

**MAP3122: Métodos numéricos e aplicações**  
**Quadrimestral 2021**

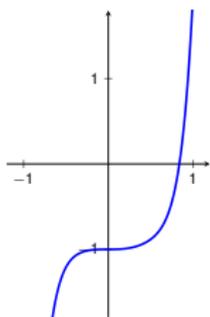
Antoine Laurain

**Raizes de equações**

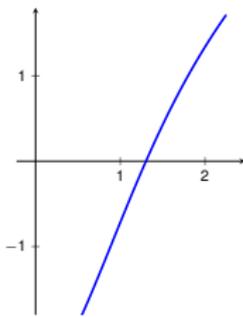
# Raízes de equações

- Em muitas aplicações precisamos resolver equações da forma  $f(x) = 0$ , onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.
- Uma solução  $x^*$  da equação  $f(x) = 0$  se chama **raiz** ou **zero** da função  $f$ .
- Veremos métodos para o caso em que  $n = 1$ .

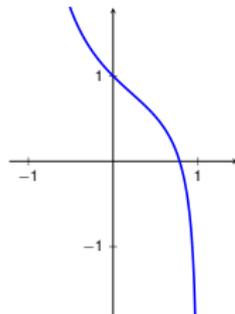
**Exemplo:** Estes métodos serão úteis para encontrar zeros de funções reais  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  difíceis de serem calculados analiticamente, tais como



(a)  $5x^7 - 3x^6 + x^3 - 1 = 0$



(b)  $x - e^{\cos(x)} = 0$  para  $0 \leq x \leq 2$



(c)  $\frac{1 - \tan(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$  para  $0 \leq x \leq 1$ .

Figura: Em geral, é difícil determinar de forma analítica zeros de funções que são polinômios de alta ordem ou funções não lineares.

# Método da bisseção (pesquisa binária)

Esse método é o mais simples, mas o mais devagar para encontrar raízes de  $f$ .

---

## Algorithm 1: Método da bisseção

---

### Entradas:

- Os extremos  $a, b \in \mathbb{R}$  e uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua.
- Valores  $f(a)$  e  $f(b)$  satisfazendo  $f(a)f(b) < 0$ .
- $TOL$  uma tolerância e  $ITMAX$  um número máximo de iterações.

**Saída** :  $x^* \in [a, b]$  tal que  $|f(x^*)| \simeq 0$

Defina  $\ell_1 = a$ ,  $r_1 = b$  e  $k = 1$ ;

**Enquanto**  $k \leq ITMAX$  e  $|x_k - x_{k-1}| > TOL$  **faça**

    Calcule  $x_k = \frac{\ell_k + r_k}{2}$ ;

**se**  $f(x_k)f(\ell_k) > 0$  **então**

        |  $\ell_{k+1} \leftarrow x_k$  e  $r_{k+1} \leftarrow r_k$ ;

**senão**

        |  $r_{k+1} \leftarrow x_k$  e  $\ell_{k+1} \leftarrow \ell_k$ ;

**fim**

$k \rightarrow k + 1$

**fim**

---

### Observações:

- $f$  contínua e  $f(a)f(b) < 0 \implies$  existe pelo menos uma raiz.
- Se  $f$  tem mais de uma raiz, o algoritmo vai escolher uma.
- $|x_k - x_{k-1}| < TOL$  é um **critério de parada**. Critérios alternativos são:  $|f(x_k)| < TOL$  ou  $\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < TOL$  (para  $x_k \neq 0$ ).

# Método da bisseção (pesquisa binária)

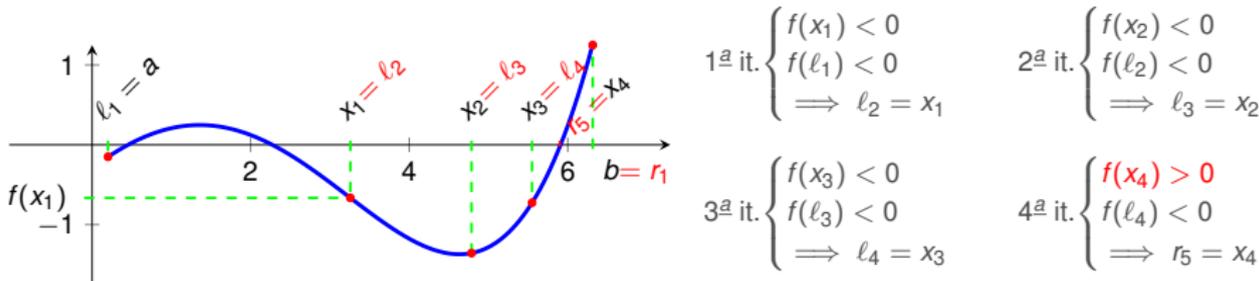
**Atenção!** O critério de parada  $|f(x_k)| < TOL$  pode levar a alguns problemas.

