

*Instituto de Física*  
*USP*

*Física V - Aula 7*

*Professora: Mazé Bechara*

# Aula 07 – Movimentos na atmosfera e nos constituintes dos sólidos.

1. A distribuição espacial dos gases da atmosfera: (a) desprezando a força da gravidade; (b) considerando a força da gravidade constante.
2. Medidas experimentais dos módulos de velocidade – a validação experimental direta da distribuição.
3. Um sistema de  $N$  constituintes em movimento MHS unidimensional.
  - i. A distribuição de **energia (Atenção cuidado!) de um sistema MHS unidimensional;**
  - ii. O valor média da energia e o  $c_v$ .
  - iii. O valor média da energia e o  $c_v$  supondo MHS-tridimensional - modelo de sólidos.
4. Distribuição de energias de MHS **supondo** energias quantizadas:  $\varepsilon = n\varepsilon_0$  com  $n=0,1,2,3..$  (proposta de Planck – ***nunca antes observada na Física!***);
  - i. O valor média da energia nos movimentos uni e tridimensionais ;
  - ii. Calor específico molar a volume constante (variável “a baixas” temperaturas).

# Aplicação

Na atmosfera terrestre há moléculas de  $\text{H}_2$  (poucas),  $\text{O}_2$ ,  $\text{He}$ ,  $\text{N}_2$ , entre outras.

a) Determine, a partir da distribuição de Boltzmann, **a distribuição espacial normalizada** desprezando o efeito da gravidade.

b) Idem **considerando a gravidade da Terra constante**, ou seja, para uma distância  $h$  em relação à superfície da Terra. Discuta as condições para esta ser uma boa aproximação da realidade.

c) Determine o valor mais provável e o valor médio da altura  $h$  em relação à superfície levando em conta a gravidade. Faça o cálculo numérico do valor médio da distância à superfície da Terra para algum gás da atmosfera. Comente a limitação dos resultados, se houver

d) Determine a **o valor médio da energia potencial gravitacional** das moléculas da atmosfera. **Compare com o resultado da equipartição de energia e comente.**

e) Como é a **distribuição espacial das moléculas nesta sala de aula?**

f) As distribuições de módulo de velocidade são as mesmas ou diferentes para os diversos gases da atmosfera **quando se considera a gravidade? E a distribuição de energia cinética? E a distribuição de energia?** Justifique.

# Distribuição espacial normalizada: moléculas na temperatura $T$ e gravidade constante - **FAÇA!**

- **Resultado:**

$$f(h) = \frac{dN(h)}{Ndh} = \frac{mg}{kT[1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}]} e^{-\frac{mgh}{kT}} \cong \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

- $0 \leq h \leq H$

- A última expressão é aproximadamente válida para  $mgH \gg kT$ .

- **Determinação direta da constante  $k$  de Boltzmann. Como  $R$  pode ser determinada independentemente em outro experimento, esta é uma determinação direta de  $N_0$**

