j P_j$$ PROJETOR

$$T = T.I = T \sum_j |\psi_j\rangle\langle\phi_j|$$

$$= \sum_j (T|\psi_j\rangle)\langle\phi_j|$$

$$= \sum_j \lambda_j |\psi_j\rangle\langle\phi_j|$$

$$T^2 = T.T = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j |\psi_i\rangle \underbrace{\langle\phi_i|\psi_j\rangle}_{\delta_{ij}} \langle\phi_j|$$

$$= \sum_j \lambda_j^2 |\psi_j\rangle\langle\phi_j|$$

$$T^t = \sum_j \lambda_j^t |\psi_j\rangle\langle\phi_j|$$

$$= |\psi_1\rangle\langle\phi_1| + \sum_{j \neq 1} \lambda_j^t |\psi_j\rangle\langle\phi_j|$$

↳ REGULAR, TENDE A ZERO

EXERCÍCIO: DETERMINE $|\pi(t)\rangle$ PARA $|\pi(0)\rangle$ QUALQUER E $T = \begin{pmatrix} 1-b & q \\ b & 1-q \end{pmatrix}$