

**Universidade de São Paulo**

**Instituto de Física de São Carlos**

**7600035 - Eletromagnetismo Avançado**

## **Emissão de Radiação**

Marino Paiva Lenzarini - 11212484

Eduardo Fonseca Rabelo - 11272697

Gabriel Brandão Galhase - 11212654

Professor: Luiz Nunes de Oliveira

São Carlos - SP

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Abordagem eletrodinâmica . . . . .	1
1.2	Modelo Atômico . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Modelo de Bohr</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Radiação de Dipolo Elétrico</b>	<b>5</b>
3.1	Emissão de Radiação . . . . .	6
	<b>Referências</b>	<b>7</b>

# 1 Introdução

O efeito de radiação é bem conhecido através da história, desde fotoluminescência de algas marinhas até a emissão de luz por instrumentos mais modernos. Este projeto tem como interesse descrever, a partir de duas áreas da física, a Mecânica Clássica e a Eletrodinâmica, a física da emissão de radiação. Historicamente, o estudo da radiação tem seu início com os modelos eletrodinâmico através das Equações de Maxwell, as quais a descrevem facilmente como uma onda plana monocromática. Porém, nossa busca é por uma explicação física do que provoca a emissão da radiação, para isso é necessário estudar diferentes abordagens da história, como os modelos clássicos de Thomson e Rutherford para trabalhar em um âmbito quântico. Por fim, entender o modelo de Niels Bohr que os derrubou e utiliza-lo como motivação para explicar a radiação.

## 1.1 Abordagem eletrodinâmica

No contexto da eletrodinâmica, conseguimos estudar a propagação das ondas eletromagnéticas e podemos escrever os campos eletromagnéticos como ondas planas monocromáticas com vetor de propagação  $\mathbf{k}$  e polarização  $\mathbf{n}$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{n}, \quad (1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) (\hat{k} \times \hat{n}). \quad (2)$$

Mais precisamente, como queremos falar da emissão de radiação devemos falar da origem dessa ondas e também uma forma de quantificá-las. Para eletrodinâmica, trabalhar com cargas em repouso não é interessante, isto é, cargas em repouso não tem a capacidade de gerar ondas eletromagnéticas, portanto estaremos sempre tratando de cargas aceleradas.

Diante da dependência temporal das ondas, sabemos que elas propagam-se ao infinito quando não perturbadas em seu percurso e, assim, estão sempre transportando alguma porção de energia. Sabendo disso, é importante para esse trabalho quantificar a energia transportada por essas ondas. Para isso, podemos introduzir o cálculo do Vetor de Poynting que nos dá a potência total irradiada sobre uma superfície dada pela integral

$$P(r) = \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\mu_0} \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \quad (3)$$

e a potência radiada é dada pelo limite

$$P_{rad} = \lim_{r \rightarrow \infty} P(r), \quad (4)$$

esta é a energia por unidade de tempo que é irradiada ao infinito. Por fim, o estudo da radiação é baseado nas abordagens do campo elétrico  $\mathbf{E}$  e o campo magnético  $\mathbf{B}$  em que veremos com

maior propriedade na Seção 3 onde discutiremos a emissão de radiação de um Dipolo Elétrico.

## 1.2 Modelo Atômico

O estudo da mecânica clássica auxiliou bastante no entendimento da emissão de radiação ao longo do tempo. Por isso, ao falarmos da emissão não podemos deixar de falar dos estudos realizados por Thomson e Rutherford que geraram várias observações que possibilitaram melhor entendimento da física como conhecemos hoje.

A priori, podemos começar uma análise pelo modelo atômico de Thomson que consiste em um átomo de núcleo positivamente carregado com uma distribuição contínua e extensa ao tamanho do átomo com elétrons ao seu redor. O modelo foi criado por volta de 1898 após o descobrimento da partícula subatômica que gerou a hipótese.

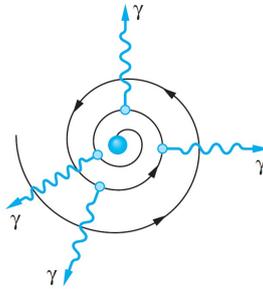


Figura 1: Órbita do elétron[1]

Considerando o modelo, ao calcularmos a órbita de um elétron sujeito a um potencial Coulombiano podemos ver que sua órbita tem trajetória circular em direção ao núcleo do átomo, nesse caso, de raio consideravelmente grande (Figura 1).