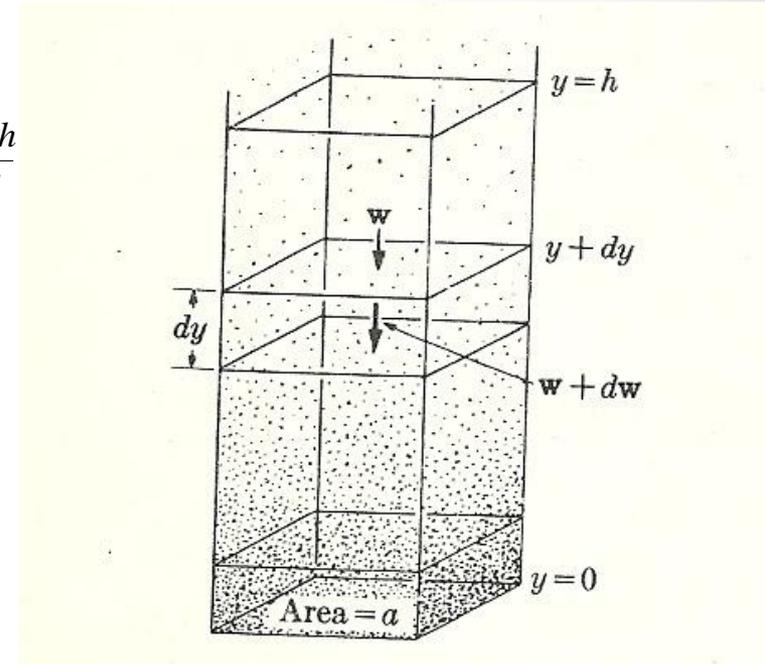


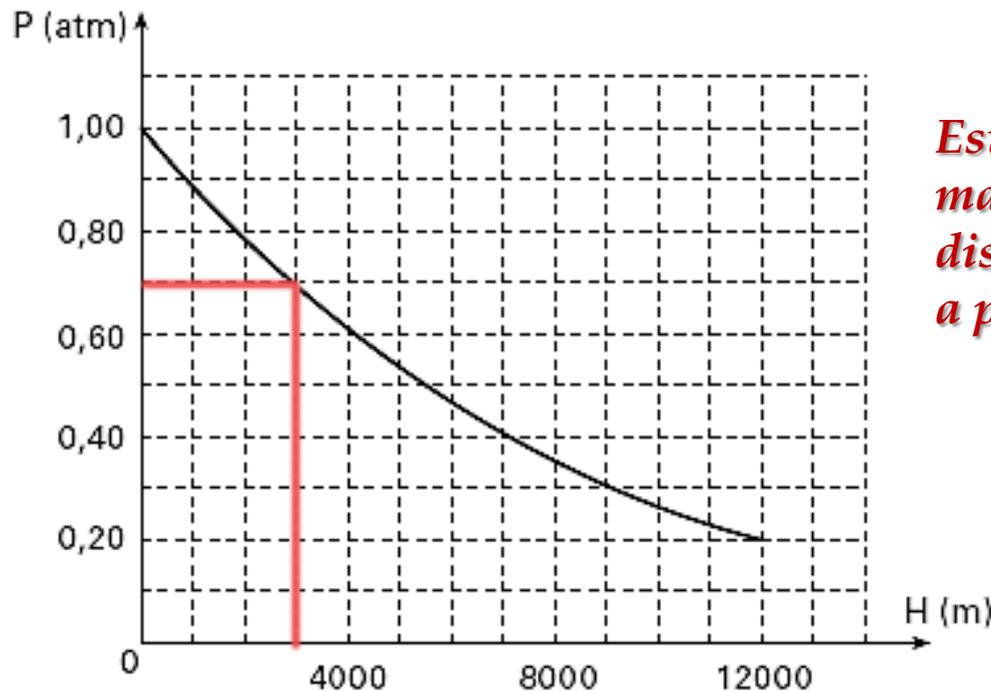
Figura do Enge, Wehr, Richards.

# *Estimativas de grandezas relevantes: $H \rightarrow \infty$ e gravidade constante*

- **Valores numéricos das aproximações:** (quando  $mgH \gg kT$  e  $H \ll R_T$ ).
- Na temperatura ambiente (300K):  $kT = 4,0 \times 10^{-21} \text{ J}$
- **Na atmosfera Terrestre:**
- **as moléculas tem  $2Zm_H$  de massa:**  $Zm(H_2)g = Z \times 2 \times 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}^2 = Z \times 3,4 \times 10^{-26} \text{ J}$
- $\Rightarrow mg/kT \sim 5 \times 10^4$  **para moléculas  $O_2$  e  $N_2$ .**
- Assim, a altura máxima  $H \sim 10^5 \text{ m}$  **observa os dois limites:**  $mgH \gg kT$  ( $H \rightarrow \infty$ ) e  $H \ll R_T = 6 \times 10^6 \text{ m}$ , que é a condição para gravidade constante.
- **No experimento de Perrin:**
- **Com massas muito maiores é fácil atingir o limite  $mgH \gg kT$  para  $H$  da ordem de centímetros. E certamente  $H \ll R_T$**

# Gráfico da distribuição espacial normalizada: moléculas na temperatura $T$ e gravidade constante

$$f(h) = \frac{dN(h)}{Ndh} \cong \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgh}{kT}}$$



*Estabeleça a relação matemática entre a distribuição de altura e a pressão !*

# No experimento de Perrin

- **Resultado:**

$$f(h) = \frac{dN(h)}{Ndh} = \frac{mg(1 - \frac{\rho}{\rho_{liq}})}{kT} e^{-\frac{mg(1 - \frac{\rho}{\rho_{liq}})h}{kT}}$$

- Levando em conta o empuxo das bolinhas no liquido.

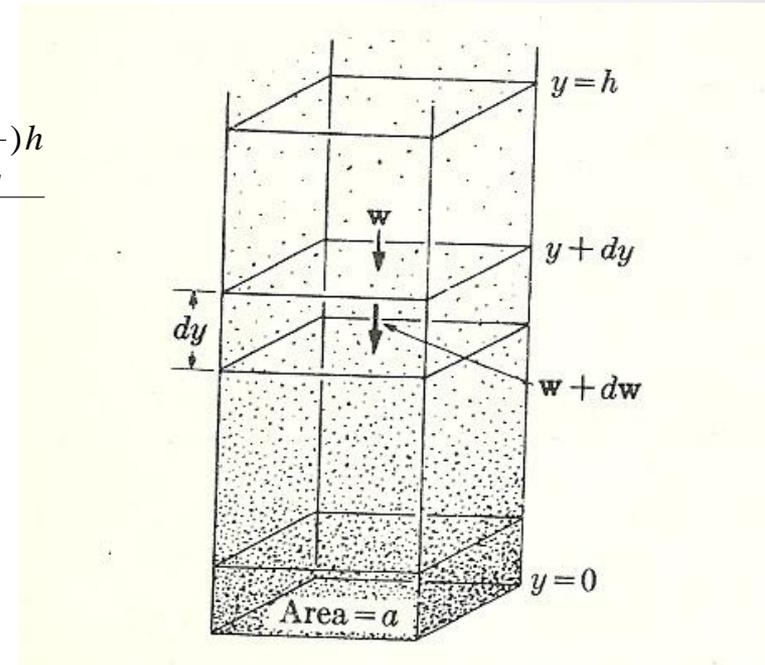


Figura do Enge, Wehr, Richards.

