

Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
7600035 - Eletromagnetismo Avançado

Radiação emitida por uma linha síncrotron

Anna Cristina Cavallari Inacio	N ^o USP: 10728164
Beatriz Kimie de Souza Ito	N ^o USP: 10728293
Larissa Nolasco de Carvalho Alvarenga	N ^o USP: 10799845
Luis Augusto Pereira	N ^o USP: 10728230
Nickolas Pietro Donato Cerioni	N ^o USP: 10728313

Docente: Luiz Nunes de Oliveira

1 Resumo

Quando um elétron é acelerado, ele emite radiação. Como não interessa a direção da aceleração, uma forma de se acelerar elétrons para que eles emitam luz sem muito esforço é utilizando trajetórias circulares, uma vez que dessa forma o módulo da velocidade do elétron não se altera.

A radiação síncrotron vem de uma configuração específica desse tipo de movimento, sendo a radiação emitida por partículas carregadas movendo-se com velocidades relativísticas em trajetórias curvas. Ela atua como se fosse um farol, a cada revolução do elétron em sua trajetória um observador fixo irá observar regularmente fortes feixos de luz que são altamente energéticos devido a dois fenômenos: a dilatação relativística do espaço e o efeito Doppler.

2 Fundamentos teóricos

2.1 Emissão de radiação por partículas carregadas

Para compreender melhor a emissão de luz por partículas carregadas, precisamos nos aprofundar em como se comportam os potenciais e campos eletromagnéticos quando há movimento. Os potenciais para uma partícula em movimento são dados pelos potenciais de Liénard-Wiechert:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{sc - \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\mathbf{v}}{sc - \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} V(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r) \quad (2)$$

onde $\mathbf{w}(t)$ é a trajetória da partícula e t_r é o tempo retardado. Sabendo que

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (3)$$

e usando $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{s}}c - \mathbf{v}$, podemos escrever as expressões para os **campos generalizados**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{s}{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{s} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})], \quad (4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\mathbf{s}}}{c} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

A potência total radiada pela partícula em movimento pode ser obtida integrando-se o vetor de Poynting sobre todo o espaço:

$$P = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_0} \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} \quad (6)$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_0 c} \oint (E^2 \hat{\mathbf{s}} - (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} \quad (7)$$

A área de uma casca esférica de raio s em torno do ponto onde a partícula emitiu radiação é proporcional a s^2 , logo qualquer termo do campo elétrico que dependa de potências da forma $1/s^3$ ou de decaimento mais acelerado terão contribuição nula para a potência radiada. No entanto, os termos do campo de aceleração decaem na forma de $1/r$, e assim são responsáveis pela radiação emitida por uma partícula. Em outras palavras,

uma partícula emite radiação quando é acelerada. Assim, o campo de aceleração também pode ser chamado de **campo de radiação**:

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{s}{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u})^3} [\mathbf{s} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \quad (8)$$

Paras baixas velocidades se comparadas à da luz, o vetor de Poynting é aproximadamente dado por:

$$\mathbf{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi s} \right)^2 [a^2 - (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{a})] \hat{\mathbf{s}} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{s^2} \hat{\mathbf{s}} \quad (9)$$

Consequentemente, a potência radiada pela partícula será:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \quad (10)$$

A equação (9) é conhecida como **fórmula de Larmor** e é uma boa aproximação para a potência radiada por uma partícula com velocidade muito menor que c .

A dependência do vetor de Poynting com o ângulo θ entre a direção da aceleração e a direção de observação da radiação implica que esta radiação é emitida principalmente ao redor da direção da aceleração, como mostra a figura 1. No caso de um movimento circular, em que a aceleração é perpendicular ao sentido do movimento, tem-se que a partícula emitirá radiação “para frente” e “para trás”

