Exercício 20

Enunciado: Os polinómios $1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3x}{5}$ são ortogonais em relação ao produto escalar $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Use-os para obter os polinómios mónicos ortogonais em relação ao produto escalar $\int_{-2}^{2} f(x)g(x)dx$. Qual o polinómio de grau ≤ 2 que melhor aproxima $f(x) = x^3$ em $[-2,2]$ em relação a este produto escalar?

Resposta: Um polinómio mónico é um polinómio $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ tal que $\boxed{a_m = 1}$.

- Para obter polinómios ortogonais para $\int_{-2}^{2} f(x)g(x)dx$, precisamos fazer uma mudança de variáveis.

Recordação: f é dada em $[-2,2]$, g é a função aproximadora

MMQ: $\min_{(a_0,\dots,a_m)} E(a_0,\dots,a_m) = \int_{-2}^{2} (f(x)-g(x))^2 dx$

mudança de variáveis: $x(t) = \alpha t + \beta \in [x_I, x_F] = [-2,2]$

Temos $t \in [t_I, t_F] = [-1,1]$, então

$$\begin{cases} \alpha t_I + \beta = x_I \\ \alpha t_F + \beta = x_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = -2 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x(t) = 2t}$$

- Então $E(a_0,\dots,a_m) = \int_{-2}^{2} (f(x)-g(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} (f(x(t)) - g(x(t)))^2 |x'(t)| dt$

$$= 2\int_{-1}^{1} (F(t) - G(t))^2 dt$$

com $\begin{cases} F(t) = f(x(t)) \\ G(t) = g(x(t)) \end{cases}$

- $G(t)$ tem a forma $G(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k G_k(t)$, onde $G_k(t)$ são polinômios ortogonais em $[-1,1]$, isto é
$G_0(t) = 1$, $G_1(t) = t$, $G_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$, $G_3(t) = t^3 - \frac{3t}{5}$

- Então $g(x) = G(t(x)) = \sum_{k=0}^{m} a_k \underbrace{G_k(t(x))}_{=\tilde{g}_k(x)}$

onde $t(x)$ é a transformação inversa de $x(t) = 2t$, isto é
$t(x) = \frac{x}{2}$

- Os polinômios $\tilde{g}_k(x) = G_k(t(x))$ são ortogonais em $[-2,2]$!
- Calculemos $\tilde{g}_0(x) = 1$, $\tilde{g}_1(x) = \frac{x}{2}$, $\tilde{g}_2(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}$

$\tilde{g}_3(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{3}{5}\left(\frac{x}{2}\right)$

- Os polinômios $\tilde{g}_k(x)$ não são mônicos. É facil definir polinômios ortogonais mônicos, multiplicando os $\tilde{g}_k(x)$ por uma constante apropriada. Assim definimos

$$\begin{cases} g_0(x) = \tilde{g}_0(x) = 1 & g_1(x) = 2\tilde{g}_1(x) = x \\ g_2(x) = 4\tilde{g}_2(x) = x^2 - \frac{4}{3} & g_3(x) = 8\tilde{g}_3(x) = x^3 - \frac{12}{5}x \end{cases}$$

verificação: $\int_{-2}^{2} g_2(x) g_1(x) = \int_{-2}^{2} x^3 - \frac{4}{3}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2} = 0$

então g_1 e g_2 são ortogonais em $[-2,2]$.

- Agora, como aproximar $f(x) = x^3$ em $[-2,2]$?

Vamos usar o fato que f é um polinômio.

- Os polinomios ortogonais $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ constituem uma base do espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3, pois eles são de graus distintos (ver o curso).

Esse quer dizer que todo polinômio de grau ≤ 3 pode ser escrito de maneira única como $\sum_{k=0}^{3} b_k g_k(x)$.

- Então existem coeficientes $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ tais que

$$f(x) = x^3 = \sum_{k=0}^{3} b_k g_k(x)$$

- É facil ver que $b_3 = 1$, pois $g_3(x) = x^3 - \frac{12}{5}x$, e os outros $g_k(x)$ têm grau ≤ 2.

- Para calcular os b_k, devemos comparar os coeficients

$$x^3 = \sum_{k=0}^{3} b_k g_k(x) \iff x^3 = b_3\left(x^3 - \frac{12}{5}x\right) + b_2\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) + b_1 x + b_0$$

$$\iff x^3 = x^3(b_3) + x^2(b_2) + x\left(-\frac{12}{5}b_3 + b_1\right) + b_0 - \frac{4}{3}b_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_3 = 1 \\ b_2 = 0 \\ -\frac{12}{5}b_3 + b_1 = 0 \\ b_0 - \frac{4}{3}b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = 1 \\ b_2 = 0 \\ b_1 = \frac{12}{5} \\ b_0 = 0 \end{cases}$$

- Então $x^3 = g_3(x) + \frac{12}{5}g_1(x) \iff f(x) = g_3(x) + \frac{12}{5}g_1(x)$

- Agora vamos montar o sistema normal para o problema

$$\min_{(a_0,a_1,a_2)} E(a_0,a_1,a_2) = \int_{-2}^{2} (f(x)-g(x))^2\,dx$$

com $g(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k g_k(x)$

- O sistema normal é

$$\begin{pmatrix} \langle g_0, g_0\rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle g_1, g_1\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle g_2, g_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, g_0\rangle \\ \langle f, g_1\rangle \\ \langle f, g_2\rangle \end{pmatrix}$$

temos
$$\begin{cases} \langle f, g_0\rangle = \langle g_3 + \frac{12}{5} g_1, g_0\rangle = 0 \quad \text{pois} \begin{cases}\langle g_0, g_3\rangle = 0 \\ \langle g_0, g_1\rangle = 0\end{cases} \\ \langle f, g_1\rangle = \langle g_3 + \frac{12}{5} g_1, g_1\rangle = \underbrace{\langle g_3, g_1\rangle}_{=0} + \frac{12}{5}\langle g_1, g_1\rangle \\ \langle f, g_2\rangle = \langle g_3 + \frac{12}{5} g_1, g_2\rangle = 0 \end{cases}$$

então a solução é (o sistema normal é diagonal)
$$\begin{cases} a_0^* = \dfrac{\langle f, g_0\rangle}{\langle g_0, g_0\rangle} = 0 \\ a_1^* = \dfrac{\langle f, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} = \dfrac{12}{5}\dfrac{\langle g_1, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} = \dfrac{12}{5} \\ a_2^* = \dfrac{\langle f, g_2\rangle}{\langle g_2, g_2\rangle} = 0 \end{cases}$$

então $f(x) = x^3$ é aproximado por $g(x) = \frac{12}{5} g_1(x) = \frac{12}{5} x$.