# Outros resultados da distribuição espacial de moléculas no equilíbrio térmico e gravidade constante – *faça!*

- $\langle h \rangle = kT/mg$
- depende da massa das Moléculas.
- $\langle U_G \rangle = \langle mgh \rangle = kT$
- Depende só da temperatura

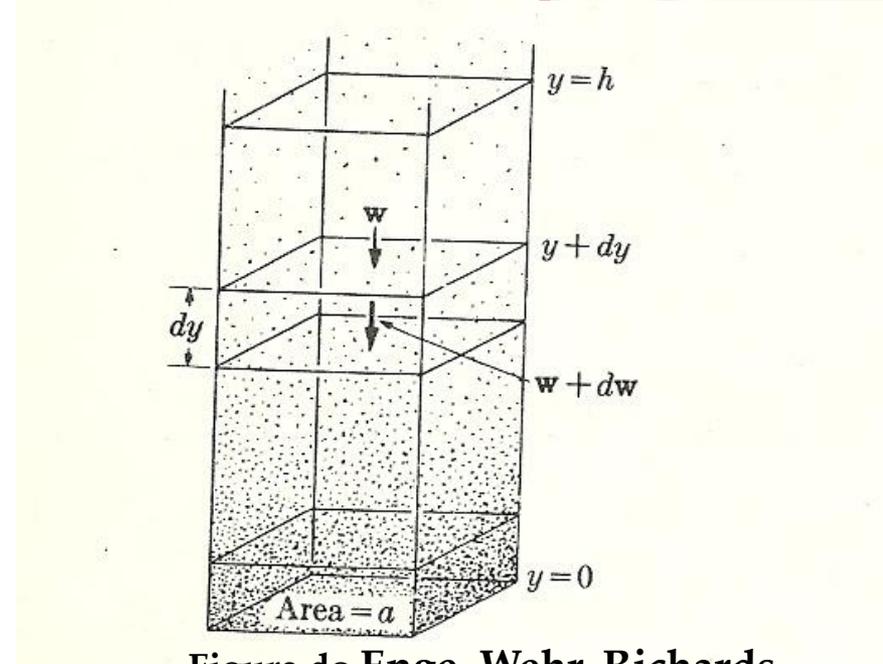
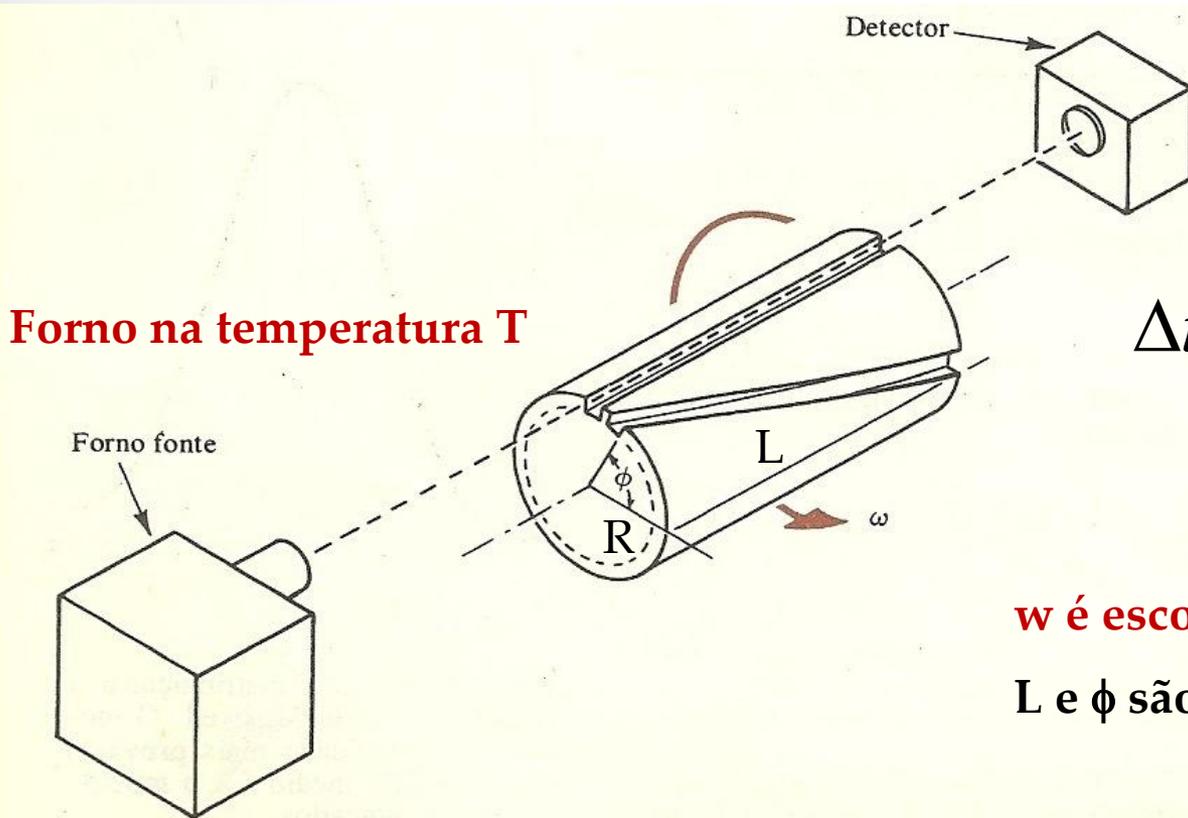


Figura do Enge, Wehr, Richards.