**Exemplo:** Para  $f(x) = (x - 1)^{10}$ , tem-se a raiz  $x^* = 1$ . Se definimos  $x_k = 1 + \frac{1}{k}$ , temos

$$f(x_k) = \frac{1}{k^{10}} < 10^{-3} \quad \text{para } k \geq 2$$

mas  $|x^* - x_k| < 10^{-3}$  exige  $k > 1000$  iterações para o método da bisseção.

**Observação:** *ITMAX* é útil para evitar um *loop* infinito.



**Teorema (Taxa de convergência para o método da bisseção):** Seja  $f \in C^0([a, b])$ , com  $f(a)f(b) < 0$ . O método da bisseção gera uma sequência  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  que converge para uma raiz  $x^*$  de  $f$ , com a taxa

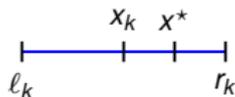
$$|x_k - x^*| \leq \frac{b - a}{2^k} \quad (k \geq 1).$$

# Método da bisseção (pesquisa binária)

Demonstração do teorema: Temos

$$r_{k+1} - \ell_{k+1} = \begin{cases} r_k - x_k = r_k - \frac{\ell_k + r_k}{2} = \frac{r_k - \ell_k}{2}, \\ \text{ou} \\ x_k - \ell_k = \frac{\ell_k + r_k}{2} - \ell_k = \frac{r_k - \ell_k}{2}. \end{cases}$$

Então  $r_{k+1} - \ell_{k+1} = \frac{r_k - \ell_k}{2} = \frac{r_1 - \ell_1}{2^k} = \frac{b-a}{2^k}$ .



Como  $x^* \in [\ell_k, r_k]$ ,  $\forall k \geq 1$  pois  $f(\ell_k)$  e  $f(r_k)$  têm sinais opostos, temos

$$x_k = \frac{\ell_k + r_k}{2} \implies |x_k - x^*| \leq \frac{r_k - \ell_k}{2} = \frac{b-a}{2^k}.$$

## Método da bisseção (pesquisa binária)

**Exemplo:** Seja  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ . Determinar o número mínimo de iterações necessárias para resolver  $f(x) = 0$  com uma precisão de  $10^{-3}$ , isto é, queremos  $|x_k - x^*| < 10^{-3}$ , com  $f(x^*) = 0$ .

**Solução:** Para garantir essa precisão, usando o teorema de convergência para o método da bisseção, precisamos encontrar  $k$  tal que (usando  $b - a = 1$ )

$$|x_k - x^*| \leq \frac{b-a}{2^k} \leq 10^{-3} \implies \log_{10}(2^{-k}) \leq \log_{10}(10^{-3})$$

$$\implies -k \log_{10}(2) \leq -3 \implies k \geq \frac{3}{\log_{10}(2)} \simeq 9.96.$$

Assim, 10 iterações assegurarão uma aproximação com precisão  $10^{-3}$ . Na prática, obtemos  $x^* = 1,365230013$  (considerando 9 casas decimais) e  $|x_9 - x^*| \leq 10^{-4} < 10^{-3}$ . Já obtemos a precisão  $10^{-3}$  na iteração 9.

# Método do ponto fixo

## Pontos fixos

- Dizemos que  $x^*$  é um ponto fixo de  $g \iff g(x^*) = x^*$ .
- Achar pontos fixos equivale à procurar raízes de funções.

## Conversão de um problema de ponto fixo para um problema de raiz.

Seja  $g(x)$  dado e  $x^*$  um ponto fixo de  $g$ . Definimos

$$f(x) := x - g(x) \text{ então } x^* = g(x^*) \iff f(x^*) = 0.$$

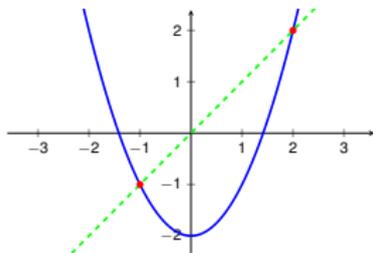
## Conversão de um problema de raiz para um problema de ponto fixo.

Seja  $f(x)$  dado e  $x^*$  uma raiz de  $f$ . Definimos

$$g(x) := x + a(x)f(x), \text{ com } a(x) \neq 0 \forall x \text{ então } f(x^*) = 0 \iff x^* = g(x^*)$$

Para métodos numéricos, queremos converter problemas de achar a raiz em problemas de ponto fixo.

