4300270 – Eletricidade e Magnetismo I

Prova Substitutiva – 17/12/2021

Nome: GABARITO	Nº USP

AVISOS:

• Escolha apenas dois exercícios, resolva e entregue no site da disciplina no "local para entrega das provas" até 13:00 hs do dia 17 de dezembro.

•O prazo para entrega dos outros dois exercícios será 20 de dezembro (segunda-feira) até as 23:59 hs, no novo link que será criado para este fim. A prova contém 5 questões e o aluno entregará apenas quatro questões.

• É permitido o uso de calculadoras, consulta a livros e slides das aulas mas NÃO aos colegas.

• Escreva de maneira legível e entregue uma cópia também legível.

• Justifique TODAS as suas respostas, bem como fórmulas utilizadas fora deste formulário.

• Para facilitar a correção, sempre que possível encontre a solução em função das variáveis literais e só no final substitua pelos valores numéricos.

Formulário

$k = 8{,}99\times10^{9}\,\mathrm{Nm^2/C^2}$

$\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

$$\int \frac{x\,dx}{x+d} = x - d\ln(x+d)$$

$$\vec{F}_{ij} = \frac{kq_iq_j}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad \oint_S \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$$

$$U = qV \qquad \Delta U = q\Delta V \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i} \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\sum_{j<i}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \qquad V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad \Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$E = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$$

Formulário

capacitores em série: $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$ em paralelo: $C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i$

constante dielétrica: $\kappa = \frac{C}{C_0}$ $\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$

$J = \frac{I}{A}$ $\vec{J} = nq\vec{v}_d$ $R = \frac{\rho l}{A}$

$J = \sigma E$ $E = \rho J$ $\sigma = \frac{1}{\rho}$

$V = RI$ $P = \varepsilon I$ $P = RI^2$

Resistor em série: $R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i$ em paralelo: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A.m}}$ $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2}$

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ $\phi_B = \int \vec{B}.d\vec{A}$ $\oint \vec{B}.d\vec{A} = 0$

$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \vec{r}}{r^2}$

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I_{env}$ $\varepsilon = \oint E \cdot dl = -\frac{d\phi_B}{dt}$ $\varepsilon = \int \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$

$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \left(I_C + \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}\right) = \mu_0 (I_C + I_d)$ $I_d = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$

$L = \frac{N\phi_B}{I}$ $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$ $U = \frac{1}{2}LI^2$

$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$ $M = \frac{N_2\phi_{B2}}{I_1} = \frac{N_1\phi_{B1}}{I_2}$

$\varepsilon_2 = -M\frac{dI_1}{dt}$ $\varepsilon_1 = -M\frac{dI_2}{dt}$

Campo no eixo de um anel de raio R, carga Q, com o centro do anel na origem no plano yz

$$\vec{E}=\frac{kQx}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}$$

Campo no eixo de um disco de raio R, carga Q, com o centro do disco na origem no plano yz

$$\vec{E}=\frac{2kQ}{R^2}\left(1-\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\vec{i}$$

Lei de Gauss para dielétricos:

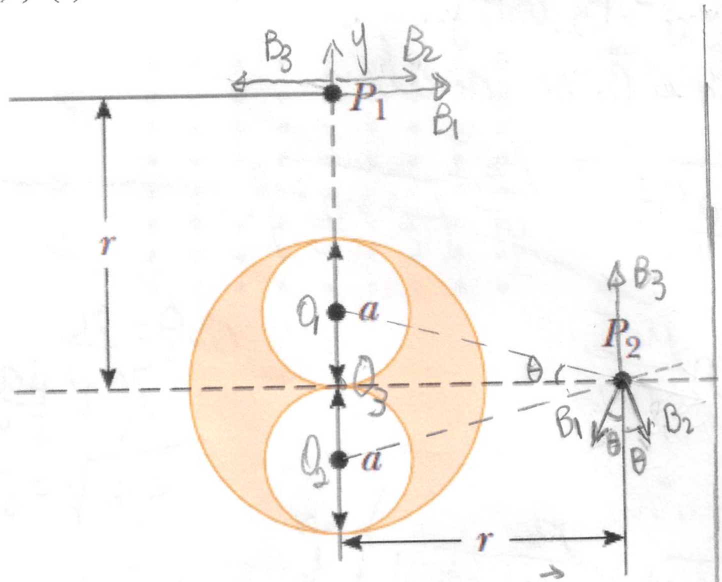
$$\oint \vec{D}.d\vec{A}=Q_{livre}$$

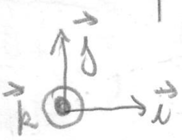
$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

$$\kappa=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

1) Um cilindro longo de raio a tem duas cavidades cilíndricas de diâmetro a através de todo o seu comprimento, como mostrado na figura abaixo, que representa uma seção transversal. Uma corrente I é dirigida para fora da página e é uniforme ao longo da seção transversal do condutor. Em termos de μ_0, I, r e a, responda:

(0,5): (a) Determine a densidade de corrente J do condutor.
(1,0): (b) Encontre o módulo e a direção do campo elétrico em P_1.
(1,0): (c) Encontre o módulo e a direção do campo elétrico em P_2.