- **Vejam que não se aplica a equipartição da energia para a média da energia potencial de interação gravitacional já que o resultado não é  $kT/2$ . Entenda!**

# Medida direta da distribuição de módulos de velocidades (temperatura T).

Esquema de equipamento para medir distribuição de módulos de Moléculas. R.C. Miller e P. Kusch, Phys. Rev. 99, 1314 (1955)



Chegam ao detector as moléculas que levam  $\Delta t$  para percorrer a distância L

$$\Delta t = \frac{\phi}{w} = \frac{L}{v} \Rightarrow v = \frac{Lw}{\phi}$$

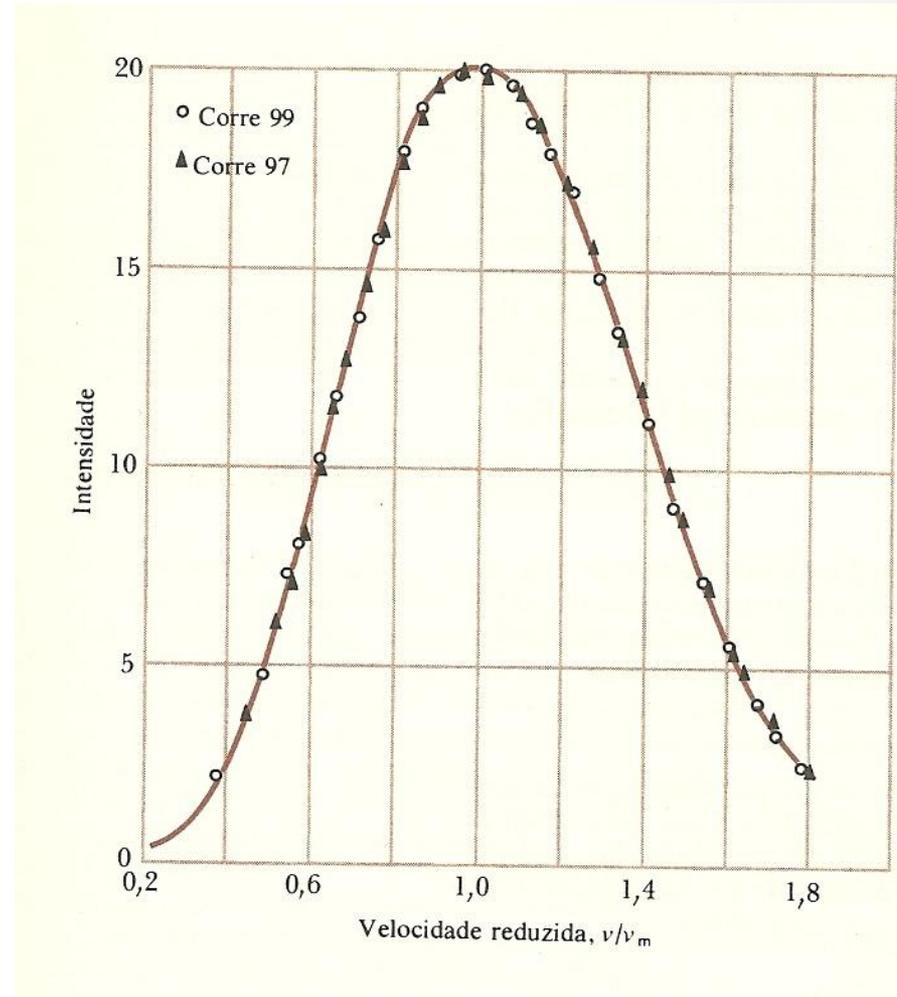
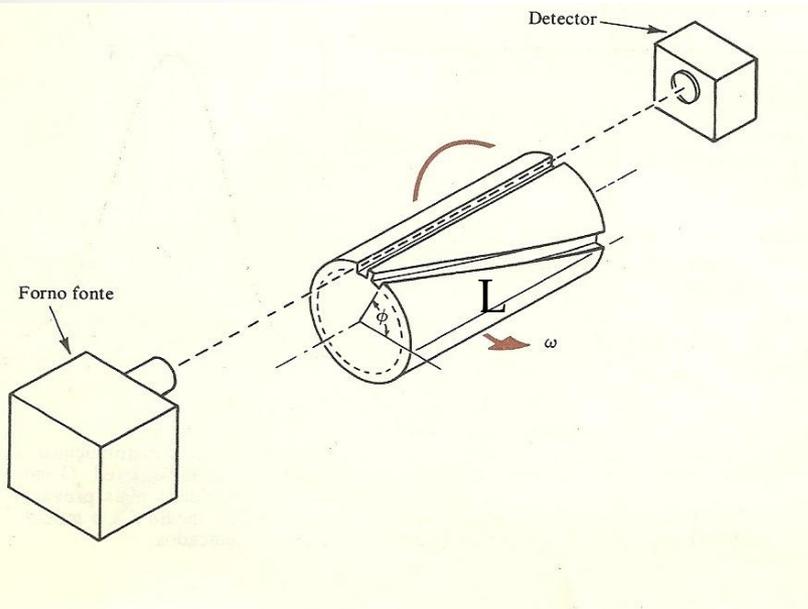
seletor de velocidades