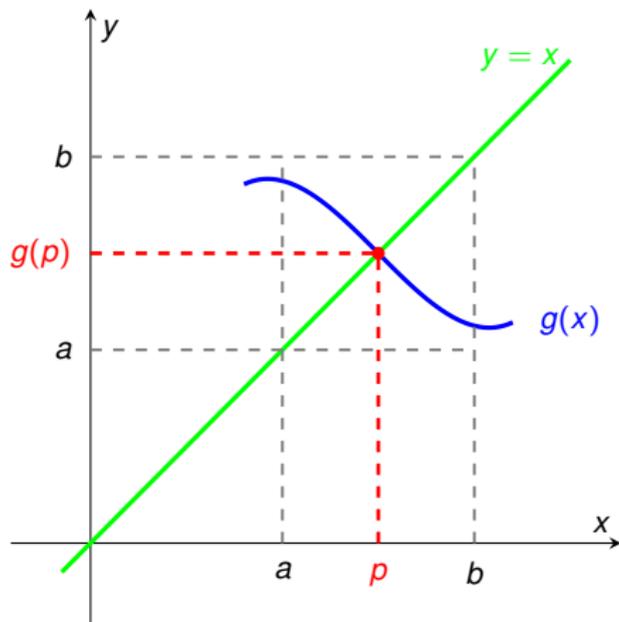
**Exemplo:** Dado  $g(x) = x^2 - 2$  para  $x \in [-2, 3]$ . Tem-se  $g(-1) = -1$  e  $g(2) = 2$  portanto, a função  $g$  tem dois pontos fixos. Graficamente, os pontos fixos são as interseções do gráfico de  $g$  e da reta  $y = x$ .



# Teorema de existência e unicidade de ponto fixo

## Teorema:

- (a) Se  $g \in \mathcal{C}([a, b])$  e  $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$ , então  $g$  tem um ponto fixo em  $[a, b]$ .
- (b) Se, adicionalmente,  $g'(x)$  existe  $\forall x \in (a, b)$  e uma constante real positiva  $k < 1$  existe tal que  $|g'(x)| \leq k, \forall x \in (a, b)$ , então o ponto fixo em  $[a, b]$  é único.



# Teorema de existência e unicidade de ponto fixo

## Demonstração do teorema de existência e unicidade de ponto fixo:

(a) Se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$ , então  $g$  tem ponto fixo. ✓

Se não, então  $g(a) > a$  e  $g(b) < b$  pois  $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$ . A função  $h(x) = g(x) - x$  é contínua em  $[a, b]$  com  $h(a) = g(a) - a > 0$  e  $h(b) = g(b) - b < 0$ . Pelo teorema do valor intermediário, então existe  $p \in (a, b)$  tal que  $h(p) = 0 \implies g(p) = p$  ponto fixo de  $g$ .

(b) Se, adicionalmente,  $|g'(x)| \leq k < 1, \forall x \in (a, b)$ . Suponha que  $p$  e  $q$  sejam ambos pontos fixos em  $[a, b]$ . Se  $p \neq q$ , o teorema do valor médio estabelece que

$$\exists \xi \in (p, q) \text{ (ou em } (q, p)) \text{ tal que } \frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi).$$

Assim,

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)| \cdot |p - q| \leq k|p - q| < |p - q| \quad (\text{Contradição!})$$

Portanto a hipótese  $p \neq q$  não pode ser verdadeira, então  $p = q$  e concluímos que o ponto fixo é único.

## Teorema de existência e unicidade de ponto fixo

**Exemplo:** Se  $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$  em  $[-1, 1]$  então

- O mínimo absoluto de  $g(x)$  em  $[-1, 1]$  é para  $x = 0$ ,  $g(0) = -\frac{1}{3}$ .
- O máximo absoluto de  $g(x)$  em  $[-1, 1]$  é para  $x = \pm 1$ ,  $g(\pm 1) = 0$

$$\implies g(x) \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \subset [-1, 1], \forall x \in [-1, 1].$$

Como  $g$  é contínua então  $|g'(x)| = \left|\frac{2x}{3}\right| \leq \frac{2}{3}$  em  $[-1, 1]$ . Nestas condições,  $g$  satisfaz as hipóteses do teorema, e tem um único ponto fixo em  $[-1, 1]$ .

- Esse ponto fixo é solução de

$$\begin{aligned}x = g(x) = \frac{x^2 - 1}{3} &\iff x^2 - 3x - 1 = 0 \\ \implies x &= \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \quad (\text{outra solução está fora de } [-1, 1]).\end{aligned}$$

- $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$  é um outro ponto fixo em  $[3, 4]$ , mas  $g$  não satisfaz as hipóteses do teorema em  $[3, 4]$ .

