

# Propriedades eletromagnéticas da radiação Vavilov-Cherenkov em meios metamateriais com índice de refração negativo

Universidade de São Paulo – Instituto de Física de São Carlos  
7600035 – Eletromagnetismo Avançado

Acompanhamento 3 – Grupo Noether (N)

Bruna L. Fermiano, Henrique G. Pinto, Julia N. Croce, Matheus L. O. Pena, Tales L. Mundo

## I. O EFEITO VAVILOV-CHERENKOV

### A. Noções gerais

O efeito Vavilov-Cherenkov (ou simplesmente efeito Cherenkov) é um fenômeno que ocorre quando um feixe de partículas carregadas, como elétrons, por exemplo, viaja em um meio dielétrico com uma velocidade superior à que a luz possui nesse mesmo meio, o que é responsável por gerar radiação com um característico brilho azulado intenso. Tal fenômeno foi melhor estudado pelo físico russo Pavel Cherenkov em 1934, sob a supervisão de Sergey Vavilov, porém já havia sido constatado antes por Marie Curie, em 1910, e Lucien Mallet, em 1926, que notaram o mesmo brilho citado se originando em soluções contendo o elemento químico Rádio. Atualmente, a radiação Cherenkov é comumente observada em reatores nucleares ativos, como mostra a figura abaixo, e possui inúmeras aplicações, como por exemplo na detecção de astropartículas e até mesmo em processos de imageamento médico.

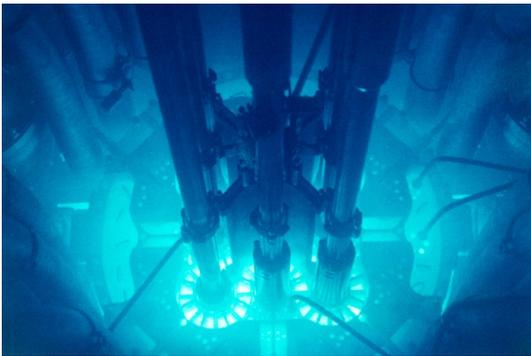


Figura 1. Reator nuclear ativo produzindo radiação Cherenkov. (Fonte: Idaho National Laboratory)

A disparidade entre as velocidades tanto do feixe de partículas quanto da luz existe pois a propagação de uma onda eletromagnética, em um determinado material, é definida de acordo com os parâmetros de permissividade elétrica ( $\epsilon$ ) e de permeabilidade magnética ( $\mu$ ), sendo que esses são distintos daqueles associados ao espaço livre ( $\epsilon_0$  e  $\mu_0$ ), o que acarreta uma redução na velocidade da luz equivalente ao inverso do índice de refração ( $n$ ) do meio.

Desse modo, supondo que o feixe citado atravessasse uma interface entre o vácuo e um dielétrico arbitrário (Figura 2), podemos verificar o fato descrito por meio da formulação

$$n = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{c_m} \implies c_m = \frac{c}{n} \quad (1)$$

em que  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  é a velocidade da luz no vácuo, e  $c_m = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$  é a velocidade da luz no meio dielétrico<sup>1</sup>. Com isso, a relação (1) demonstra puramente que a existência de elementos que se deslocam com velocidades dentro das condições  $c_m < v < c$  é permitida e, além disso, não viola nenhum limite relativístico.

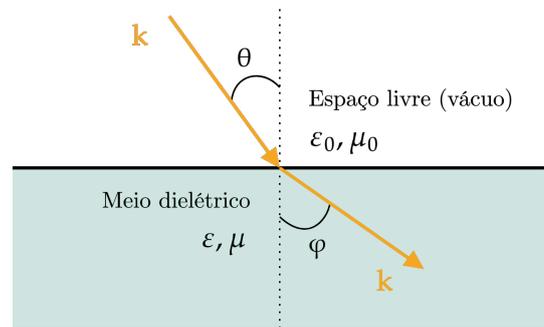


Figura 2. Refração de um feixe luminoso no vácuo que incide sobre uma interface dielétrica. (Fonte: Elaborado pelos autores)