Partindo do Potencial Coulombiano e sua relação com a força centrípeta do movimento, temos,

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (5)$$

Assim, do potencial, sabe-se que há uma força resultante centrípeta no elétron de modo que a relação  $\mathbf{F} = -\nabla \cdot V$  seja satisfeita, isto é,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad (6)$$

A medida que o raio de órbita diminui, na mecânica clássica, é esperado que a emissão de radiação aumente como previsto pelas leis da eletrodinâmica visto que uma carga acelerada irradia luz, consequentemente podemos escrever a frequência da luz irradiada a partir da frequência de revolução ( $f$ ), uma vez que a frequência deve aumentar a medida que a órbita diminui seu raio, logo teríamos uma frequência da forma

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mr} \right)^{1/2} \frac{1}{2\pi r} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{4\pi^2 m} \right)^{1/2} \frac{1}{r^{3/2}}. \quad (7)$$

Analisando também a energia total do sistema, sendo ela a soma da Energia Cinética com o Potencial Coulombiano, podemos escrever a Energia Mecânica em termos da Equação 6, em que finalmente obtemos

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{e^2}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r}. \quad (8)$$

Podemos ver que tanto a energia do sistema quanto a frequência da luz emitida aumenta com o decaimento do raio de órbita, e da maneira que vimos até agora podemos observar um comportamento contínuo nessa emissão. Ao falarmos de uma emissão em espectro contínuo esperamos, neste modelo, que o elétron tende a perder energia até chegar ao centro para respeitar sua trajetória, por isso nos depararíamos com o elétron colapsando com o núcleo, sendo assim tendo uma quantidade de energia mínima que representa uma inconsistência, a qual anos depois foi demonstrada por Rutherford através de seus experimentos.

Quase 20 anos depois, Rutherford começou a trabalhar com um experimento que previa o lançamento de partículas  $\alpha$  que ficou conhecido como Espalhamento Rutherford (Figura 2) e, a partir desse experimento, percebeu algumas coisas que eram inconsistentes, tal como o tamanho do núcleo do átomo era estimado na ordem de grandeza de  $10^{-10}m$ .

O Espalhamento Rutherford consistiu no lançamento de partículas  $\alpha$  em uma superfície metálica (ouro) e a partir disso foi possível perceber que parte delas passou pela placa de ouro, parte não passou e, finalmente, várias partículas foram espalhadas pelo anteparo com ângulos  $\theta$  distintos e também diferentes dos que eram esperados no modelo de Thomson.

$$b = \frac{kq_\alpha Q}{m_\alpha v^2} \cot \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (9)$$

A partir do experimento, concluiu-se na época que a ideia de Thomson era um pouco antiquada, e por isso Rutherford estimou o tamanho do raio nuclear como a distância mais próxima entre a partícula e o núcleo seria numa colisão frontal, onde teria um espalhamento de  $180^\circ$  e devido as interações coulombianas a energia cinética era transformada em potencial eletrostática da forma[2]:

$$\begin{aligned} (V + E_k) &= (V + E_k)_{\text{núcleo}} \\ \left( 0 + \frac{m_\alpha v^2}{2} \right) &= \left( \frac{kq_\alpha Q}{r} + 0 \right)_{\text{núcleo}} \\ \frac{m_\alpha v^2}{2} &= \frac{kq_\alpha Q}{r} \\ r &= \frac{kq_\alpha Q}{\frac{1}{2}m_\alpha v^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Como a energia cinética da partícula de 7,7 MeV temos

$$r = 3 \times 10^{-14}m \quad (11)$$

Com isso, podemos ver uma diferença dos valores do núcleo atômico de cada modelo. A partir daí as dimensões nucleares são mais convenientemente descritas através de uma nova unidade, denominada fermi ou fentômetro (fm), definida por  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ [3].

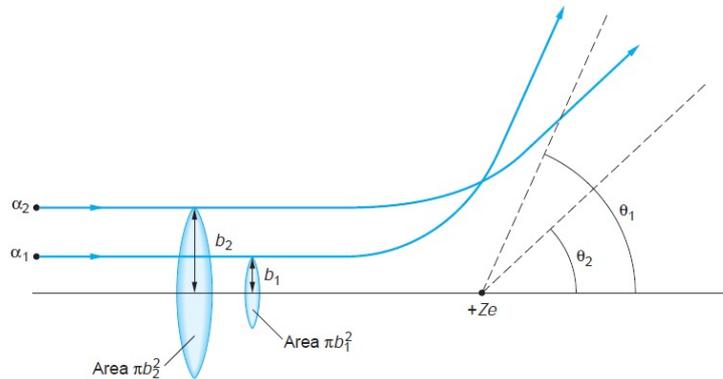


Figura 2: Espalhamento Rutherford [1]

Com isso, podemos concluir que depois da correção de Rutherford sobre o modelo atômico, ainda temos algumas incertezas sobre a emissão de radiação. Como previsto pelas leis da Eletrodinâmica uma carga acelerada emite radiação, porém na prática podemos ver que essa emissão não acontece em espectro contínuo, além de que, pelo modelo de Thomson, previa um colapso do elétron no núcleo com raio de aproximadamente  $10^{-10}m$  que já não é tão certo visto que o núcleo na verdade foi demonstrado na ordem de fermi.