Isto mostra que as hipóteses do teorema são apenas suficientes, mas não necessárias, para garantir um ponto fixo.

# Método de iteração de ponto fixo

- Para aproximar um ponto fixo  $x^*$  de  $g$ , geramos uma sequência usando a iteração de ponto fixo seguinte ( $x_0$  é dado):

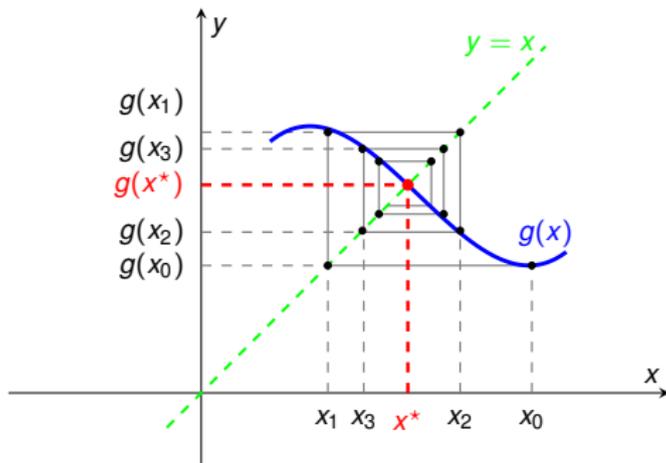
$$x_{k+1} = g(x_k), \quad \forall k \geq 1.$$

- Se  $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \hat{x}$  e  $g$  contínua, então

$$\hat{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} g(x_{k-1}) = g\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k-1}\right) = g(\hat{x})$$

$\implies \hat{x} = g(\hat{x})$  é um ponto fixo de  $g$ .

**Interpretação geométrica:**



# Método de iteração de ponto fixo

**Exemplo:** A função  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  tem uma única raiz em  $[1, 2]$ . Há uma infinidade de maneiras de transformar esta equação em uma equação do tipo  $g(x) = x$ . Mas tem poucas equações  $g(x) = x$  que vão gerar uma sequência  $x_k$  que converge rapidamente para um ponto fixo.

## Exemplo:

- (a) Para  $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$ , a sequência  $x_{k+1} = g_1(x_k)$  é divergente!
- (b) Para  $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$ , a sequência  $x_k$  não é bem definida pois aparece a raiz de um número negativo em alguma iteração.
- (c) Para  $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$ ,  $x_k$  converge em 30 iterações.
- (d) Para  $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$ ,  $x_k$  converge em 15 iterações.
- (e) Se  $x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$ , então a sequência  $x_k$  converge em 4 iterações.
  - ▶ A raiz correta é  $x^* = 1.365230013$  com 9 casas decimais exata.
  - ▶ Inicialização  $x_0 = 1.5$ .
  - ▶ O método (e) chama-se “método de Newton”, ele é o mais eficiente.

# Método de iteração de ponto fixo

**Teorema (convergência do método de ponto fixo):** Suponhamos  $g \in C^1([a, b])$ , com  $g(x) \in [a, b]$  para todo  $x \in [a, b]$ . Se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$|g'(x)| \leq M < 1, \quad \forall x \in [a, b]$$

então, para todo  $x_0 \in [a, b]$  a sequência  $x_{k+1} = g(x_k)$  converge para  $x^*$ , onde  $x^*$  é o ponto fixo único de  $g$  em  $[a, b]$ .

**Demonstração:** Sob essas hipóteses o teorema de existência e unicidade disse que o ponto fixo  $x^*$  é único em  $[a, b]$ . Temos  $x_{k+1} = g(x_k) \in [a, b]$  (ver hipóteses). Por indução, se  $x_0 \in [a, b]$ , então  $x_k \in [a, b]$ ,  $\forall k \geq 1$ . Depois temos

$$\begin{aligned} |x_k - x^*| &= |g(x_{k-1}) - g(x^*)| \\ &\leq \underbrace{|g'(\xi)|}_{\leq M} \cdot |x_{k-1} - x^*| \leq M|x_{k-1} - x^*|. \end{aligned}$$

A desigualdade acima é consequência do (TVM) para  $\xi \in [a, b]$ . Portanto,

$$\begin{aligned} |x_k - x^*| &\leq M^k |x_0 - x^*| \xrightarrow{\text{pois } M < 1} 0 \\ \implies \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k &= x^*. \end{aligned}$$

# Método de iteração de ponto fixo

**Corolário:** Temos as estimativas de erro seguinte (com  $x_0 \in [a, b]$ ):

1.  $|x_k - x^*| \leq M^k \max\{x_0 - a, b - x_0\}, \forall k \geq 1.$
2.  $|x_k - x^*| \leq \frac{M^k}{1-M} |x_1 - x_0|, \forall k \geq 1.$

**Demonstração:** Ver Burden-Faires, capítulo 22, Corolário 2.4.

**Observação:** A taxa de convergência depende de  $M^k$ , então quanto menor for  $M$ , mais rápido será a convergência.