Fora todos esses detalhes, o efeito Cherenkov possui ainda um análogo macroscópico: o efeito Mach. Este ocorre quando objetos (como projéteis, alguns aviões e até pontas de chicotes, por exemplo) se deslocam com uma velocidade superior à do som. Nessa circunstância, o objeto ultrapassa as frentes de onda que gera, fazendo com que essas se acumulem e interfiram construtivamente ao longo do trajeto, o que forma uma região cônica denominada “cone de Mach”. Um observador que avista a passagem de um objeto sob essas condições não é capaz inicialmente de detectar nenhum som, porém, quando é finalmente “atingido” pelo cone, é capaz de ouvir um grande estrondo, que por sua vez é denominado “boom sônico”. Nesse aspecto, vemos que o efeito Cherenkov é similar ao efeito Mach: os campos gerados pela carga polarizam as moléculas do material dielétrico que, ao voltarem para o estado fundamental, emitem luz. A carga, por viajar mais rápido que essa emissão no meio, ultrapassa as frentes de onda luminosa, que se acumulam e interferem construtivamente gerando um cone com geometria equivalente ao cone de Mach.

### B. Fenomenologia básica

A emissão de feixes sob as circunstâncias descritas na seção anterior gera uma série de efeitos, e para uma melhor compreensão desses, analisemos inicialmente apenas uma carga pontual  $q$

<sup>1</sup>A razão  $\mu \epsilon / \mu_0 \epsilon_0$  pode ser convenientemente simplificada para  $\mu' \epsilon'$  por uma questão de notação

se movendo linearmente sobre um eixo bem definido no espaço livre, com velocidade constante  $v < c_m$ . Do eletromagnetismo, sabemos que tal carga produzirá uma série de campos elétricos ( $\mathbf{E}$ ) e magnéticos ( $\mathbf{B}$ ), de modo que a informação dos mesmos se propagará esfericamente pelo espaço na velocidade da luz, sendo capaz de alcançar um determinado ponto  $P$  após um certo período de tempo. Um detector sobre essa localização não será capaz de medir imediatamente um campo gerado em um dado instante  $t$ , mas sim um que foi produzido em um instante retardado  $t_r < t$ , como representado na figura abaixo.

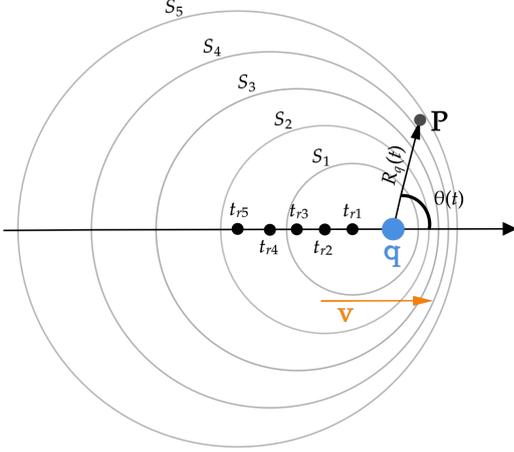


Figura 3. *Campos produzidos por uma partícula carregada se deslocando pelo espaço livre com velocidade constante.* (Fonte: Elaborado pelos autores com base em [1])

Os elementos  $R_q(t)$  e  $\theta(t)$  são termos radiais e angulares, respectivamente, responsáveis por mapear pontos de interesse no espaço, em meio às superfícies esféricas de informação ( $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ ), a partir do ponto em que a carga  $q$  se encontra em um determinado instante  $t$ .

Caso a partícula acesse um meio material e sua velocidade ultrapasse  $c_m$ , a geometria de propagação se deforma, o que origina zonas específicas que são afetadas pelas emissões da carga de modos distintos, como indicado a seguir.