$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi(a^2) - 2\pi\frac{a^2}{4}}$$

$$J = \frac{I}{\pi\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right)} = \frac{I}{\pi\frac{a^2}{2}} = \frac{2I}{\pi a^2}$$

Assumindo que o eixo z sai da página

$$\vec{J} = \frac{2I}{\pi a^2}\vec{k}$$

Sistema equivalente a um cilindro de raio a com $J = \frac{2I}{\pi a^2}$ saindo da página mais dois cilindros com raio $\frac{a}{2}$ com $J = \frac{2I}{\pi a^2}$ entrando na página

Aplicando a lei de Ampère para cilindro superior de raio $\frac{a}{2}$ centrado em O_1 conduzindo corrente $I_1 = J\frac{\pi a^2}{4} = \frac{I}{2}$ entrando na página

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1$$

$$B_1 \cdot 2\pi\left(r - \frac{a}{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{2}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\left(r - \frac{a}{2}\right)}\vec{i}$$

Fazendo análogo para cilindro inferior, centrado em

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_2$$

$$B_2\, 2\pi\left(r + \frac{a}{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{2}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\left(r + \frac{a}{2}\right)}\vec{i}$$

Para cilindro centrado em O_3 com densidade de corrente $J = \frac{2I}{\pi a^2}$ conduzindo corrente $I_3 = J\pi a^2 = 2I$ (saindo da página)

$$\oint \vec{B}_3 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_3$$

$$B_3\, 2\pi r = \mu_0\, 2I$$

$$\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{\pi r}\vec{i}$$

$$\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2} + \vec{B_3} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{1}{4(r-\frac{a}{2})} + \frac{1}{4(r+\frac{a}{2})} - \frac{1}{r}\right)\vec{i}$$

(a) $$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{(a^2-2r^2)}{4r(r^2-\frac{a^2}{4})} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{\pi r}\left(\frac{a^2-2r^2}{4r^2-a^2}\right)\vec{i}}$$

como $\frac{a^2-2r^2}{4r^2-a^2} < 0 \Rightarrow \vec{B}$ aponta para a esquerda em P_1

(b) Em P_2: $\vec{B} = B_3\vec{j} - B_1\cos\theta\,\vec{j} - B_2\cos\theta\,\vec{j}$

As componentes em x de $\vec{B_1}$ e $\vec{B_3}$ se cancelam

onde $B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\left(r^2+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\left(r^2+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi r} = \frac{\mu_0 2I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{\pi r} \qquad \cos\theta = \frac{r}{\left(r^2+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0 I}{\pi r} - \frac{2\mu_0 I}{4\pi\left(r^2+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{r}{\left(r^2+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\vec{j}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi r}\left(1 - \frac{r^2}{2\left(r^2+\frac{a^2}{4}\right)}\right)\vec{j} = \mu_0 I\left(\frac{2r^2+\frac{a^2}{2}-r^2}{2r^2+\frac{a^2}{2}}\right)\vec{j}$$

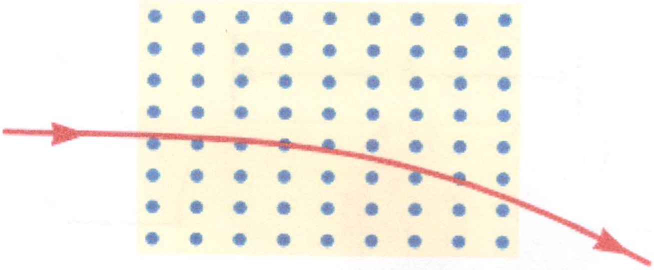
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi r}\left(\frac{r^2+\frac{a^2}{2}}{2r^2+\frac{a^2}{2}}\right)\vec{j} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{\pi r}\left(\frac{2r^2+a^2}{4r^2+a^2}\right)\vec{j}}$$

2) Prótons com energia cinética de 5,00 MeV estão movendo na direção x e entra em um campo magnético **B**=(0,0500 **k**) T dirigido para fora da página e se estendendo de x=0 até x=1,00 m, como mostrado na figura. Use 1 eV=1,60 $\times 10^{-19}$ J e adote o eixo x para a direita e o eixo y para cima. **k** é o versor do eixo z.