**Exemplo:** Voltamos ao exemplo anterior com a equação

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0, \text{ em } [1, 2], \quad x^* = 1.365230013$$

- (a)  $|g'_1(x)| > 1 \forall x \in [1, 2]$  e a sequência  $x_k$  diverge.
- (b)  $|g'_2(1.365)| \simeq 3, 4$  e a sequência  $x_k$  não converge.
- (c)  $|g'_3(x)| \leq 0.66$  em  $[1, 1.5]$  e a sequência  $x_k$  converge em 30 iterações.
- (d)  $|g'_4(x)| \leq 0.15$  em  $[1, 2]$  e a sequência  $x_k$  converge em 15 iterações.
- (e) A convergência é a mais rápida com  $g_5(x)$  (apenas 4 iterações), esse é o método de Newton. Para este caso precisamos de mais ferramentas para analisar a convergência.

# Método de Newton

- $f \in C^2([a, b])$
- Expansão de Taylor em torno de  $\hat{x}$ :

$$f(x) = f(\hat{x}) + (x - \hat{x})f'(\hat{x}) + \frac{(x - \hat{x})^2}{2} f''(\xi_x) \text{ com } \xi_x \in [x, \hat{x}]$$

- Seja  $x^*$  uma raiz de  $f$ . Suponhamos  $|x^* - \hat{x}|$  “pequeno” e  $f'(\hat{x}) \neq 0$ . Então escolhendo  $x = x^*$  obtemos

$$f(x^*) = 0 = f(\hat{x}) + (x^* - \hat{x})f'(\hat{x}) + \underbrace{\frac{(x^* - \hat{x})^2}{2} f''(\xi_{x^*})}_{=o(|x^* - \hat{x}|)} \text{ com } \xi_{x^*} \in [x^*, \hat{x}]$$

- A notação Landau  $(x^* - \hat{x})^2 = o(|x^* - \hat{x}|)$  quer dizer “ $(x^* - \hat{x})^2$  é negligível com respeito a  $|x^* - \hat{x}|$ ”. Aqui  $(x^* - \hat{x})^2 = o(|x^* - \hat{x}|)$  pois  $|x^* - \hat{x}|$  é “pequeno”.
- Assim podemos “descartar” o termo  $\frac{(x^* - \hat{x})^2}{2} f''(\xi_{x^*})$  e obtemos então a aproximação

$$0 \approx f(\hat{x}) + (x^* - \hat{x})f'(\hat{x})$$

- Reorganizando os termos, obtemos a aproximação seguinte para  $x^*$ :

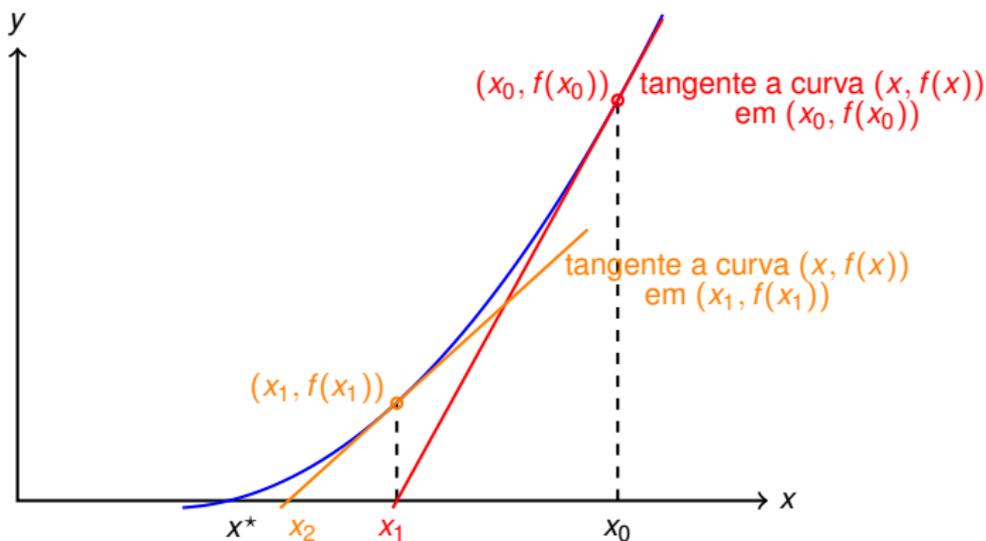
$$x^* \approx \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})} \quad (\text{ suponhamos } f'(\hat{x}) \neq 0)$$

# Método de Newton

Essa aproximação de  $x^*$  é a base do *método de Newton* para aproximação numérica de raízes de equações. Vamos definir a *iteração de Newton* como

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{para } k \geq 0$$

A convergência de  $x_k$  para  $x^*$  pode ser extremamente rápida.