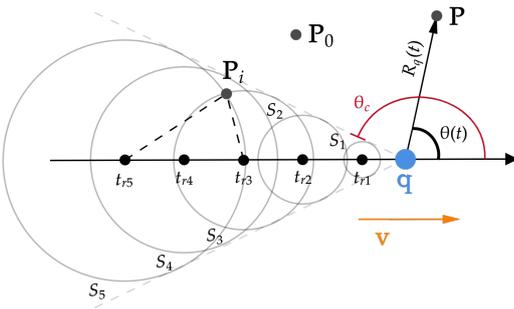


Figura 4. *Deformação da estrutura de propagação dos campos produzidos por uma partícula com velocidade  $v > c_m$ .* (Fonte: Elaborado pelos autores com base em [1])

Nessa construção, detectores tanto em  $P_0$  quanto em  $P$  não recebem nenhuma informação sobre os campos até que as frentes das superfícies esféricas os atinjam, enquanto que observadores fixos em  $P_i$  (pontos de interseção das regiões  $S_i$ ) recebem informações simultâneas de dois instantes retardados  $t_{r_i}$  distintos. Ademais, o parâmetro  $\theta_c$ , que indica diretamente o grau de abertura da região formada com respeito ao eixo de deslocamento da partícula, é definido como

$$\theta_c = \pi - \arcsin\left(\frac{c_m}{v}\right) \quad (2)$$

sendo portanto dependente dos termos de velocidade dos elementos e restrito de acordo com a relação  $\pi/2 < \theta_c < \pi$ , que nesse ponto nos gera dois resultados relevantes:

- 01.) Quanto maior for a velocidade da partícula se comparada a  $c_m$ , mais  $\theta_c$  se aproximará de  $\pi$ , o que consequentemente tornará a região cônica mais estreita.

$$\pi - \arcsin\left(\frac{c_m}{v}\right) ; \quad v \rightarrow c \implies \theta_c \rightarrow \pi \quad (3)$$

- 02.) Quanto menor for a velocidade da partícula se comparada a  $c_m$ , mais  $\theta_c$  se aproximará de  $\pi/2$ , o que consequentemente tornará a região cônica mais ampla.

$$\pi - \arcsin\left(\frac{c_m}{v}\right) ; \quad v \ll c_m \implies \theta_c \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

## II. METAMATERIAIS E MEIOS COM ÍNDICE DE REFRAÇÃO NEGATIVO

### A. Introdução aos metamateriais

Dentre os diversos materiais sintéticos capazes de serem construídos atualmente, existem aqueles conhecidos como metamateriais, que são objetos capazes de manifestar características não existentes na natureza, tais como um coeficiente de Poisson negativo, rigidez negativa, índice de refração negativo, entre outros. Tipicamente, tais propriedades são obtidas através de métodos de microfabricação que, nesse contexto, são responsáveis por produzirem estruturas periódicas complexas em escalas extremamente reduzidas, permitindo ainda que tais elementos operem idealmente para determinados comprimentos de onda.

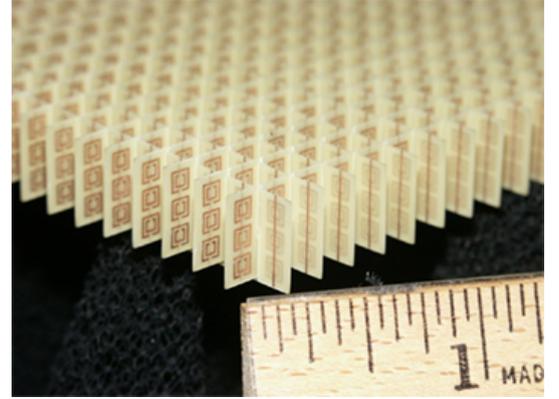


Figura 5. *Fotografia de um metamaterial com estrutura periódica macroscópica.* (Fonte: [2])

Nos restringindo agora aos metamateriais com índice de refração negativo, temos que esses foram inicialmente teorizados em 1967 pelo físico ucraniano Victor Veselago. Em seu trabalho, o então pesquisador sugeriu que a existência de materiais sintéticos cujos parâmetros de permissividade elétrica e de permeabilidade magnética fossem negativos induziria diretamente a existência de um índice refrativo descrito alternativamente por  $n = -\sqrt{\mu'\epsilon'}$  [3], que por sua vez seria responsável pela alteração de efeitos eletromagnéticos na matéria já conhecidos na época. Essa ideia, apesar de não muito explorável experimentalmente em um primeiro momento por conta das limitações tecnológicas, abriu inúmeras portas não só para a possibilidade de fabricação de novos materiais, mas também para um estudo mais técnico de interações eletromagnéticas com a matéria.

