Exercício 3 (Sistemas lineares)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

1) Resolver com condensação pivotal, usando ponto flutuante com 2 algarismos significativos

1ª etapa: permutação das linhas 1 e 2 (condensação pivotal)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - \frac{L_1}{2} \\ L_3 \to L_3 - \frac{L_1}{4} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5.5 & 2 \\ 0 & -4.5 & \underbrace{-2.3}_{\text{arredondamento de } -2.25} & -4.5 \end{array}\right]$$

2ª etapa: permutação das linhas 2 e 3, e elim. de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -4.5 & -2.3 & -4.5 \\ 0 & 2 & 5.5 & 2 \end{array}\right] \quad L_3 \to L_3 + \frac{2L_2}{4.5} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -4.5 & -2.3 & -4.5 \\ 0 & 0 & 4.5 & 0 \end{array}\right]$$

pois $\frac{2\times(-2.3)}{4.5} + 5.5 = -\frac{4.6}{4.5} + 5.5 = \underbrace{-1.0222}_{\simeq -1.0} + 5.5$

$$\simeq 4.5$$

Substituição retroativa:

$x_3 = 0.0$

$-4.5x_2 - 2.3x_3 = -4.5 \Rightarrow x_2 = 1.0$

$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{2+2}{4} = 1.0$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (1.0, 1.0, 0.0)$

Verificação:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{OK}$$

Questão 2) Verifique se o sistema linear satisfaz o critério de Sassenfeld. Em caso negativo, troque a posição das equações no sistema, de forma que, para o sistema equivalente assim obtido, o critério das linhas assegure a convergência do método GS.

Sassenfeld: $\beta_1 = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} > 1$

Nem precisa calcular β_2 e β_3 pois $\beta_1 > 1$, então o critério de Sassenfeld não é satisfeito.

- Se escrevermos as equações desta maneira:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Claramente o critério das linhas (CL) é satisfeito, pois

$$\begin{cases} 4 > |-2| + 1 \\ |-5| > 1 + |-2| \\ 6 > 2 + 1 \end{cases} \quad \text{ok} \Rightarrow \text{GS converge nesta configuração}$$

Questão 3

Sem efetuar as iterações, e partindo da aprox. inicial $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$, bem como sabendo que $|x_1| \leq 2$, $|x_2| \leq 2$, $|x_3| \leq 2$, determine um número de iterações que assegure um erro inferior a $\varepsilon = 0.01$ em cada uma das variaveis, ao se aplicar GS para que GS converge, conforme a questão 2.

<u>Resposta</u>: Vamos considerar a forma seguinte do SL, conforme a questão 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

Calculamos os coefs. do critério de Sassenfeld:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 = \dfrac{2+1}{4} = \dfrac{3}{4} \\[2em] \beta_2 = \dfrac{1 \times \beta_1 + 2}{5} = \dfrac{11}{20} \\[2em] \beta_3 = \dfrac{2\beta_1 + \beta_2}{6} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{11}{120} = \dfrac{41}{120} \end{array}\right\} \Rightarrow M = \max_{1 \leq i \leq 3} |\beta_i| = \frac{3}{4} = 0.75$$

- Na demonstração do criterio de Sassenfeld, obtivemos essa estimativa: $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i^{(k+1)}| \leq M^k \max\limits_{1 \leq j \leq n} |\Delta x_j^{(1)}|$

onde $\Delta x_i^{(k)} = x_i - x_i^{(k)}$ (aqui x_i é a solução exata)

- De maneira semelhante, podemos escrever

$$\max_{1\leq i\leq n} |\Delta x_i^{(k)}| \leq M^k \max_{1\leq j\leq n} |\Delta x_j^{(0)}|$$

- Sabemos que $M = 0.75$ e

$$\max_{1\leq j\leq n} |\Delta x_j^{(0)}| = \max_{1\leq j\leq n} |x_j - \underbrace{x_j^{(0)}}_{=0}|$$

$$= \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq 2$$

- Então $\max_{1\leq i\leq n} |\Delta x_i^{(k)}| \leq 2M^k$

- Queremos um erro $< \varepsilon = 0.01$, então vamos procurar k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ temos

$$\max_{1\leq i\leq n} |\Delta x_i^{(k)}| \leq 2M^k < \varepsilon = 0.01$$

- Então o k_0 tem que satisfazer $2M^{k_0} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \log(2M^{k_0}) < \log(\varepsilon) \Rightarrow \log(2) + k_0 \log M < \log \varepsilon$$

$$\Rightarrow k_0 \log M < \log \varepsilon - \log(2)$$

$$\Rightarrow k_0 > \frac{\log \varepsilon - \log(2)}{\log M} \simeq 18{,}42$$

(pois $\log M < 0$!)

então escolhemos $\boxed{k_0 = 19}$

Questão 4:

Calcule 2 iterações de GS a partir de

$$\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) = (0,0,0)$$

Resposta: Usamos a forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right]$

GS:
$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left[b_1 + 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right] = \frac{1}{4}\left[2\right] = \frac{1}{2} \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{5}\left[b_2 - x_1^{(1)} + 2x_3^{(0)}\right] = -\frac{1}{5}\left[-4 - \frac{1}{2}\right] = \frac{9}{10} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{6}\left[b_3 - 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}\right] = \frac{1}{6}\left[3 - 1 - \frac{9}{10}\right] = \frac{11}{60} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left[b_1 + 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right] = \frac{1}{4}\left[2 + \frac{9}{5} - \frac{11}{60}\right] = \frac{217}{240} \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{5}\left[b_2 - x_1^{(2)} + 2x_3^{(1)}\right] = -\frac{1}{5}\left[-4 - \frac{217}{240} + \frac{11}{30}\right] = \frac{1089}{1200} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{6}\left[3 - 2x_1^{(2)} - x_2^{(2)}\right] = \frac{1}{6}\left[3 - \frac{217}{120} - \frac{1089}{1200}\right] = \frac{341}{7200} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} \simeq 0,90417 \\ x_2^{(2)} = 0,9075 \\ x_3^{(2)} = 0,047361 \end{cases}$$

(arredondamento a 5 alg. sig.)

$$\text{Erro} = \|\Delta x^{(2)}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq 3} |\Delta x_i^{(2)}|$$
$$= \max\{|1-0,90417|, |1-0,9075|, |0-0,047361|\}$$
$$\simeq 9,58 \times 10^{-2}$$