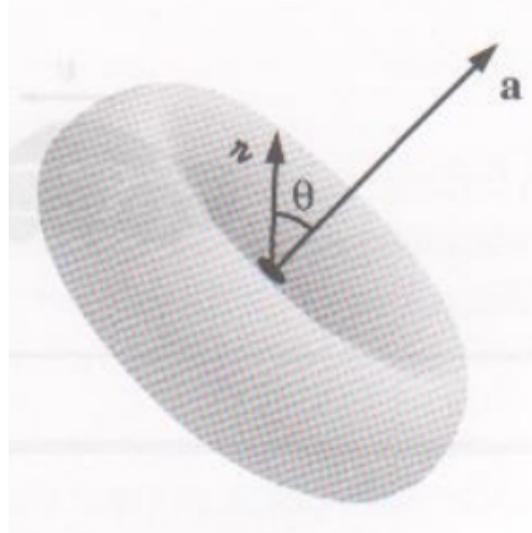


Figura 1: Intensidade da radiação emitida ao redor da direção da aceleração. [1]

3 Radiação Síncrotron

3.1 Frequência de Cíclotron

Quando uma partícula carregada se move em um campo magnético, sua trajetória será curvada de acordo com o ângulo entre o campo e a velocidade da partícula. A força magnética atuando sobre uma partícula com carga q , velocidade \mathbf{v} em um campo magnético \mathbf{B} é dada por:

$$\mathbf{F}_{mag} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11)$$

No caso da velocidade da partícula ser totalmente perpendicular ao campo, então a força magnética fará com que a partícula passe a se mover em círculos. Nesse caso tem-se:

$$F = qvB = ma \implies a = \frac{qvB}{m} \quad (12)$$

Para facilitar os cálculos futuros adotaremos o sistema CGS de unidades, em que a velocidade da luz é unitária. Assim, tem-se que:

$$a = \frac{qvB}{mc} \quad (13)$$

Como o movimento é circular, a partícula sofre uma aceleração centrípeta

$$a = \frac{qvB}{mc} = \frac{v^2}{r} = \omega v \implies \omega = \frac{qB}{mc} \equiv \omega_{cic} \quad (14)$$

Essa análise é válida para partículas com velocidades baixas, ou seja, velocidades em que os efeitos relativísticos não precisam ser considerados. Nesse caso, a frequência de revolução do elétron (**frequência de cíclotron**) não depende da velocidade da partícula, ou seja, é a mesma para qualquer velocidade [2]. A radiação que a partícula estará emitindo nessa trajetória é chamada de **radiação cíclotron** e a potência radiada pela partícula é bem aproximada pela fórmula de Larmor, lembrando que a potência radiada na direção de observação é proporcional à projeção da aceleração nessa direção.

Quando a velocidade da partícula for muito grande, os efeitos relativísticos já não podem ser ignorados, e serão justamente estes que irão transformar a radiação cíclotron em **radiação síncrotron** [3],[4]. Para estudar a emissão de radiação por partículas em velocidades relativísticas, é conveniente analisarmos os efeitos da alta velocidade no referencial de repouso da partícula (L^*) e depois estendermos a análise para o referencial do laboratório (L).

3.2 Ângulo de Abertura

Ao aplicar a transformada de Fourier no pulso de radiação emitida pela partícula encontramos um espectro de ondas planas

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_0^* e^{i\phi^*} \quad (15)$$

Com a fase definida por: $\phi^* = \omega^*(t^* - \frac{\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{n}^*}{c})$, sendo \mathbf{r}^* um ponto no espaço e \mathbf{n}^* a direção de observação. A fase que surge com a aplicação da transformada sugere que os efeitos na radiação que serão observados dependerão da posição de observação. Como a fase de uma onda eletromagnética é invariante e não depende do referencial em que está sendo analisada, $\phi^* = \phi$. Ou seja:

$$\omega^*(t^* - \frac{1}{c}(x^*n_x^* + y^*n_y^* + z^*n_z^*)) = \omega(t - \frac{1}{c}(xn_x + yn_y + zn_z)) \quad (16)$$

Podemos usar as transformações de Lorentz para relacionar o referencial de repouso da partícula com o referencial do laboratório da seguinte forma:

$$x^* = x, \quad y^* = y, \quad z^* = \gamma z - \gamma\beta ct, \quad ct^* = \gamma ct - \gamma\beta z \quad (17)$$

Aqui consideramos o movimento na direção \mathbf{z} . Assim, definimos $\beta = v_z/c$, sendo v_z a velocidade do sistema.