Atualmente, existem diversas maneiras de se construir um metamaterial com  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$ , como por exemplo utilizando guias de onda com ressonadores metálicos operantes

em frequências abaixo da frequência de corte para modos transversos de campos do tipo  $TM_{11}$  [4].

Por fim, com o intuito de facilitar a organização das principais características dos metamateriais em termos das constantes de proporcionalidade do meio, certas literaturas constroem diagramas do tipo  $\mu \times \epsilon$  como a seguir

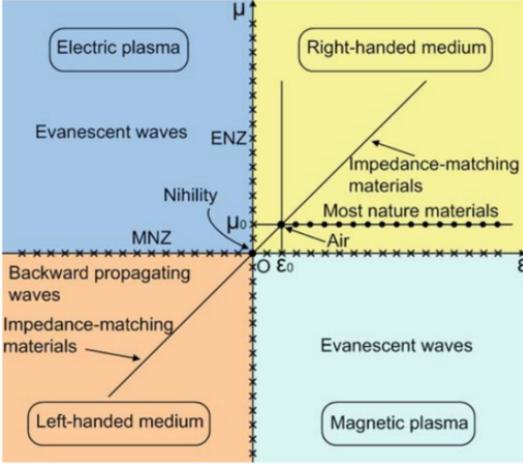


Figura 6. Diagrama  $\mu \times \epsilon$ . (Fonte: [5])

que são responsáveis por indicar graficamente as diversas combinações de valores existentes para tais parâmetros, sendo que nossos interesses se voltam diretamente para a região inferior esquerda, na qual se concentram as características dos elementos com  $\mu < 0$  e  $\epsilon < 0$ .

### B. Propriedades do índice de refração negativo

Estudando melhor o impacto que  $\epsilon$  e  $\mu$  possuem sobre uma região com dispersão espacial, somos capazes diretamente de verificar a fórmula de dispersão do meio, que diretamente relaciona a frequência angular, as constantes de proporcionalidade e o módulo do vetor  $\mathbf{k}$  de uma dada onda eletromagnética na matéria da seguinte forma:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon'_{ij} \mu'_{ij} - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j = 0 \quad (5)$$

Nesse caso,  $\epsilon'_{ij}$  e  $\mu'_{ij}$  são elementos tensoriais, o que caracteriza um meio anisotrópico, ou seja, um meio cujas propriedades variam de ponto em ponto. Com o intuito de simplificarmos nossos desenvolvimentos posteriores, tomemos o meio como sendo isotrópico, de modo que os coeficientes  $\epsilon'$  e  $\mu'$  serão constantes e independentes da região de análise, o que gera a seguinte alteração em (5):

$$\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \mu' - k^2 = 0 \implies k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \quad (6)$$

Torna-se notável, portanto, que quaisquer variações nesses parâmetros geram também alterações no próprio índice refrativo, como exibido em (1), e por conta disso, para avaliarmos a propagação de uma onda eletromagnética em um meio com  $n < 0$ , precisamos nos apoiar tanto nas equações de Maxwell quanto nas relações constitutivas (sem cargas livres):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} & \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (7)$$

Nesse ponto, é importante mencionar que, fora do espaço livre, torna-se mais conveniente trabalhar com o campo  $\mathbf{H}$ , pois o campo magnético  $\mathbf{B}$  não seria suficientemente sensível em um meio material a ponto de expressar as propriedades atreladas à  $\mu$ . Desse modo, utilizando campos na formulação de ondas planas monocromáticas,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \implies \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (8)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \implies \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

podemos reduzir as equações expressas em cada item de (7) da seguinte maneira:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} = \omega(\mu \mathbf{H}) \quad (9)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} = -\omega(\epsilon \mathbf{E})$$

A partir disso, vemos que caso  $\epsilon$  e  $\mu$  sejam simultaneamente positivos,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{k}$  formam entre si um sistema vetorial dextrogiro ( $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ), enquanto que caso  $\epsilon$  e  $\mu$  sejam simultaneamente negativos, teremos um sistema levogiro ( $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$ ).