# Método de Newton

- **Vantagem do método de Newton:** a convergência pode ser muito rápida.
- **Desvantagem do método de Newton:** se o ponto inicial  $x_0$  não estiver próximo o suficiente da solução  $x^*$ , pode-se perder a convergência rápida, e as vezes  $x_k$  pode até divergir.

**Teorema:** Seja  $f \in C^2([a, b])$ . Se  $x^* \in [a, b]$  satisfaz  $f(x^*) = 0$  e  $f'(x^*) \neq 0$ , então existe  $\delta > 0$  tal que o método de Newton gera uma sequência  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  tal que  $x_k \rightarrow x^*$ , para qualquer ponto inicial  $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ .

**Demonstração:** ver Burden & Faires, Análise Numérica, capítulo 2.3, Teorema 2.5

**Observação:** Este teorema garante a convergência do método de Newton se o ponto inicial  $x_0$  for suficientemente perto da solução  $x^*$ . Porém, o intervalo  $[x^* - \delta, x^* + \delta]$  pode ser arbitrariamente pequeno. Isso quer dizer que as vezes a convergência quadrática acontece apenas começando muito perto da solução  $x^*$ . Na prática é difícil determinar este  $\delta$ .

# Método de Newton

**Exemplo:** Seja  $f(x) = \arctan(x)$ , obviamente a única raiz de  $f$  é  $x^* = 0$ . É possível mostrar que se o ponto inicial  $x_0$  satisfaz a condição

$$\arctan(|x_0|) > \frac{2|x_0|}{1+x_0^2},$$

então a sequência  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  gerada pelo método de Newton satisfaz  $|x_k| \rightarrow \infty$  e  $\{|x_k|\}_{k \geq 1}$  diverge. Isso acontece neste exemplo quando não começamos suficientemente perto da solução  $x^* = 0$ .

A solução de  $\arctan(|x_0|) = \frac{2|x_0|}{1+x_0^2}$  fica entre 1.391 e 1.392, e de fato observamos

numericamente que  $x_k$  converge para  $x^*$  quando  $|x_0| \leq 1.391$ , e diverge para  $|x_0| \geq 1.392$ . Então o teorema acima provavelmente pode ser aplicado para  $\delta < 1.392$ .

# Ordem de convergência

**Definição (ordem de convergência):** Seja  $x_k \rightarrow x^*$  com  $x_k \neq x^*$  para todo  $k \geq 1$ . Se existem constantes  $\lambda > 0$  e  $\alpha > 0$  com

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^\alpha} = \lambda$$

então  $x_k$  converge para  $x^*$  de ordem  $\alpha$  com erro assintótico constante  $\lambda$ .

## Casos importantes:

- Se  $\alpha = 1$  e  $\lambda < 1$  então  $x_k$  converge linearmente.
- Se  $\alpha = 2$  então  $x_k$  converge quadraticamente.

**Observação:** A convergência quadrática é muito mais rápida que a convergência linear.

# Ordem de convergência

**Exemplo:** Consideramos as sequências

$$x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{e} \quad y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}.$$

Claramente  $x_k \rightarrow x^* = 0$  e  $y_k \rightarrow y^* = 0$ . Calculamos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

Então  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 1/2$  e  $x_k$  converge linearmente. Calculamos também

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|y_{k+1} - y^*|}{|y_k - y^*|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|y_{k+1}|}{|y_k|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2 \times 2^k}}{2^{2^{k+1}}} = 1.$$

Então  $\alpha = 2$  e  $y_k$  converge quadraticamente.

$k$	1	2	3	4	5	6
$x_k$	0.5	0.25	0.125	$6.25 \times 10^{-2}$	$3.13 \times 10^{-2}$	$1.56 \times 10^{-2}$
$y_k$	0.25	0.0625	$3.91 \times 10^{-3}$	$1.53 \times 10^{-5}$	$2.33 \times 10^{-10}$	$5.42 \times 10^{-20}$

Observamos nesta tabela que a convergência quadrática é muito mais rápida que a convergência linear.