Analisando a igualdade das fases no dois referenciais encontramos a frequência do movimento.

$$\omega = \omega^* \gamma (1 + \beta n_z) \quad (18)$$

Note que como a partícula está em repouso no seu referencial, ω^* é a frequência de de ciclotron do sistema. Essa relação entre as frequências nos dois referenciais expressa o efeito Doppler relativístico. Olhando paralelamente ao movimento da partícula $n_z = \pm 1$ a frequência varia por um fator $\gamma(1 \pm \beta)$, na direção normal ao movimento $n_z = 0$ esse fator é menor, para observações feitas à um ângulo θ do movimento, $n_z = \cos \theta$.

Continuando a análise da igualdade entre as fases, encontramos, também, a relação entre a direção de observação nos dois referenciais.

$$n_x = \frac{n_x^*}{\gamma(1 + \beta n_z^*)} \quad n_y = \frac{n_y^*}{\gamma(1 + \beta n_z^*)} \quad n_z = \frac{\beta + n_z^*}{1 + \beta n_z^*}$$

Essas relações definem a distribuição espacial da radiação no referencial do laboratório. No referencial de repouso, a radiação emitida pela partícula é distribuída de acordo com $\cos^2 \theta^*$ em relação à direção do movimento. Como consequência da alta velocidade da partícula é preciso considerar o efeito de contração do espaço na direção do movimento, que fará com que a radiação seja emitida, principalmente, na direção do movimento da partícula.

Com $n_z^* = \cos \theta^*$, $n_x^{*2} + n_y^{*2} = \sin^2 \theta^* \approx \theta^{*2}$, encontramos:

$$\theta \approx \frac{\sin \theta^*}{\gamma(1 + \beta \cos \theta^*)} \quad (19)$$

Ou seja, no referencial do laboratório o ângulo de abertura em que a radiação emitida está distribuída é bem menor.

$$\theta_a \approx \frac{1}{\gamma} \quad (20)$$

A figura abaixo exemplifica essa mudança na distribuição espacial da radiação emitida devido à alta velocidade da partícula.

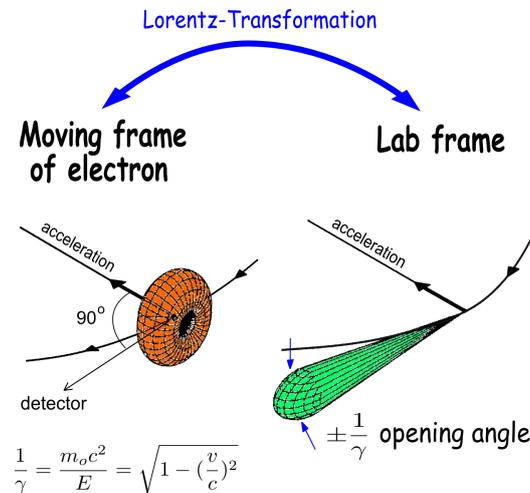


Figura 2: Emissão da radiação no referencial da partícula e no referencial do laboratório [5].

3.3 Potência da radiação síncrotron

No referencial da partícula, a potência emitida por ela será:

$$P = \int \mathbf{S}^* d\mathbf{A}^* = \frac{2q^2 ca^2}{3} = \frac{2q^2}{3c} \dot{\beta}^{*2} \quad (21)$$

Usando que no referencial da partícula $m\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{p}^*/d\tau$, onde $\tau = t/\gamma$ é o tempo no referencial L^* da partícula, tem-se

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}^*}{d\tau} \right)^2 \quad (22)$$

Para obter-se a potência a partir de quantidades observadas no referencial do laboratório, substitui-se a aceleração em termos do momento, e a partir do quadri-momento obtém-se:

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \left[\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 \right] \quad (23)$$

Como $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ e $E = \gamma mc^2$:

$$P = \frac{2q^2 \gamma^2}{3c} \left[\left(\frac{d\gamma \boldsymbol{\beta}}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \right] \quad (24)$$

$$= \frac{2q^2 \gamma^6}{3c} (\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]^2) \quad (25)$$

Dessa forma, a intensidade da radiação é fortemente determinada por sua trajetória, uma vez que a potência depende dos termos $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ e $\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}$. A equação (25) é conhecida como generalização de Liénard para a fórmula de Larmor e ela define a potência radiada por partículas aceleradas em alta velocidade. Ao se separar $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ em $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\parallel}$ e $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp}$ a potência separa-se em duas componentes também:

$$P_{\parallel} = \frac{2q^2 \gamma^6}{3c} \dot{\beta}_{\parallel}^2, \quad P_{\perp} = \frac{2q^2 \gamma^4}{3c} \dot{\beta}_{\perp}^2 \quad (26)$$