Com essa noção, podemos retornar ao caso em que um feixe luminoso atravessa uma certa interface material (Figura 7), seguindo agora de um meio para outro que não necessariamente possuirá uma mesma orientação. Avaliando as condições de contorno usuais, vemos que:

$$\epsilon_A E_A^\perp = \epsilon_B E_B^\perp \quad \mu_A H_A^\perp = \mu_B H_B^\perp \quad (10)$$

$$\mathbf{E}_A^\parallel = \mathbf{E}_B^\parallel \quad \mathbf{H}_A^\parallel = \mathbf{H}_B^\parallel$$

Assumindo que o meio  $A$  é dextrogiro e o meio  $B$  é levogiro, temos então os seguintes valores para os parâmetros das regiões:

$$\begin{aligned} \epsilon_A &> 0 & \mu_A &> 0 \\ \epsilon_B &< 0 & \mu_B &< 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Das equações para  $\mathbf{E}_A^\parallel$  e  $\mathbf{H}_A^\parallel$ , nota-se que as componentes paralelas à superfície mantêm a mesma direção e sentido, enquanto que as equações de  $E_A^\perp$  e  $H_A^\perp$  mostram que a componente perpendicular, ao passar para o meio  $B$ , tem o seu sentido alterado de maneira contrária (tais efeitos podem ser também verificados para o vetor  $\mathbf{k}$ ), o que nos leva à seguinte representação:

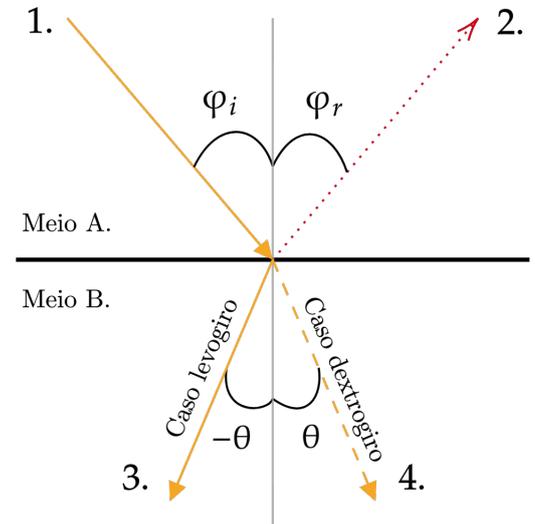


Figura 7. 1.) Onda incidente em um meio com  $n > 0$ ; 2.) Onda refletida; 3.) Onda refratada caso  $n < 0$ ; 4.) Onda refratada caso  $n > 0$ . (Fonte: Elaborado pelos autores com base em [3].)

### C. Fluxo de energia

Partindo do arranjo vetorial para os campos elétrico e magnético em meios tanto dextrogiros quanto levogiros, somos capazes de estudar o comportamento do fluxo da energia do sistema sob as condições propostas até então. Da teoria, temos que tal fluxo é devidamente descrito pelo vetor de Poynting, que em meios materiais é formulado como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0) e^{i2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (12)$$

Usualmente,  $\mathbf{S}$  irá compor uma trinca dextrogiro com  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , evidenciando assim que tanto o vetor de Poynting quanto o vetor diretor da onda eletromagnética estarão no mesmo sentido. No entanto, em meios levogiros,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{k}$  se arranjarão em sentidos opostos, o que alterará tanto o sentido quanto o funcionamento usual do fluxo energético, principalmente em fenômenos que envolvam radiação.

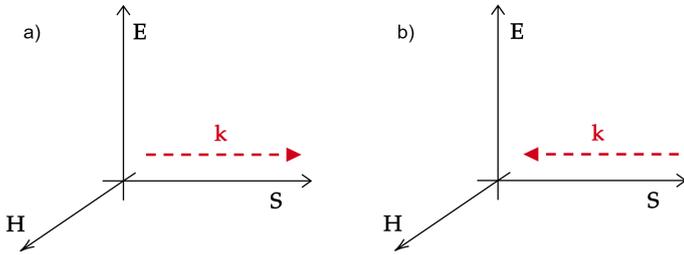


Figura 8. a) Base dextrogiro entre  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  ; b) Base levogiro entre  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  (Fonte: Elaborado pelos autores)

Fora isso, a orientação de  $\mathbf{k}$  coincide também com a da velocidade de grupo da onda e, portanto, em um metamaterial levogiro com um índice de refração negativo, somos capazes de observar uma velocidade de grupo negativa.