$w$  é escolhido para selecionar  $v$

L e  $\phi$  são definidos na construção

# Medida direta da distribuição de módulos de velocidades (temperatura $T$ ).

Esquema de equipamento para medir distribuição de módulos de Moléculas. R.C. Miller e P. Kusch, Phys. Rev. 99, 1314 (1955)

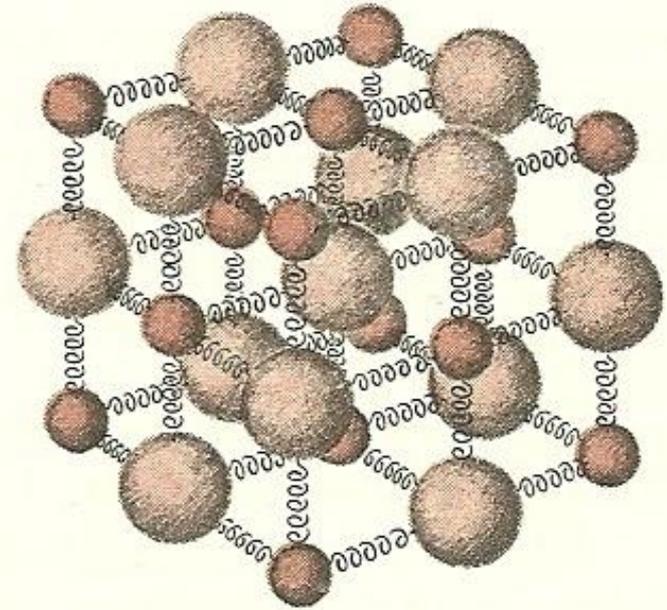


**Viva Maxwell!**

*Sem o aval experimental, a ciência jogaria os modelos e teorias no lixo!*

# Modelo mecânico de matéria sólida cristalina

- **Constituintes dos Sólidos (não amorfos ou cristalinos)**
  - Constituintes (átomos) iguais ou diferentes interagindo com vizinhos como se fossem osciladores harmônicos tridimensionais.



**Energias de cada constituinte do sólido em torno de sua posição de equilíbrio (0,0,0):**

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + U_{vibr} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2$$

# Distribuição de energia - MHS unidimensional

## dedução em aula

- Energia de um constituinte:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + U_{vibr} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}k_x x^2$$

- Usando a distribuição de Boltzmann:

$$f(x, v_x) = \frac{dN(x, v_x)}{N dx dv_x} = A e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} e^{-\frac{k_x x^2}{2kT}}$$

- **Resultado depois de cálculos - CUIDADO!!!**

$$f(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{Nd\varepsilon} = \frac{1}{kT} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

# *MHS unidimensional - <Energia>, U e c<sub>v</sub>*

- **Energia média dos constituintes:**

$$\langle \varepsilon \rangle = kT$$

- **Energia Interna de N constituintes:**

$$U = N \langle \varepsilon \rangle = NkT$$

- **Calor Específico Molar a volume constante:**

$$c_v = \frac{\partial U_{Vcte}^{1mol}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} N_o \langle \varepsilon \rangle = \frac{\partial}{\partial T} N_o kT = R$$

# Sólido: MHS tridimensional

- Energia média dos constituintes:

$$\langle \varepsilon \rangle = 3kT$$

- Energia Interna de N constituintes:

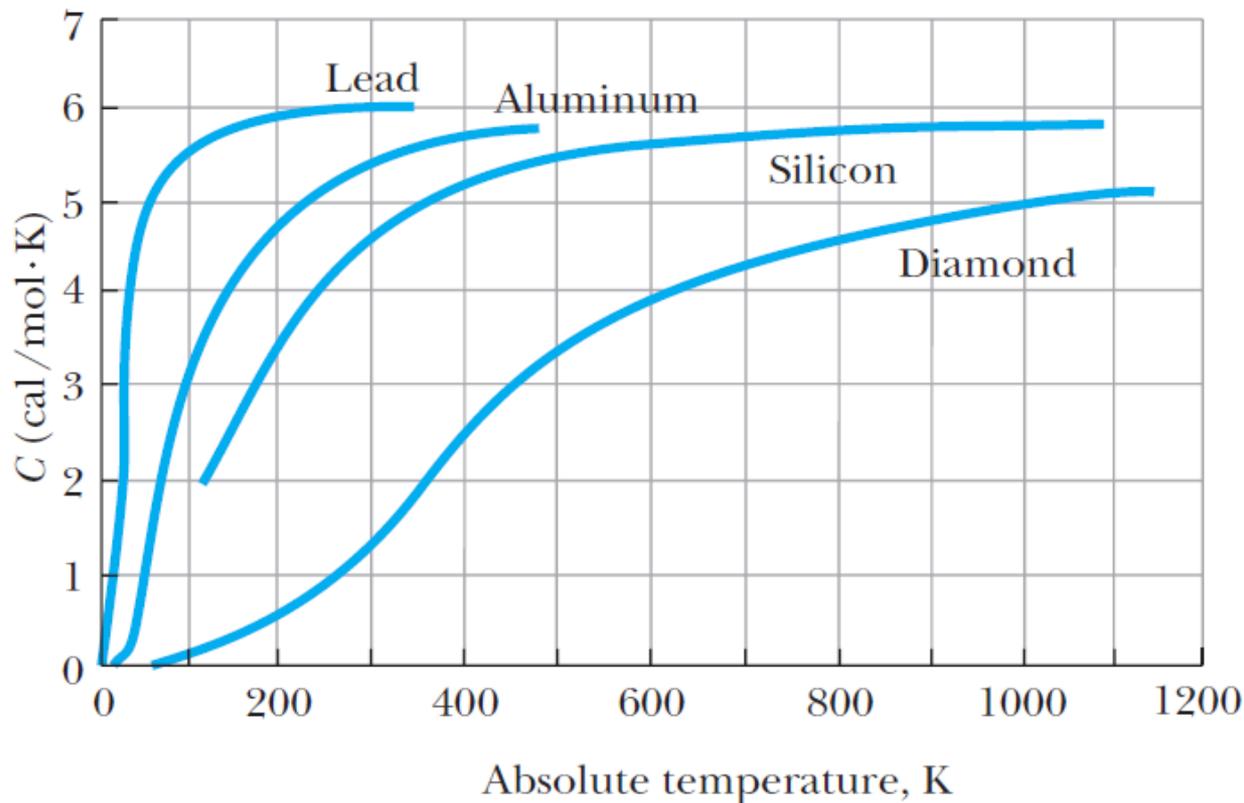
$$U = N \langle \varepsilon \rangle = N3kT$$

