

SEM 538 - Sistemas de Controle II

Aula 1 - Espaço de Estados

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

- Forma de representação de sistemas dinâmicos
- Modelos mais complexos (MIMO - Multiple Input Multiple Output)
- Vetores e matrizes
- Conecta variáveis internas (espaços) com variáveis externas (entradas e saídas)

- Representar equações diferenciais como um conjunto de EDOs de primeira ordem
- Formato

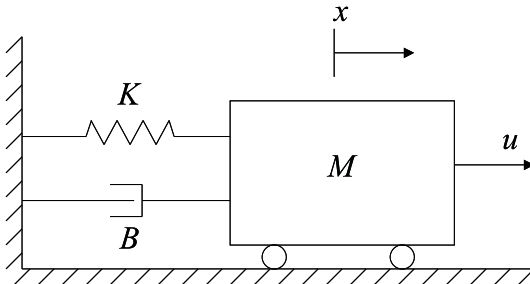
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

- \mathbf{x} : estado
- \mathbf{u} : entrada
- \mathbf{y} : saída

Espaço de Estados

- Considere o seguinte sistema mecânico:



- Sistema

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = u$$

$$y = x$$

- Define-se as variáveis do estado

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

- Tem-se

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

- Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

- Saída (posição):

$$y = x = x_1$$

- Na forma matricial

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Representação no espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$$

$$y = C\mathbf{x} + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Saída (posição e velocidade):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Na forma matricial: $\mathbf{y} = C\mathbf{x} + Du$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Exemplo $D \neq 0$
- Saída (aceleração):

$$\mathbf{y} = \dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

- Na forma matricial: $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$

$$\mathbf{C} = \left[-\frac{K}{M} \quad -\frac{B}{M} \right], \quad \mathbf{D} = \left[\frac{1}{M} \right]$$

- Exemplo: *Drive* de disco rígido

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = T$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

- Encontrar a representação no espaço de estados sendo a saída θ_2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{l_1} & -\frac{b}{l_1} & \frac{k}{l_1} & \frac{b}{l_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{l_2} & \frac{b}{l_2} & -\frac{k}{l_2} & -\frac{b}{l_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{l_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

- Exemplo: *Drive* de disco rígido

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = T_1$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = T_2$$

- Encontrar a representação no espaço de estados sendo as saídas θ_1 e θ_2

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Função de Transferência para Espaço de Estados

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

- Forma canônica controlável

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C_c = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n], \quad D_c = 0$$

Função de Transferência para Espaço de Estados

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}$$

Função de Transferência para Espaço de Estados

- Exemplo: $G(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$

$$\dot{\mathbf{x}} = A_c \mathbf{x} + B_c u$$

$$y = C_c \mathbf{x} + D_c u$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_c = 0$$

Função de Transferência para Espaço de Estados

- Forma canônica modal: $G(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_m \mathbf{z} + \mathbf{B}_m u$$

$$y = \mathbf{C}_m \mathbf{z} + D_m u$$

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_m = 0$$

Transformação de Estados

- Seja o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$$

$$y = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{J}u$$

- Matriz não singular T
- Transformação linear

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$$

- Equação dinâmica

$$\dot{\mathbf{x}} = T\dot{\mathbf{z}} = FT\mathbf{z} + Gu$$

$$\dot{\mathbf{z}} = T^{-1}FT\mathbf{z} + T^{-1}Gu$$

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + Bu$$

- Equação da saída

$$y = HT\mathbf{z} + Ju = C\mathbf{z} + Du$$

- Forma geral para forma canônica controlável

$$AT^{-1} = T^{-1}F$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 F \\ t_2 F \\ t_3 F \end{bmatrix}$$

- $t_2 = t_3 F$
- $t_1 = t_2 F = t_3 F^2$

- Forma geral para forma canônica controlável

$$T^{-1}G = B$$

$$\begin{bmatrix} t_1 G \\ t_2 G \\ t_3 G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $t_3 G = 0$
- $t_2 G = t_3 FG = 0 \Rightarrow t_3 [G \ FG \ F^2 G] = [0 \ 0 \ 1]$
- $t_1 G = t_3 F^2 G = 1$

- Forma geral para forma canônica controlável

$$t_3 = [0 \ 0 \ 1]C^{-1}$$

$$C = [G \ FG \ F^2G]$$

- Matrix de Controlabilidade
- Forma geral

$$C = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G]$$

- Caso geral

$$t_n = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]C^{-1}$$

- Matriz de Transformação

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_n F^{n-1} \\ t_n F^{n-2} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

Função de Transferência para Espaço de Estados

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

- Forma canônica observável

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$
$$C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad D_o = 0$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Equação característica

$$\det(sI - A) = 0$$

- Autovalores de A

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- Pólos de $G(s) \Leftrightarrow$ autovalores de A
- Estabilidade: autovalores de A com parte real negativa