

MAP 3122: Métodos Numéricos e Aplicações

Prova de recuperação 3 - 05/05/2021

(Métodos para EDOs & Raízes de equações)

Prof. Antoine Laurain

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Calculadora e notas de aula são permitidos. **Justifique suas respostas e verifique seus cálculos.**

Exercício 1. (2.5 pontos) Consideramos a função

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{x^2} \right).$$

1. Estude as variações de ϕ no intervalo $[0, +\infty)$ e deduz que a função possui único ponto fixo x^* positivo.
2. Determine θ tal que para todo $x_0 \in [\theta, 3]$ a sequência $x_{k+1} = \phi(x_k)$ convirja para x^* (justifique a resposta usando um resultado do curso).
3. Estime quantas iterações são necessárias para se obter um erro menor que 10^{-2} na determinação de x^* a partir de $x_0 = 3$.
4. Calcule x_1 e x_2 a partir de $x_0 = 3$ e encontre uma estimativa para o erro $|x_2 - x^*|$.

Exercício 2. (2.5 pontos) Consideramos a EDO de segunda ordem seguinte:

$$y''(t) = -ty(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

1. Transforme essa EDO em um sistema de primeira ordem.
2. Consideramos o método numérico seguinte:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4} f(t_i, w_i) + \frac{3h}{4} f \left(t_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{2h}{3} f(t_i, w_i) \right),$$

onde $w_i = (w_{i,1}, w_{i,2})$ é um vetor. Aplique este método para aproximar y e y' , escrevendo a iteração correspondente na forma $w_{i+1} = M_i w_i$, onde M_i é uma matriz 2×2 .