- Calor Específico Molar a volume constante:

$$c_V = \frac{\partial U_{Vcte}^{1mol}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} N_o \langle \varepsilon \rangle = \frac{\partial}{\partial T} N_o 3kT = 3R$$

- Observe: energia interna proporcional à velocidade e calor específico molar constante!

$c_v$  experimental na matéria sólida – atinge o valor constante em temperatura que depende do sólido



**Figure 10.9** The dependence of specific heat on temperature for several solid elements.

Figura do Serway, Moses e Moyer.

# Sistemas de muitos osciladores harmônicos unidimensionais com energias quantizadas

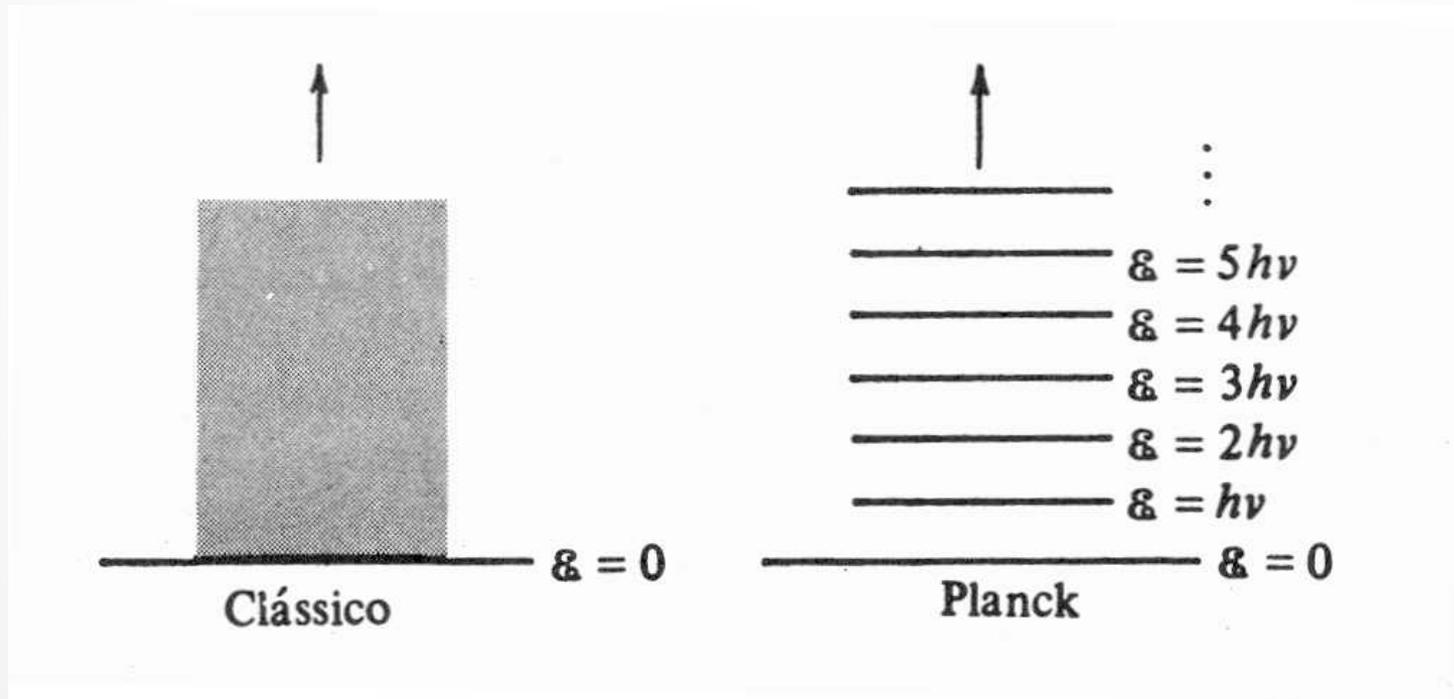
- **O ponto de partida – proposta de Planck (1900)** (a ser tratado nas próximas aulas e adotado por Einstein para os sólidos).