Finalmente, precisamos de uma abordagem mais específica e detalhada para entender a emissão de radiação onde passaremos a estudar os postulados de Bohr para compreender como essas incertezas e imprecisões são corrigidas.

## 2 Modelo de Bohr

Após Rutherford observar a falha existente no modelo de Thomson, Niels Bohr propôs uma nova abordagem ao modelo clássico do átomo de hidrogênio: um elétron em órbita circular em torno do núcleo de mesma carga, de tal maneira que há um potencial coulombiano de ligação entre as cargas dado pela relação (5) e, assim, tem-se a energia total do sistema dado pela relação obtida anteriormente em (8). Entretanto, Bohr quantiza o modelo através dos três principais postulados[1]:

- *Os elétrons se movem em órbitas estacionárias sem irradiar energia.*
- *Os átomos somente irradiam quando um elétron sofre uma transição de um estado estacionário para outro, em que a frequência  $f$  emitida é dada por  $E_i - E_f = hf$ , sendo  $h$  a constante de Planck,  $E_i$  e  $E_f$  as energias dos estados inicial e final, respectivamente.*
- *Princípio da Correspondência: no limite de grandes órbitas e altas energias, os resultados quântico devem coincidir com os resultados clássicos.*

Nota-se que, os três postulados fornecem uma linha de pensamento para um espectro de energias discretas fornecidas pelas órbitas estacionárias. Assim, utilizando-se a quantização de *Sommerfeld*[4] do momento angular orbital

$$L = mrv = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar, \quad (12)$$

em que  $n$  é um número inteiro positivo e não nulo, e  $\hbar$  é a constante de Planck  $h$  dividida por  $2\pi$ , obtêm-se a relação para o raio orbital discretizado

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2\hbar^2}{me^2} = n^2 a_0, \quad (13)$$

em que  $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$  é o *raio de Bohr*. A relação (13) mostra a quantização postulada por Bohr para órbitas estacionárias, isto é, somente são permitidas órbitas discretas para diferentes valores  $n = 1, 2, 3, \dots$  e, portanto, as energias (8) serão também discretizadas como se segue

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r_n} = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{E_0}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

de tal modo que as frequências irradiadas determinadas pelo segundo postulado de Bohr são dadas por

$$f = \frac{E_0}{h} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right). \quad (15)$$

É notável como os três postulados de Bohr se completam para explicar a emissão de radiação por saltos orbitais. Entretanto, vale ressaltar uma aparente contradição entre os dois primeiros postulados, pois para calcular a quantidade irradiada é necessário que haja interação com matéria e, neste caso, podemos estudar a interação com os campos eletromagnéticos no espaço. Além disso, o primeiro postulado nos traz a ideia de que elétrons que se movimentam em órbitas circulares não irradiam energia, porém isso não pode ser verdade, considerando que há aceleração atuando neles por conta do potencial coulombiano. Assim, uma maneira de tratar esse problema é considerar um dipolo elétrico oscilante, o qual pode ser confuso de primeiro momento ao considerar uma carga girando em torno de outra, mas basta modificarmos o referencial para tornar-se um problema de dipolo oscilante como queremos[5].

### 3 Radiação de Dipolo Elétrico

A abordagem de dipolo elétrico é bem intuitiva como vimos na seção anterior, mas agora nos interessa analisar como os campos eletromagnéticos transportam energia e, portanto, estudar a energia radiada. De início, é importante notarmos que, para a radiação ocorrer é necessário que o vetor de Poynting decresça a no máximo  $1/r^2$ . Para sistemas estáticos, temos  $S \sim 1/r^4$ , ou seja, fontes estáticas não irradiam. Dessa forma, estamos interessados apenas nos campos que

decaem com  $1/r$ . São esses os responsáveis pela emissão da radiação eletromagnética. Assim, para o estudo da radiação, vamos escolher partes dos campos elétrico e magnético que decaem com  $1/r$  para podermos construir um termo  $1/r^2$  no vetor de Poynting, integrá-lo sobre uma esfera e tomar o limite  $r \rightarrow \infty$ .