(1,5): (a) Calcule a componente y da velocidade do próton quando ele deixa o campo magnético.

(1,0): (b) Encontre o ângulo α entre o vetor velocidade do fluxo de prótons antes de entrar na região de campo e imediatamente depois de sair da região de campo.

$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg



$$K = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad K = 5{,}00 \times 10^{6} \times 1{,}60 \times 10^{-19}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}} \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2K}{1{,}67 \times 10^{-27}}}$$

$$v_0 = 3{,}095 \times 10^{7}\ m/s$$

$$F_m = q v_0 B\, sen(90^\circ) = e v_0 B$$

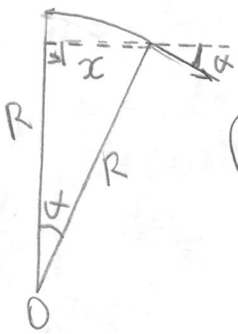
$$F_m = F_c = \frac{m v_0^2}{R} = e v_0 B$$

$$\frac{m v_0}{R} = e B$$

$$R = \frac{m v_0}{e B}$$

Usando a massa do próton $= 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C

$$R = \frac{1{,}67 \times 10^{-27} \times 3{,}095 \times 10^{7}}{1{,}60 \times 10^{-19} \times 0{,}0500} = 6{,}46 m$$



$$sen\, \alpha = \frac{x}{R} = \frac{1}{6{,}46}$$

(b) $\boxed{\alpha = 8{,}90^\circ}$

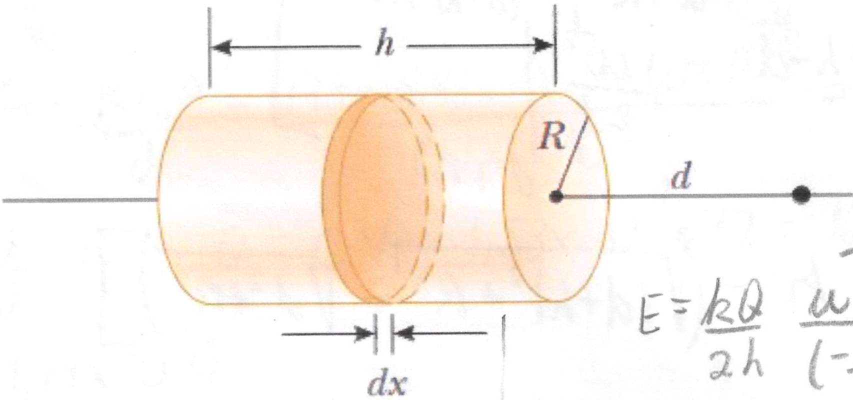
(a) $v_y = v_0\, sen\, \alpha = 3{,}095 \times 10^{7} \times \frac{1}{6{,}46}$

$\boxed{v_y = 4{,}79 \times 10^{6}\ m/s}$

3) Considere uma casca cilíndrica uniformemente carregada tendo carga total Q distribuída em toda superfície, raio R e altura h. Dica: (Use o campo elétrico de um anel de corrente ou o campo elétrico de um disco, considerando o sistema como sobreposição de vários anéis ou discos, ver formulário).

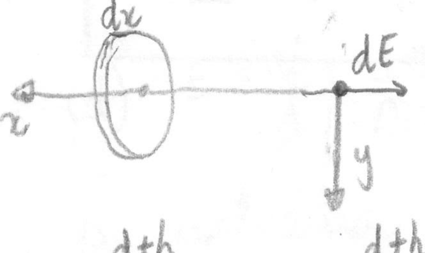
(1,25): a) Determine o campo elétrico a uma distância d da borda direita, como mostrado na figura.

(1,25): b) Considere agora um cilindro sólido com as mesmas dimensões, carregando a mesma carga Q, uniformemente distribuída em todo o seu volume. Encontre o campo elétrico criado no mesmo ponto.