### III. EFEITO CHERENKOV REVERSO

Como visto até aqui, a existência de meios com índice de refração negativo torna possível que alguns dos principais mecanismos da propagação de ondas eletromagnéticas sejam alterados de maneiras não usuais. Ao analisarmos então a ocorrência do efeito Cherenkov nesses metamateriais, levando em consideração todas as características apresentadas anteriormente, como orientação levogira, velocidade de grupo negativa e uma inversão do fluxo de energia, temos então que esse se tornará "invertido", e por isso seu nome técnico torna-se efeito Vavilov-Cherenkov reverso (ou efeito Cherenkov reverso).

#### A. Inversão do mecanismo de radiação

Tomando um meio metamaterial levogiro com  $\varepsilon < 0$  e  $\mu < 0$  como ponto de partida, é possível observarmos que o arranjo vetorial alterado de  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{S}$  produzirá uma formatação distinta para a emissão de radiação enquanto uma partícula carregada se desloca com velocidades na condição  $c_m < v$ . Em comparação com o padrão original, é possível observar que a emissão Cherenkov reversa representará uma espécie de reflexão do padrão original visto em meios típicos, como indicado nas figuras em sequência:

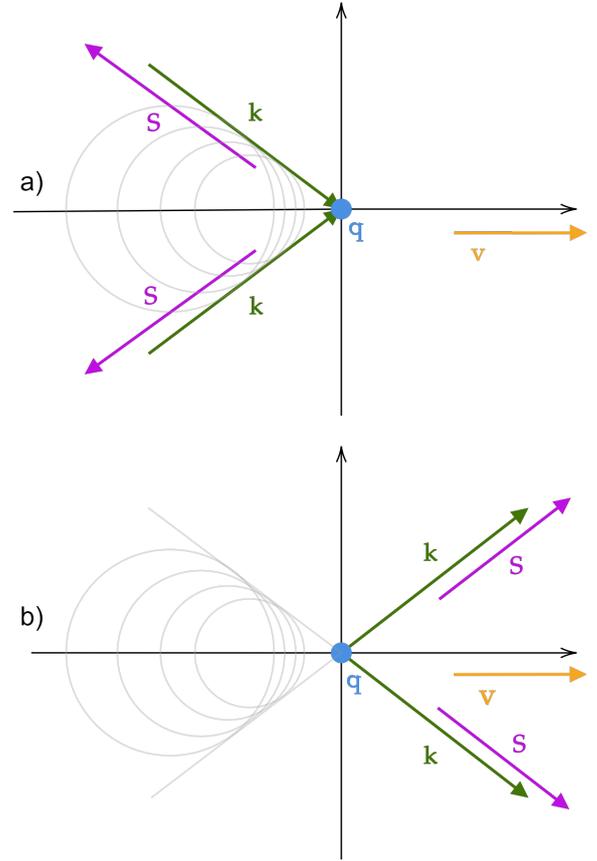


Figura 9. Mecanismo de radiação Cherenkov em a) meios levogiros b) meios dextrogiros. (Fonte: Elaborado pelos autores com base em [3])

Nas imagens,  $\mathbf{k}$  indica o sentido de propagação das frentes de onda, e  $\mathbf{S}$  indica o sentido de emissão.