# Ordem de convergência do método de Newton

**Teorema (convergência do método de Newton):** Seja  $f \in C^2([x^* - \delta, x^* + \delta])$ .  
Suponhamos  $f(x^*) = 0$ ,  $f'(x^*) \neq 0$ , e existe  $A > 0$  tal que

$$\left| \frac{f''(x)}{f'(y)} \right| \leq A, \quad \forall x, y \in [x^* - \delta, x^* + \delta].$$

Se  $|x_0 - x^*| \leq \min\{\delta, A^{-1}\}$  então  $x_k \rightarrow x^*$  quadraticamente, onde  $x_k$  é a sequência gerada pelo método de Newton, isto é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

# Convergência global para métodos de ponto fixo e precisão pré-fixada

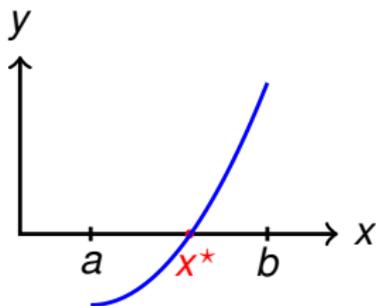
Neste capítulo, vamos ver casos particulares onde a sequência  $x_{k+1} = g(x_k)$  sempre converge para o ponto fixo  $x^*$ , e neste caso vamos parar as iterações quando obtemos uma precisão pré-fixada  $\delta$ .

**Teorema (convergência global do método de Newton):** Seja  $f \in C^2([a, b])$ ,  $a < b$  satisfazendo

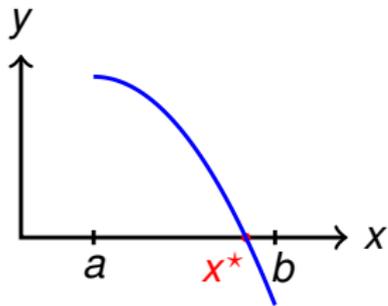
- $f(a)f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$
- $f''(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$

Então para toda inicialização  $x_0 \in [a, b]$  satisfazendo  $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$ , a sequência  $x_k$  é monotônica e convergente para o único zero  $x^*$  de  $f$  em  $[a, b]$ .

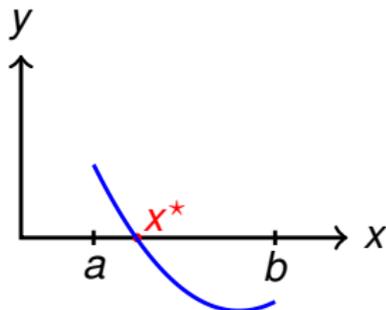
Este teorema pode ser dividido em quatro casos em função dos sinais de  $f'$  e  $f''$ .



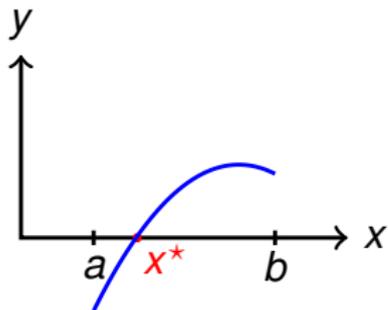
(a) Caso  $f' > 0$ ,  $f'' > 0$ ,  
 $x_0 \in [x^*, b] \implies f(x_0)f''(x_0) > 0$  e  
 $x_k$  decrescente.



(b) Caso  $f' < 0$ ,  $f'' < 0$ ,  
 $x_0 \in [x^*, b] \implies f(x_0)f''(x_0) > 0$  e  
 $x_k$  decrescente.



(c) Caso  $f' < 0$ ,  $f'' > 0$ ,  
 $x_0 \in [a, x^*] \implies f(x_0)f''(x_0) > 0$  e  
 $x_k$  crescente.



(d) Caso  $f' > 0$ ,  $f'' < 0$ ,  
 $x_0 \in [a, x^*] \implies f(x_0)f''(x_0) > 0$  e  
 $x_k$  crescente.

# Convergência global para métodos de ponto fixo e precisão pré-fixada

**Teorema (convergência global para método de ponto fixo):** Suponhamos  $g \in C^1([a, b])$  e  $g$  tem um único ponto fixo  $x^* \in [a, b]$ . Suponhamos também que  $|g'(x)| \leq k < 1 \forall x \in [a, b]$  e definimos a iteração  $x_{k+1} = g(x_k)$ . Então  $x_k \rightarrow x^*$  e temos a seguinte propriedade, com a inicialização  $x_0 \in [a, b]$ :

1. Se  $x_0 < x_1 < x_2$ , então  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  é crescente.
2. Se  $x_2 < x_1 < x_0$ , então  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  é decrescente.
3. Se  $x_0 < x_2 < x_1$ , então  $x^* \in [x_{2k}, x_{2k+1}]$ ,  $\forall k \geq 0$ . A sequência  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  é oscilante.
4. Se  $x_1 < x_2 < x_0$ , então  $x^* \in [x_{2k+1}, x_{2k}]$ ,  $\forall k \geq 0$ . A sequência  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  é oscilante.