O campo na origem devido ao anel de largura dx será:

$$dE = \frac{kx\,dQ}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$



$$dQ = \frac{dx\,Q}{h}$$

$$E = \int_d^{d+h} dE = \frac{kQ}{h}\int_d^{d+h} \frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$x^2+R^2 = u$$

$$2x\,dx = du$$

$$x = d, \quad u = R^2+d^2$$

$$x = d+h, \quad u = (d+h)^2+R^2$$

$$E = \frac{kQ}{2h}\int_{R^2+d^2}^{R^2+(d+h)^2} \frac{du}{u^{3/2}}$$

$$E = \frac{kQ}{2h}\,\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})}\Bigg|_{R^2+d^2}^{R^2+(d+h)^2}$$

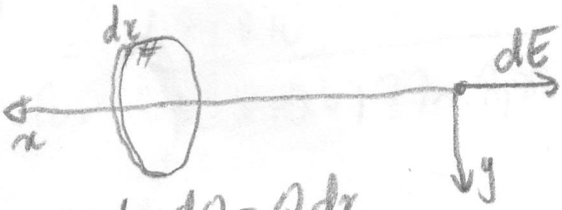
$$E = \frac{kQ}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(d+h)^2}}\right)$$

(a)

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{kQ}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(d+h)^2}}\right)}$$

b) O campo na origem devido ao disco de largura dx será:

$$dE = \frac{2k\,dQ}{R^2}\left(1 - \frac{x}{(x^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$



onde $dQ = Q\frac{dx}{h}$

$$dE = \frac{2kQ\,dx}{hR^2}\left(1 - \frac{x}{(x^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$E = \int_d^{d+h} dE = \frac{2kQ}{hR^2} \int_d^{d+h} \left(1 - \frac{x}{(x^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\right) dx$$

$u = x^2 + R^2$ $\quad$ $x = d, \; u = d^2 + R^2$

$du = 2x\,dx$ $\quad$ $x = d+h, \; u = (d+h)^2 + R^2$

$$E = \frac{2kQ}{hR^2} \left[x \Big|_d^{d+h} - \int_{d^2+R^2}^{(d+h)^2+R^2} \frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$E = \frac{2kQ}{hR^2} \left[d+h-d - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2\frac{1}{2}} \Big|_{d^2+R^2}^{(d+h)^2+R^2} \right]$$

$$E = \frac{2kQ}{hR^2} \left[h - \left(\sqrt{(d+h)^2+R^2} - \sqrt{d^2+R^2} \right) \right]$$

$$E = \frac{2kQ}{hR^2} \left[h + \sqrt{d^2+R^2} - \sqrt{(d+h)^2+R^2} \right]$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{2kQ}{hR^2} \left[h + \sqrt{d^2+R^2} - \sqrt{(d+h)^2+R^2} \right] \vec{\imath}} \quad (b)$$

4) Um disco de dióxido de titânio (κ=173) tem uma área de 1,00 cm^2 e espessura de 0,100 mm. Alumínio é evaporado sobre as placas para formar com capacitor de placas paralelas, onde κ é a constante dielétrica.

(1,0): a) Calcule a capacitância.

(0,5): b) Quando este capacitor é carregado com uma bateria de 12.0 V por um tempo suficientemente longo, qual é a carga armazenada no capacitor.

(0,5): c) Para a situação na parte b, qual é a densidade da carga superficial induzida.

(0,5): d) Qual é o campo elétrico E dentro do capacitor.

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

(a) $C = K C_0 = \frac{K\varepsilon_0 A}{d} = \frac{173 \times 8{,}85\times 10^{-12} \times 1{,}0 \times 10^{-4}}{0{,}100 \times 10^{-3}} = 1{,}53 \times 10^{-9}\,F$

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = CV = 1{,}53 \times 10^{-9} \times 12 = 1{,}84\times 10^{-8}\,C$$

(b) $Q = 1{,}84 \times 10^{-8}\,C$

(c) $\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) = \frac{1{,}84\times10^{-8}}{1{,}0\times10^{-4}}\left(1 - \frac{1}{173}\right) = 1{,}83\times10^{-4}\,\frac{C}{m^2}$

(d) $E = \frac{V}{d} = \frac{12{,}0}{0{,}100\times10^{-3}} = 1{,}20\times10^{5}\,\frac{V}{m}$

ou aplicando a lei de Gauss para dielétrico

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q_{livre}$$

$$\varepsilon E A = Q_{livre}$$

$$E = \frac{Q_{livre}}{\varepsilon A} = \frac{1{,}84\times10^{-8}}{1{,}0\times10^{-4} K\varepsilon_0} = \frac{1{,}84\times10^{-8}}{1{,}0\times10^{-4}\times177\times 8{,}85\times10^{-12}}$$