Agora, vamos definir o campo eletromagnético do dipolo elétrico, o qual pode ser descrito imaginando-se duas esferas de metal minúsculas conectadas por um fio fino e distantes de  $d$  uma da outra. A carga de cada uma das esferas é, respectivamente,  $q(t)$  e  $-q(t)$ , onde  $q(t) = q_0 \cos(\omega t)$ . A partir disso, temos o dipolo elétrico oscilante, dado por  $\mathbf{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\hat{z}$ , tal que  $p_0 = q_0 d$ . Utilizando o conceito de potencial retardado e aproximações para aproximar o dipolo físico para um dipolo perfeito, somos capazes de encontrar os potenciais escalar e vetorial para o dipolo elétrico e, a partir deles, encontrar os campos elétrico e magnético, dados pelas equações[6]  $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  e  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , isto é

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\theta}, \quad (16)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\phi}. \quad (17)$$

Utilizando essas duas equações, somos capazes de calcular a energia radiada pelo dipolo elétrico através do vetor de Poynting  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$  como

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \right\}^2 \hat{r}, \quad (18)$$

tal que a intensidade é calculada tomando a média temporal de  $S$  em um ciclo completo:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left( \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}. \quad (19)$$

Além disso, podemos calcular a potência total irradiada. Basta integrar  $\langle \mathbf{S} \rangle$  sobre uma esfera de raio  $r$ , e assim obtemos:

$$\langle P \rangle = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}, \quad (20)$$

tal resultado é comparável à um elétron girando com velocidade angular  $\omega$  em torno do núcleo devido ao potencial coulombiano em uma média temporal de  $2\pi/\omega$ , sendo uma boa aproximação para explicar a inconsistência antes encontrada no modelo de Bohr.

### 3.1 Emissão de Radiação

Uma aplicação usual da radiação de dipolos elétricos é dado na utilização de antenas, seja para recepção ou emissão de sinal através das ondas eletromagnéticas. Há duas principais formas de produzir antenas: dipolos ou fios conduzindo corrente alternada, entretanto ambos

os modelos respeitam as mesmas fórmulas deduzidas na seção anterior, a diferença é presente somente na frequência de oscilação, enquanto na primeira tem-se uma frequência  $\omega$  de oscilação do dipolo, na segunda a mesma frequência está presente na tensão alternada como na figura 3.

Ao considerarmos um dipolo oscilante com o tempo, teremos campos magnéticos dependentes do tempo, assim como visto anteriormente, tal que as linhas do campo eletromagnético são "distorcidas" ao decorrer do tempo como na figura 4. Este modelo é bem ilustrativo e exemplifica bem a emissão de radiação através das linhas de campo, sendo análogo a bolhas de sabão desprendendo-se do ponto de onde se assopra o ar. Além disso, uma abordagem mais matemática nos mostra que, ao olharmos para a equação (18), é possível notar que há um máximo em  $t = r/c$ , onde a radiação é máxima e quando  $\omega(t - r/c) \sim \pi/2$  os campos eletromagnéticos se anulam. Portanto, ocorre um análogo à bolha de sabão, as linhas de campo emitidas desprendem da fonte como esquematizado na Figura 3.

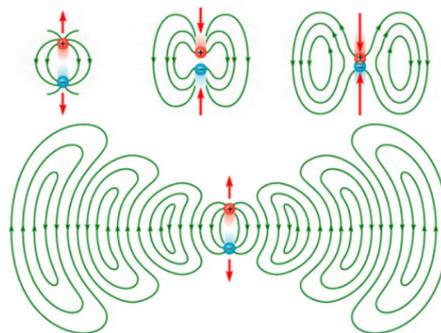
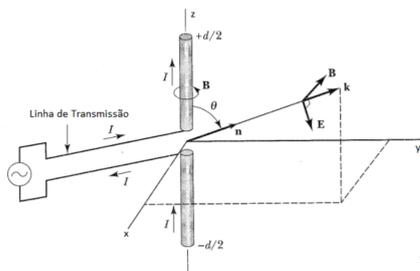


Figura 3: Esquema de antena de fio linear[7]. Figura 4: Representação de como uma onda eletromagnética é gerada. Na figura está somente representado as linhas do campo elétrico[7].

## Referências

- [1] Ralph A. Tipler, Paul A. / Llewellyn. *Modern Physics, 6th Edition*. W. H. Freeman and Company, New York, 2007.
- [2] Física Moderna. Noções de física nuclear.
- [3] Michel Betz. Tamanho do núcleo atômico.
- [4] F. Caruso / V. Oguri. *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos, 2ª Edição*. Elsevier Editora, 2006.
- [5] Milan Perkovic. Absorption and emission of radiation by an atomic oscillator, 2003.
- [6] David J Griffiths. Introduction to electrodynamics, 2005.
- [7] I. Ribeiro / J. Ramos / R. Carnielli. *Como Funcionam as Antenas*. IFGW - Unicamp, 2019.