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}C_1x^2 = n_1\varepsilon_0 \quad n_1 = 0,1,2,3\dots$$

- **Por que? Por que a natureza física , surpreendendo o estabelecido na física clássica, seria assim! Vamos ver no que resulta!**

# Diagrama de energias de sistemas de muitos osciladores harmônicos unidimensionais – energias contínuas (osciladores clássicos) e discretas (proposta de Planck)

- O ponto de partida – proposta de Planck (1900):  $\epsilon_0 = h\nu$



# Sistema de muitos osciladores harmônicos unidimensionais com energias quantizadas

- O resultado da distribuição para energias discretas na teoria de Boltzmann:
- **Obs. Este tratamento foi feita por Einstein com base em proposta de Planck no qual  $\varepsilon_0 = h\nu$ .**

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}C_1x^2 = n_1\varepsilon_0 \quad n_1 = 0,1,2,3\dots$$

$$f(\varepsilon_{n_1}) = \frac{dN(\varepsilon_{n_1})}{N} = Ae^{-\frac{n_1\varepsilon_0}{kT}} \quad \sum_{n_1=0}^{\infty} Ae^{-\frac{n_1\varepsilon_0}{kT}} = 1$$

$$A = \frac{1}{\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\frac{n_1\varepsilon_0}{kT}}} \quad f(\varepsilon_{n_1}) = \frac{dN(\varepsilon_{n_1})}{N} = \frac{e^{-\frac{n_1\varepsilon_0}{kT}}}{\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\frac{n_1\varepsilon_0}{kT}}}$$

# *O calor específico molar a volume constante dos sólidos: sistema de muitos osciladores tridimensionais quantizados*

- **Valor médio da energia:**

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}$$

- **O calor específico molar a volume constante**

$$c_v = N_o \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial T} = \frac{3N_o \varepsilon_0^2 e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}}}{kT^2 [e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1]^2}$$

**Saiba demonstrar que quando  $T$  tende a zero (ou  $kT \ll \varepsilon_0$ )  $c_v$  tende a  $3R$ , o resultado de Boltzmann sem quantização da energia.**

# O calor específico molar a volume constante dos sólidos segundo Planck

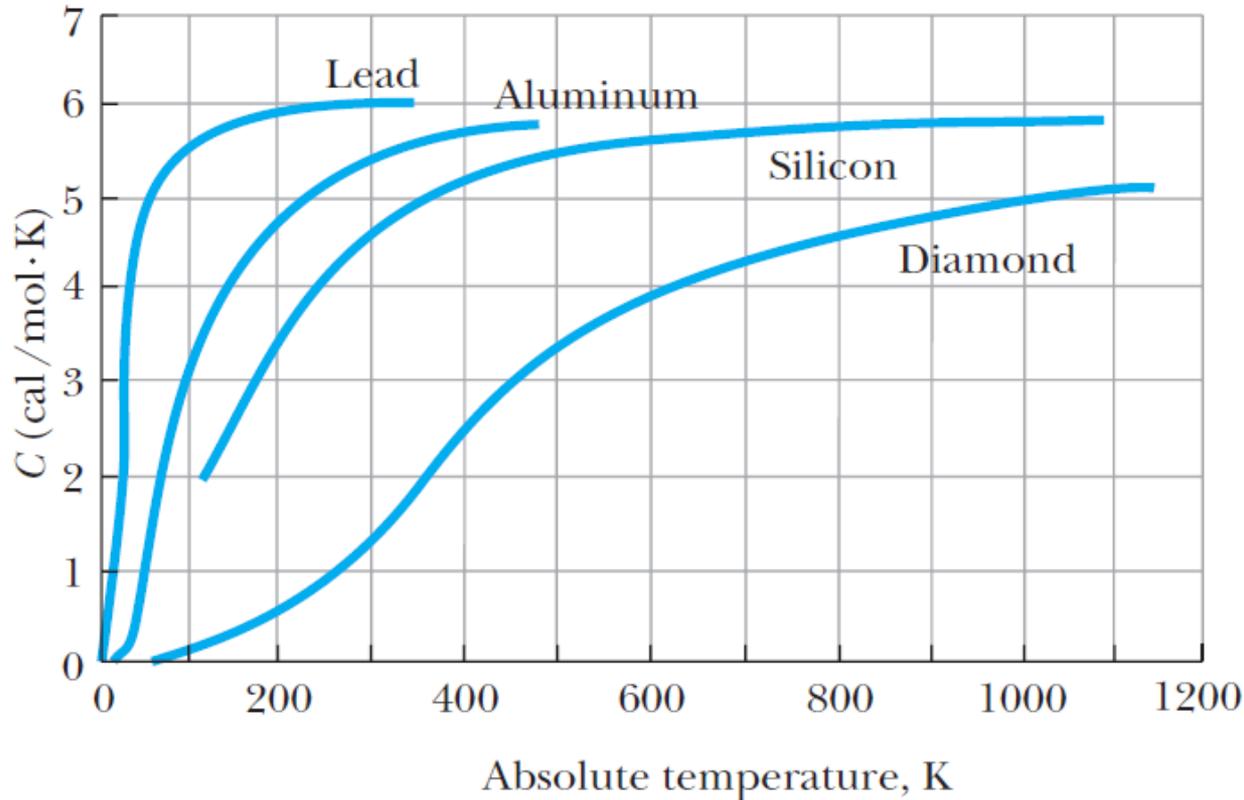
- O calor específico molar a volume constante com oscilações quantizadas:

$$c_v = N_o \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial T} = \frac{3N_o \varepsilon_o^2 e^{\frac{\varepsilon_o}{kT}}}{kT^2 [e^{\frac{\varepsilon_o}{kT}} - 1]^2}$$