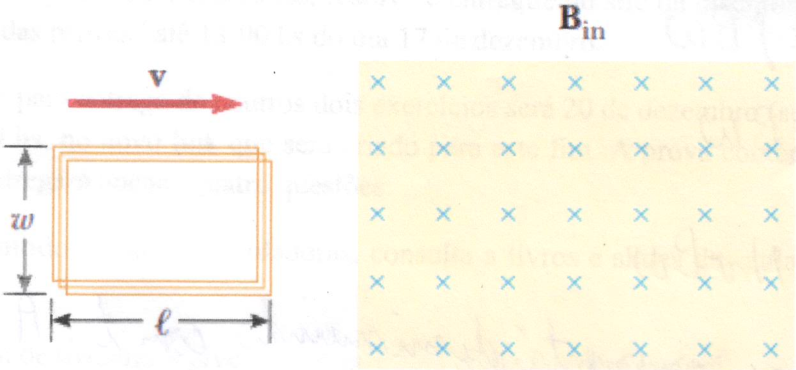
$$\boxed{E \simeq 1{,}17\times10^{5}\,\frac{V}{m}}$$

5) Uma bobina retangular de resistência R tem N voltas, comprimento l e largura w, como mostrado na figura. A bobina move na horizontal, da esquerda para a direita, com velocidade $\boldsymbol{v}$ e ela passa por uma região com campo magnético $\boldsymbol{B}$ entrando na página. Determine o módulo e a direção da força $\boldsymbol{F}$ resultante sobre a bobina.

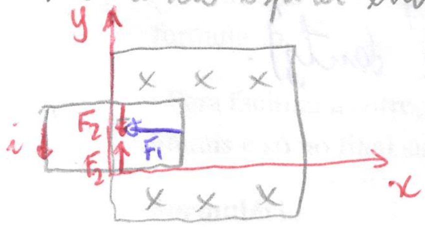
(1,0): a) Quando ela entra na região do campo magnético (mas não totalmente).

(1,0): b) Quando ela move completamente dentro do campo.

(0,5): c) Quando ela deixa a região do campo (mas não totalmente).



(a) Quando espira entra



$x = vt$

$\Phi_B = N B x w$

$\frac{d\Phi_B}{dt} = NBw \frac{dx}{dt} = NBwv$

$|\varepsilon| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = NBwv$

Como $\frac{d\Phi_B}{dt} > 0$, fluxo entrando na página está aumentando com o tempo

Pela lei de Lentz, a corrente induzida é no sentido anti horário para gerar fluxo para cima para se contrapor ao aumento do fluxo para baixo.

Vamos analisar as forças

As forças dos fios horizontais terão uma força $F_2 = N i x B$ em sentidos contrários que se cancelam.

O fio vertical dentro do campo sofre força F_1 e o outro nenhum força.

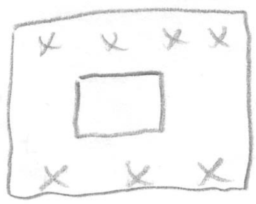
$F_1 = N i w B \sin 90°$

mas $i = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{NBwv}{R}$

$F_1 = \frac{NB^2 w^2 v}{R}$

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\frac{NB^2 w^2 v}{R}\,\vec{i}}$$

(b)



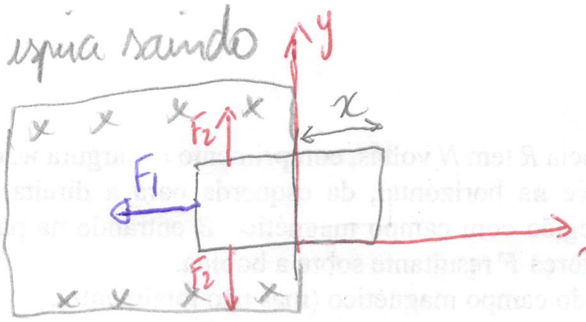
$\Phi_B = N w l B$

$\frac{d\Phi_B}{dt} = 0$

$|\varepsilon| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = 0$

$i = 0 \Rightarrow \boxed{F_m = 0}$

(c) espira saindo



$$\Phi_B = N(l-x)B$$

$$\Phi_B = N(l-vt)Bw$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -NvBw$$

$$|\varepsilon| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = NvBw$$

O fluxo de B para baixo está diminuindo com t. A corrente induzida será no sentido horário para gerar fluxo para baixo para se contrapor a redução do fluxo (lei de Lentz).

$$i = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{NvBw}{R}$$

$$\vec{F}_m = i\vec{L} \times \vec{B}$$

$$F_m = i\,wB \sin 90°$$

$$F_1 = \frac{N^2 w^2 B^2}{R}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{N^2 w^2 B^2}{R}\vec{i}} \quad (c)$$