Exemplo de aplicação do met. de Newton, com precisão pré-fixada

Ao se administrar A mg de um medicamento a um paciente, a concentração deste no sangue do paciente (em mg/L) é dada aproximadamente por uma função do tipo

$$c(t) = A\alpha t e^{-\beta t}$$

onde t é o tempo em horas após a administração da medicação ao paciente.

São administrados 500 mg de um medicamento a um paciente, com os parâmetros $\alpha = 0{,}066$ e $\beta = 0.2$.

(a) Esboce o gráfico de c(t) nas primeiras 24 horas

$$c(t) = 500 \times 0{,}066\, t e^{-0{,}2t} = 33 t e^{-0{,}2t}$$

$$c'(t) = A\alpha e^{-\beta t} - \beta A\alpha t e^{-\beta t} = A\alpha e^{-\beta t}(1-\beta t)$$

$$c''(t) = A\alpha e^{-\beta t}\left(-\beta(1-\beta t) - \beta\right)$$

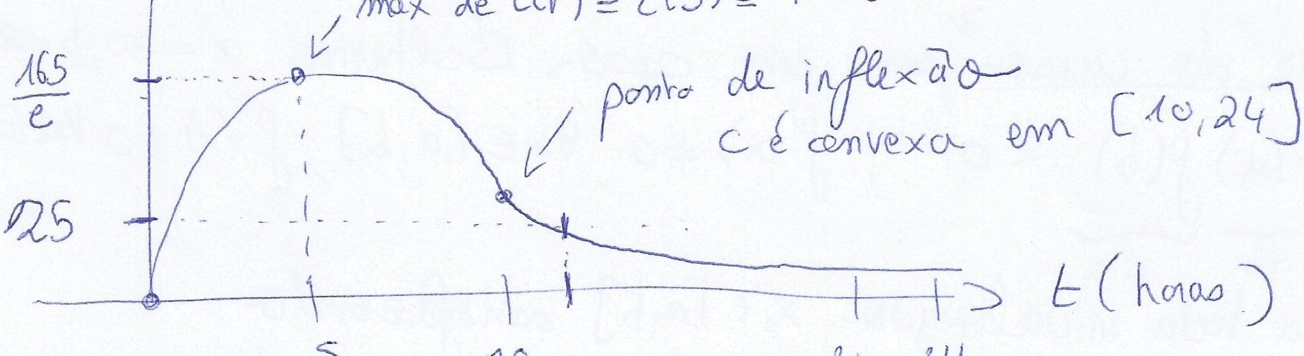
$$= A\alpha e^{-\beta t}\left(-2\beta + \beta^2 t\right)$$

$$c'(t) = 0 \iff 1 - \beta t = 0 \iff t = \frac{1}{\beta} \quad \left(\iff t = 5 \text{ para } \beta = 0.2\right)$$

$$c''(t) \geq 0 \iff -2\beta + \beta^2 t \geq 0 \iff t \geq \frac{2}{\beta} \quad \left(\iff t \geq 10 \text{ para } \beta = 0{,}2\right)$$

Temos também $c(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

max de $c(t) = c(5) = A\alpha 5 e^{-\beta 5} = 165 e^{-1}$



Como $c''(t) \leq 0$ em $[0,10]$, c é concava em $[0,10]$ e $t=5$ é um máximo de $c(t)$

(b) A concentração do medicamento não deveria baixar de 25 mg/L. Utilize o método de Newton para determinar em que instante isto ocorrerá (com erro menor que 1 segundo), caso nova dose de medicamento não seja aplicada ao paciente. Justifique a CV do método de Newton.