**Saiba demonstrar:**

1. quando  $T \rightarrow 0$ , ou melhor:  $kT \ll \varepsilon_o \Rightarrow c_v \rightarrow 0$ .
2. quando  $T \rightarrow \infty$ , ou melhor:  $kT \gg \varepsilon_o \Rightarrow c_v \rightarrow 3R$ , o resultado de Boltzmann sem quantização da energia.

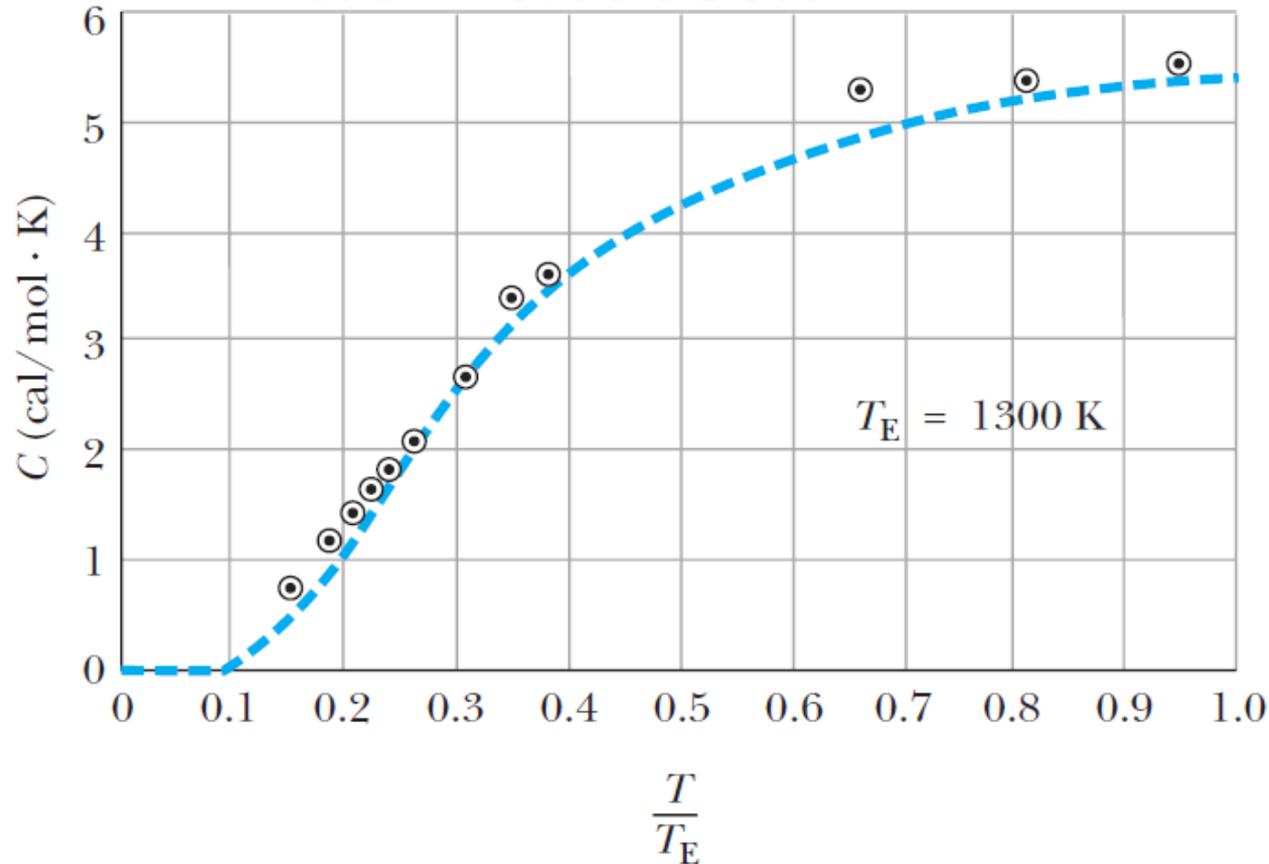
$c_v$  experimental na matéria sólida – atinge o valor constante em temperatura que depende do sólido ( $\epsilon_0$  na teoria)



**Figure 10.9** The dependence of specific heat on temperature for several solid elements.

Figura do Serway, Moses e Moyer.

# $c_v$ em diamante – $T_E$ é a “temperatura de Einstein”



**Figure 10.10** Einstein's specific heat formula fitted to Weber's experimental data for diamond. This figure is adapted from A. Einstein, *Ann. Physik.*, 4(22):180, 1907.

Figura do Serway, Moses e Moyer.

# *Modelo mecânico de matéria sólida cristalina*

- **QUESTÃO:**
- Este modelo é, no seu conhecimento, igual para sólidos não condutores e condutores?
- **EXPLIQUE**