A primeira potência é obtida calculando-se com uma aceleração do tipo $\dot{\boldsymbol{\beta}} \propto \boldsymbol{\beta}$, e a segunda com uma aceleração do tipo $\dot{\boldsymbol{\beta}} \propto \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}$. Como estamos focando na radiação emitida por um elétrico em trajetórias circulares, convém reescrever a fórmula de P_{\perp} em termos do raio de curvatura da órbita ρ :

$$P_{\gamma} = \frac{2ce^2 \beta^4 \gamma^4}{3\rho^2} \quad (27)$$

3.4 Perda de energia por revolução

A perda de energia por volta no acelerador é obtida integrando a potência ao longo de toda a trajetória:

$$\Delta E = \oint P_{\gamma} dt \quad (28)$$

Para aceleradores circulares, o raio de envergadura é constante, de forma que o cálculo da energia perdida é facilitado, e tem-se:

$$\Delta E = \frac{4\pi e^2 \beta^3 \gamma^4}{3\rho} \quad (29)$$

3.5 Duração do feixe de luz

Como a trajetória é circular e o ângulo de abertura de emissão de radiação é reduzido, a cada revolução do elétron um observador irá receber um pulso de luz cuja duração é

$$\delta t = \frac{2\rho}{\beta c \gamma} - \frac{2\rho \sin(1/\gamma)}{c} \approx \frac{4\rho}{3c\gamma^3} \quad (30)$$

A filtragem desse pulso finito através da transformada de Fourier irá levar a uma frequência crítica ω_c , a partir da qual a intensidade da radiação começa a decair rapidamente. Essa frequência é dada por

$$\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho} \quad (31)$$

3.6 Espectro de radiação

De forma geral, a potência radiada por unidade de ângulo sólido é dada pela seguinte fórmula:

$$\frac{dP}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2 \quad (32)$$

A energia total que será radiada pela partícula por ângulo sólido é dada pela integral da potência no tempo:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{d\Omega} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(t)|^2 dt \quad (33)$$

Para se obter a energia radiada por frequência, é necessário realizar a transformada de Fourier no potencial vetor. Essa transformada irá levar a

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 dt = \int_0^{\infty} \frac{d^2 I(\omega, \hat{\mathbf{n}})}{d\omega d\Omega} \quad (34)$$

com

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = 2|\mathbf{A}(\omega)|^2$$

Assim, usando o potencial vetor de Liénard-Wiechert chega-se à distribuição de intensidade

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}) e^{i\omega(t - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}(t)/c)} dt \right|^2 \quad (35)$$

Para prosseguir, algumas aproximações e mudanças terão que ser feitas, uma vez que o resultado que se espera vai se tornando mais complexo.

Para a parte vetorial da integral:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}) = \beta \left[-\boldsymbol{\epsilon}_{\parallel} \sin\left(\frac{vt}{\rho}\right) + \boldsymbol{\epsilon}_{\perp} \cos\left(\frac{vt}{\rho}\right) \sin\theta \right] \quad (36)$$

onde $\boldsymbol{\epsilon}_{\parallel}$ é um versor correspondente à direção de polarização no plano da órbita e $\boldsymbol{\epsilon}_{\perp}$ corresponde à polarização perpendicular ao plano da órbita.

Para a parte exponencial:

$$\omega \left(t - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right) \simeq \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{r\rho^2} \right] \quad (37)$$