Solução: Vamos definir a função $f(t) = c(t) - 25$

Como $f'(t) = c'(t) = A\alpha e^{-\beta t}(1-\beta t)$

temos $f'(t) \geq 0$ para $t \leq \frac{1}{\beta}$ e $f'(t) \leq 0$ para $t \geq \frac{1}{\beta}$

Então $f(t)$ crescente em $[0, \frac{1}{\beta}] = [0,5]$ e $f(t)$ decrescente em $[\frac{1}{\beta}, 24] = [5,24]$. Queremos que a concentração não baixa de 25 mg/L, isto é, queremos $f(t) \geq 0$ na parte decrescente $[5,24]$ de $f(t)$. Como $f(t)$ é estritamente decrescente em $[5,24]$ tem uma única raiz t^* de f em $[5,24]$. É fácil calcular

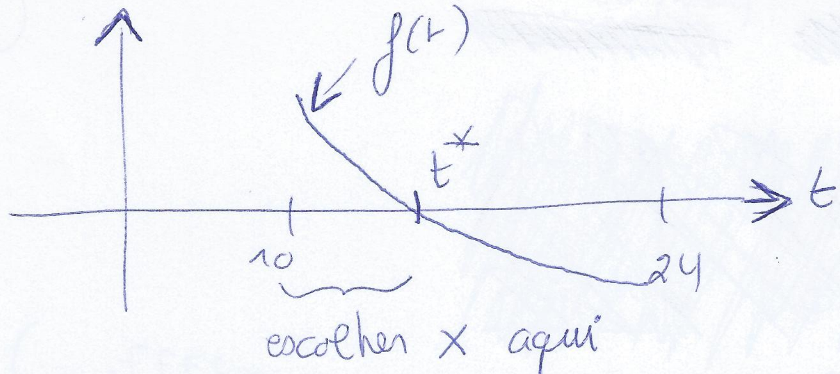
$$f(10) = c(10) - 25 = 330e^{-2} - 25 > \frac{330}{10} - 25 = 8 > 0.$$

Então a raiz $t^* \in [10,24]$.

Como $f''(t) = c''(t) \geq 0$ em $[10,24]$, podemos aplicar o teorema do curso para este caso. Escolhemos $a = 10$, $b = 24$, temos $\underbrace{f(a)}_{>0}\underbrace{f(b)}_{<0} < 0$, $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$, $f''(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$,

Então para toda inicialização $x_0 \in [a,b]$ satisfazendo $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$, a sequência x_k é monotônica e CV para o único zero x^* de f em $[a,b] = [10,24]$.

Temos $f''(t) > 0$ $\forall t \in [10,24]$, então basta escolher x_0 tal que $f(x_0) > 0$ para satisfazer a condição



então, como f é decrescente, precisamos escolher $x_0 \in [10, t^*)$ para ter $f(x_0) > 0$

Então basta escolher $x_0 = 10$, e a sequência x_k será crescente com $x_k \to x^*$

<u>Método de Newton</u>

$$t_{k+1} = t_k - \frac{f(t_k)}{f'(t_k)} = t_k - \frac{33 t_k e^{-0,2 t_k} - 25}{33 e^{-0,2 t_k}(1 - 0,2 t_k)}$$

$t_0 = 10$

- Queremos um erro menor que 1 segundo $= \frac{1}{3600}$ horas então $\delta = \frac{1}{3600}$ é a precisão pré-fixada.

Definimos $\phi(t) = -\frac{f(t)}{f'(t)}$, e vamos usar o <u>algoritmo de ponto fixo com precisão prefixada para sequências crescentes.</u>

$t_0 = 10$

$t_1 = t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = 14,402230228$

$\phi(t_1 + 2\delta) = \phi\left(14,402230228 + \frac{2}{3600}\right) \simeq 0,47 > 0$ continuamos

$t_2 = t_1 - \frac{f(t_1)}{f'(t_1)} = 14,8811313415$

$\phi(t_2 + 2\delta) \cong 0,01 > 0$ continuamos

$t_3 = t_2 - \frac{f(t_2)}{f'(t_2)} = 14,8924144421186$

$\phi(t_3+2\delta) = -0{,}0005 < 0$ paramos

RETORN

$$\tilde{t} = t_3 + 2\delta = 14{,}8926922 \qquad (\delta \simeq 0{,}0002777\ldots)$$

$\tilde{t}$ é a aproximação de t^* satisfazendo

$$|\tilde{t} - t^*| \le \delta = \frac{1}{3600}$$

De fato, podemos verificar que

$$t^* = 14{,}892420717138 \qquad \text{(12 decimais exatas)}$$

$$|\tilde{t} - t^*| \simeq 0{,}0002715 \le \delta \simeq 0{,}0002777$$