**Observação:** Este teorema mostra que basta calcular  $x_0, x_1, x_2$  para saber se  $x_k$  é crescente, decrescente, ou oscilante.

# Algoritmo de ponto fixo com precisão pré-fixada para sequências oscilantes

---

**Algorithm 1:** Algoritmo de ponto fixo com precisão pré-fixada para sequências oscilantes

---

**Input:** uma precisão desejada  $\delta > 0$ , um número máximo de iterações  $IT_{max}$

**Output:**  $x_{k+1}$

$k = 0$ ;

**while**  $k \leq IT_{max}$  **do**

    Calcule  $x_{k+1} = g(x_k)$ ;

**if**  $|x_k - x_{k+1}| < \delta$  **then**

        STOP;

**else**

$k \leftarrow k + 1$ ;

**end**

**end**

**return**  $x_{k+1}$

---

**Observação:** Este algoritmo funciona apenas para sequências  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  oscilantes. O resultado  $x_{k+1}$  deste algoritmo satisfaz  $|x_{k+1} - x^*| < \delta$ , devido ao teorema de convergência global para método de ponto fixo considerando o caso de sequências oscilantes. Então  $x_{k+1}$  aproxima  $x^*$  com uma precisão desejada  $\delta$ .

# Algoritmo de ponto fixo com precisão pré-fixada para sequências crescentes

---

**Algorithm 2:** Algoritmo de ponto fixo com precisão pré-fixada para sequências crescentes

---

**Input:** uma precisão desejada  $\delta > 0$ , um número máximo de iterações  $IT_{max}$ , uma função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

**Output:**  $\tilde{x} = x_{k+1} + \delta$

$k = 0$ ;

**while**  $k \leq IT_{max}$  **do**

    Calcule  $x_{k+1} = g(x_k)$ ;

**if**  $\phi(x_{k+1} + 2\delta) > 0$  **then**

$k \leftarrow k + 1$ ;

**else**

        STOP;

**end**

**end**

**return**  $\tilde{x} = x_{k+1} + \delta$

---

**Observação:** A ideia deste algoritmo é que  $x_k < x^*$  para todos  $k \geq 1$ , isto é, a sequência  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  está “a esquerda” da raiz  $x^*$ , e temos  $\phi(x_k) = g(x_k) - x_k = x_{k+1} - x_k \geq 0$  pois a sequência  $x_k$  é crescente. Então, enquanto  $\phi(x_{k+1} + 2\delta) > 0$  continuamos o cálculo das iterações, mas uma vez que  $\phi(x_{k+1} + 2\delta) < 0$ , isto quer dizer que  $x_{k+1} + 2\delta$  está “a direita” da raiz  $x^*$  e paramos o algoritmo pois a raiz pertence então a  $[x_{k+1}, x_{k+1} + 2\delta]$ .

**Observação:** Este algoritmo funciona apenas para sequências  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  crescentes. Pode se mostrar que o resultado  $\tilde{x} = x_{k+1} + \delta$  deste algoritmo satisfaz  $|\tilde{x} - x^*| \leq \delta$ . Então  $\tilde{x}$  aproxima  $x^*$  com uma precisão desejada  $\delta$ .

# Algoritmo de ponto fixo com precisão pré-fixada para seqüências decrescentes

---

**Algorithm 3:** Algoritmo de ponto fixo com precisão pré-fixada para seqüências decrescentes

---

**Input:** uma precisão desejada  $\delta > 0$ , um numero máximo de iterações  $IT_{max}$ , uma função

$$\phi(x) = g(x) - x$$

**Output:**  $\tilde{x} = x_{k+1} - \delta$

$k = 0$ ;

**while**  $k \leq IT_{max}$  **do**

    Calcule  $x_{k+1} = g(x_k)$ ;

**if**  $\phi(x_{k+1} - 2\delta) < 0$  **then**

        |  $k \leftarrow k + 1$ ;

**else**

        | STOP;

**end**

**end**

**return**  $\tilde{x} = x_{k+1} - \delta$

---

**Observação:** Este algoritmo funciona apenas para seqüências  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  decrescentes. Pode se mostrar que o resultado  $\tilde{x} = x_{k+1} - \delta$  deste algoritmo satisfaz  $|\tilde{x} - x^*| \leq \delta$ . Então  $\tilde{x}$  aproxima  $x^*$  com uma precisão desejada  $\delta$ .

## Método de Newton com precisão pré-fixada

Os Algoritmos 1,2 e 3 podem ser usados também para o método de Newton, pois ele é também um método de ponto fixo da forma:

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

com

$$g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Então temos

$$\phi(x) = g(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

no Algoritmo 2 e no Algoritmo 3.