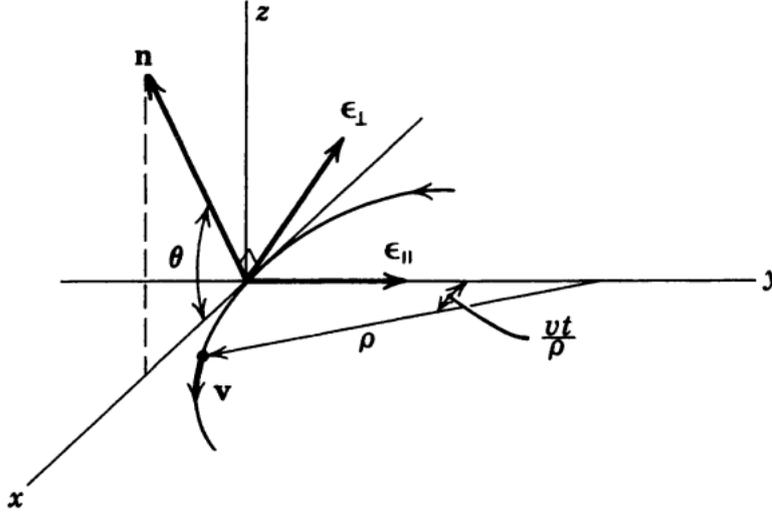


Figura 3: Direções de observação, e de polarizações. Fonte: JACKSON, John David. Classical electrodynamics. 1999.

O que leva a

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} |-\epsilon_{\parallel} A_{\parallel}(\omega) + \epsilon_{\perp} A_{\perp}(\omega)|^2 \quad (38)$$

As componentes paralelas e perpendiculares do potencial vetor são aproximadamente dadas por

$$A_{\parallel}(\omega) \simeq \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{r \rho^2} \right] \right\} dt \quad (39)$$

$$A_{\perp}(\omega) \simeq \theta \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{r \rho^2} \right] \right\} dt \quad (40)$$

Fazendo-se a mudança de variável

$$x = \left[\frac{ct}{\rho(\gamma^{-2} + \theta^2)^{1/2}} \right]$$

e a inserção do parâmetro

$$\xi = \frac{\omega \rho}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)$$

e assim obtém-se para a distribuição de densidade:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega \rho}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{\gamma^{-2} + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right] \quad (41)$$

onde a primeira função de Bessel corresponde à radiação polarizada no plano da órbita e a segunda à radiação polarizada perpendicular ao plano da órbita. Dessa forma, a radiação síncrotron é fortemente polarizada no plano da órbita, mas não totalmente.

Ao integrar a distribuição de densidade sobre todos os ângulos, obtém-se o espectro da radiação síncrotron:

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{\sqrt{2} e^2 \gamma}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x') dx' \quad (42)$$

E normalizando-se pela energia total perdida por revolução ($I = 4\pi e^2 \beta^3 \gamma^4 / 3\rho$):

$$\frac{1}{I} \frac{dI}{d\Omega} = S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x') dx' \quad (43)$$

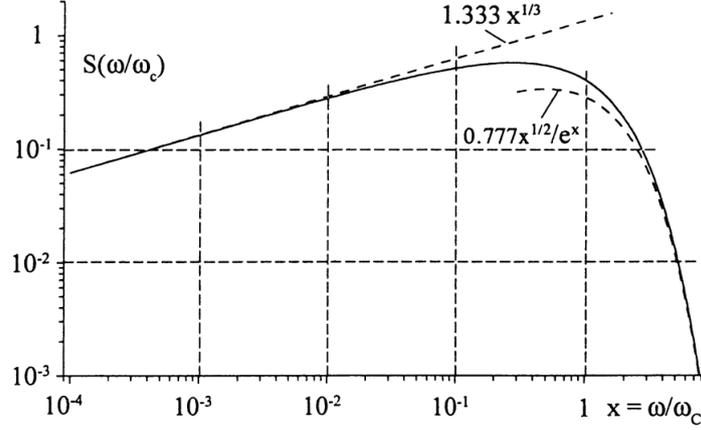


Figura 4: Função universal do espectro de radiação síncrotron $S(\omega/\omega_c)$

Referências

- [1] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Re-published by Cambridge University Press in 2017. Boston, MA: Pearson, 2013. DOI: 1108420419.
- [2] Aaron Parsons. *The Basics of Synchrotron Emission.* URL: <https://www.youtube.com/watch?v=FnYNjKabmxU&t=2s>.
- [3] Helmut Wiedemann. *Particle accelerator physics; 3rd ed.* Berlin: Springer, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-49045-6.
- [4] Aaron Parsons. *Synchrotron Radiation.* URL: https://casper.astro.berkeley.edu/astrobaki/index.php/Synchrotron_Radiation#Spectrum.
- [5] URL: https://photon-science.desy.de/research/students/_teaching/primers/synchrotron_radiation/index_eng.html.