

Exercício (Polinômio interpolador na forma de Newton)

Enunciado: Determine o polinômio de grau ≤ 3 que interpola a função $f(x) = 4^x$ nos pontos $x = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$, pelo método de diferenças divididas. Use o polinômio para aproximar o valor de $\sqrt[3]{4}$ e estime o erro segundo a fórmula: $f(x) - p_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)$

Solução: Vamos montar a tabela de diferenças divididas para calcular o polinômio interpolador na forma de Newton.

x_i	$f[x_i]$	1a. Diferença dividida	2a. Diferença dividida	3a. Diferença dividida
-1	$4^{-1} = \frac{1}{4}$			
$-\frac{1}{2}$	$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2} - (-1)} = \frac{1}{2}$	$\frac{1 - \frac{1}{2}}{0 - (-1)} = \frac{1}{2}$	
0	$4^0 = 1$	$\frac{1 - \frac{1}{2}}{0 - (-\frac{1}{2})} = 1$	$\frac{2 - 1}{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})} = 1$	$\frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - (-1)} = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	$4^{\frac{1}{2}} = 2$	$\frac{2 - 1}{\frac{1}{2} - 0} = 2$		

Então o polinômio interpolador é:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f[x_0] + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ &= \frac{1}{4} + \frac{(x+1)}{2} + \frac{(x+1)(x+\frac{1}{2})}{2} + \frac{(x+1)(x+\frac{1}{2})x}{3} \end{aligned}$$

• Para aproximar o valor de $\sqrt[3]{4}$, observamos que $f\left(\frac{1}{3}\right) = 4^{1/3} = \sqrt[3]{4} \simeq p_3\left(\frac{1}{3}\right)$

• Calculamos $p_3\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 1,5956790 \simeq \sqrt[3]{4}$

• Agora vamos calcular o erro feito nesta aproximação.

Usando a fórmula dada no enunciado, obtemos

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{3}\right) - p_3\left(\frac{1}{3}\right) \right| \leq \frac{\max_{z \in [-1, \frac{1}{2}]} |f^{(4)}(z)|}{4!} \left| \left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) \right|$$

• Precisamos calcular $f^{(4)}(x)$. Temos:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 4^x = (e^{\ln 4})^x = e^{x \ln 4} \\ f'(x) &= (\ln 4) e^{x \ln 4} \\ f''(x) &= (\ln 4)^2 e^{x \ln 4} \\ f^{(3)}(x) &= (\ln 4)^3 e^{x \ln 4} \\ f^{(4)}(x) &= (\ln 4)^4 e^{x \ln 4} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{claramente, } e^{x \ln 4} \text{ é} \\ &\text{uma função crescente,} \\ &\text{pois } \ln 4 > 0. \text{ Então} \\ &\max_{z \in [-1, \frac{1}{2}]} |f^{(4)}(z)| = \left| f^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\ &= (\ln 4)^4 e^{\frac{\ln 4}{2}} = 2(\ln 4)^4 \\ &\simeq 7,3867 \end{aligned}$$

• Então obtemos

$$\left| f\left(\frac{1}{3}\right) - p_3\left(\frac{1}{3}\right) \right| \leq \frac{2(\ln 4)^4}{4!} \left| \left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) \right| \simeq 0,019$$

• Observação: O erro exato é (usando a calculadora) para calcular $4^{1/3}$

$$\left| 4^{1/3} - p_3\left(\frac{1}{3}\right) \right| \simeq 0,008278$$

Como $0,008278 < 0,019$, nossa estimativa faz sentido.