Uma característica oriunda dessa nova estruturação do fenômeno diz respeito a um atraso entre a passagem da partícula e a observação da luz por ela emitida, que pode ser vista pela comparação entre as seguintes simulações:

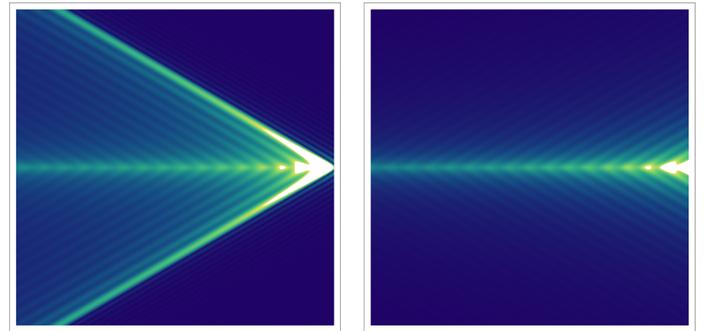


Figura 10. Esquerda: Cone de radiação Cherenkov em um meio com  $n > 0$ . Direita: Cone de radiação Cherenkov em um meio com  $n < 0$ . (Fonte: Elaborado pelos autores, com base em [6])

Em ambos os casos, a partícula encontra-se na extrema direita da figura, ou seja, no ponto mais luminoso, e sua velocidade encontra-se na mesma direção.

#### B. Espectro de emissão para $n < 0$

Historicamente, a forma como a luz é irradiada durante a ocorrência do efeito Cherenkov foi quantificada e qualificada pela primeira vez em 1937 pelos físicos russos Ilya Frank e Igor Tamm, sendo que a fórmula derivada por eles relaciona

a energia emitida pela partícula em movimento, por distância percorrida, ao índice de refração do meio<sup>2</sup> [7][6][8], como indicado a seguir:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial \omega} = \frac{q^2}{4\pi} \mu_0 \omega \left[ 1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)} \right] \quad (13)$$

Tal expressão é válida somente quando  $c^2/n^2(\omega) < v^2$ , ou seja, quando a velocidade da partícula carregada, no meio, é “superluminal”. Quando a velocidade é “subluminal”, os campos decaem exponencialmente, não havendo emissão de radiação.

Comparando o espectro de radiação para as duas versões do efeito, é notável que o espectro depende de  $n^2$ , gerando assim o mesmo tipo de emissão independentemente do sinal do índice refrativo. Para ilustrarmos esse fato, podemos utilizar em conjunto tanto o modelo de Drude para  $\epsilon'$  quanto o modelo de Lorentz para  $\mu'$ : [9][10].

$$\epsilon' = 1 - \frac{\omega_{ep}^2}{\omega^2 + i\omega\gamma_e} \quad (14)$$

$$\mu' = 1 - \frac{\omega_{mp}^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma_m}$$

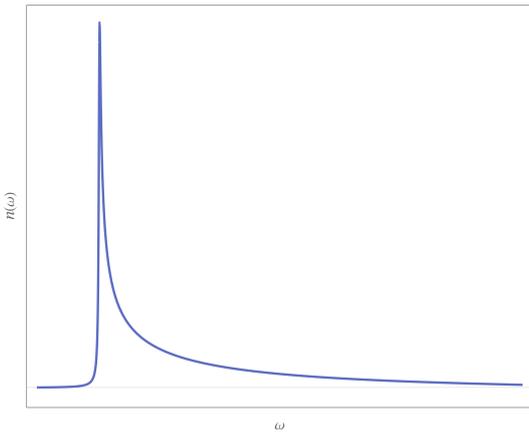


Figura 11. Índice de refração, em função da frequência, produzido pelo modelo adotado com  $n > 0$ . (Fonte: Elaborado pelos autores)

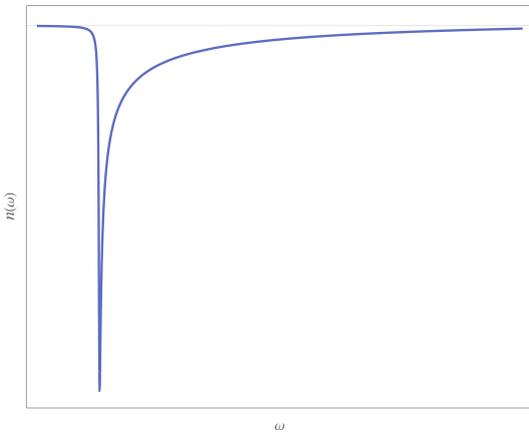


Figura 12. Índice de refração, em função da frequência, produzido pelo modelo adotado com  $n < 0$ . (Fonte: Elaborado pelos autores)

<sup>2</sup>Todas as referências encontradas para esse trabalho deduzem o espectro assumindo que  $\mu/\mu_0 \approx 1$ , de modo que a expressão utilizada aqui é puramente uma conversão pra o sistema internacional da expressão encontrada em [7]. A Wikipédia apresenta uma expressão semelhante a utilizada aqui, mas associada a  $\mu(\omega)$  ao invés de  $\mu_0$ , porém sem dedução alguma. Isso, por sua vez, geraria um problema, já que  $\mu(\omega) < 0$  em nossa análise, gerando um espectro negativo.

Nos gráficos acima, vemos a comparação entre o índice de refração tanto positivo quanto negativo em função da frequência angular da onda eletromagnética.

Quando inserimos os índices de refração gerados pelos modelos indicados na equação de Frank-Tamm, somos capazes de obter o espectro ilustrado na próxima figura. Em ambos os casos, frequências mais altas de radiação contribuem mais para a emissão de energia da partícula carregada, o que por sua vez explica o intenso brilho azulado capaz de ser observado durante a ocorrência do fenômeno.

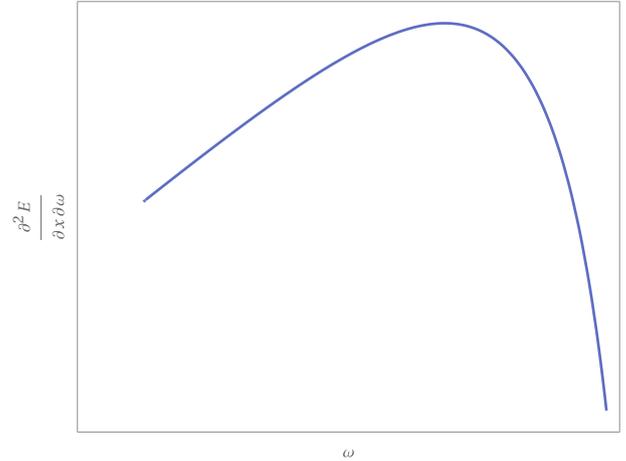


Figura 13. Espectro da radiação Cherenkov produzido pelo modelo adotado. A dependência do quadrado do índice de refração faz com que ambos os espectros sejam iguais. (Fonte: Elaborado pelos autores)

#### IV. REFERÊNCIAS

- [1] G. S. Smith, *An introduction to classical electromagnetic radiation*. Cambridge University Press, 1997.
- [2] Wikipedia, “Metamaterial,” <https://en.wikipedia.org/wiki/Metamaterial>, [Online; acessado em 23-11-2021].
- [3] V. G. Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ,” *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, no. 4, pp. 509–514, apr 1968. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1070/pu1968v010n04abeh003699>
- [4] Z. Duan, X. Tang, Z. Wang, Y. Zhang, X. Chen, M. Chen, and Y. Gong, “Observation of the reversed cherenkov radiation,” *Nature Communications*, 2017.
- [5] J. Tie, D. Smith, and L. Ruopeng, *Metamaterials: Theory, Design and Application*. Springer, 2010.
- [6] A. P. Kobzev, “The mechanism of vavilov-cherenkov radiation,” *Physics of Particles and Nuclei*, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1134/S1063779610030044>
- [7] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics; 3rd ed.* New York, NY: Wiley, 1998. [Online]. Available: <https://cds.cern.ch/record/100964>
- [8] A. Curcio, M. Anania, F. Bisesto, M. Botton, M. Castellano, E. Chiodroni, A. Cianchi, M. Ferrario, M. Galletti, D. Giulietti *et al.*, “Electro-optical detection of coherent radiation induced by relativistic electron bunches in the near and far fields,” *Physical Review Applied*, vol. 9, no. 2, p. 024004, 2018.
- [9] H. Chen and M. Chen, “Flipping photons backward: reversed cherenkov radiation,” *Materials Today*, vol. 14, no. 1-2, pp. 34–41, 2011.
- [10] G. Lubkowski, R. Schuhmann, and T. Weiland, “Extraction of effective metamaterial parameters by parameter fitting of dispersive models,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 49, no. 2, pp. 285–288, 2007.