4300270 – Eletricidade e Magnetismo I

Prova 2 – 10/12/2021

Nome:_____ **Nº USP**_____

AVISOS:

• Escolha apenas dois exercícios, resolva e entregue no site da disciplina no "local para entrega das provas" até 13:00 hs do dia 10 de dezembro.

•O prazo para entrega dos outros dois exercícios será 13 de dezembro (segunda-feira) até as 23:59 hs, no novo link que será criado para este fim. A prova contém 5 questões e o aluno entregará apenas quatro questões.

• É permitido o uso de calculadoras, consulta a livros e slides das aulas mas NÃO aos colegas.

• Escreva de maneira legível e entregue uma cópia também legível.

• Justifique TODAS as suas respostas, bem como fórmulas utilizadas fora deste formulário.

• Para facilitar a correção, sempre que possível encontre a solução em função das variáveis literais e só no final substitua pelos valores numéricos.

Formulário

$k = 8{,}99 \times 10^{9}\,\mathrm{Nm^2/C^2}$

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

$$\int \frac{x\,dx}{x+d} = x - d\ln(x+d)$$

$$\vec{F}_{ij} = \frac{kq_iq_j}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad \oint_S \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$$

$$U = qV \qquad \Delta U = q\Delta V \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i} \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\sum_{j<i}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \qquad V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad \Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$E = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$$

Formulário

capacitores em série: $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$ em paralelo: $C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i$

constante dielétrica: $\kappa = \frac{C}{C_0}$ $\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$

$J = \frac{I}{A}$ $\vec{J} = nq\vec{v}_d$ $R = \frac{\rho l}{A}$

$J = \sigma E$ $E = \rho J$ $\sigma = \frac{1}{\rho}$

$V = RI$ $P = \varepsilon I$ $P = RI^2$

Resistor em série: $R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i$ em paralelo: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A.m}}$ $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2}$

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ $\phi_B = \int \vec{B}.d\vec{A}$ $\oint \vec{B}.d\vec{A} = 0$

$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I_{env}$ $\varepsilon = \oint E \cdot dl = -\frac{d\phi_B}{dt}$ $\varepsilon = \int \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$

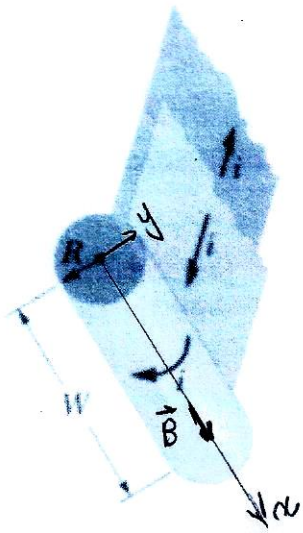
$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \left(I_C + \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}\right) = \mu_0 (I_C + I_d)$ $I_d = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$

$L = \frac{N\phi_B}{I}$ $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$ $U = \frac{1}{2}LI^2$

$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$ $M = \frac{N_2\phi_{B2}}{I_1} = \frac{N_1\phi_{B1}}{I_2}$

$\varepsilon_2 = -M\frac{dI_1}{dt}$ $\varepsilon_1 = -M\frac{dI_2}{dt}$

1) A figura abaixo mostra uma fita de cobre de largura W=16,0 cm que foi enrolada para formar um tubo de raio R=1,8 cm com duas extensões plana. Uma corrente i= 35 mA está distribuída uniformemente na fita, fazendo com que o tubo se comporte como um solenóide de uma espira. Supondo que o campo magnético do lado de fora do tubo é desprezível e que o campo magnético no interior do tubo é uniforme, determine:
(1,0) a) O módulo do campo magnético no interior do tubo (dica: divida o tubo em N espiras com correntes Δi com valor conveniente).
(0,5) b) A indutância do tubo (desprezando as extensões planas).
(0,5) c) A energia armazenada no interior do tubo usando o valor da indutância encontrado no item b.
(0,5) d) Calcule a densidade de energia u_B dentro do tubo através do valor do campo magnético encontrado no item a e depois calcule a energia armazenada no interior do tubo. Compare este valor da energia armazenada com o valor encontrado no item c.



Dividindo o tubo em N espiras com corrente $\Delta i = \frac{i}{N}$

O campo magnético para um solenóide é dado por $\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 N \Delta i$

$$Bw = \mu_0 N \Delta i$$

$$B = \frac{\mu_0 N \Delta i}{w} = \frac{\mu_0 N i}{Nw}$$

(a) $$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{w}}$$

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 35 \times 10^{-3}}{0,16}$$

$$\boxed{B = 2.75 \times 10^{-7}\ T}$$

(b) $$L = \frac{\Phi_B}{i} = \frac{B \pi R^2}{i}$$

$$L = \frac{2.75 \times 10^{-7} \times \pi \times (1,8 \times 10^{-2})^2}{35 \times 10^{-3}}$$

$$\boxed{L = 8.00 \times 10^{-9}\ H}$$

(c) $$U = \frac{1}{2} L i^2$$

$$U = \frac{1}{2} 8.00 \times 10^{-9} \times (35 \times 10^{-3})^2$$

$$U = 4,9 \times 10^{-12}\ J$$

(d) $$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$u_m = \frac{(2,75 \times 10^{-7})^2}{2 \times 4 \times \pi \times 10^{-7}}$$

$$u_m = 3.009 \times 10^{-8}\ J$$

$$U = u_m V$$

$$U = 3.009 \times 10^{-8} \times \pi \times (1,8 \times 10^{-2})^2 \times 0,16$$

$$U = 4,9 \times 10^{-12}\ J$$

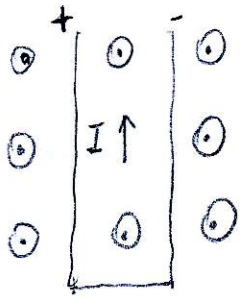
São iguais

2) Uma fita horizontal de 1,0 mm de espessura e 20 mm de largura carrega uma corrente de 20 A ao longo do seu comprimento, e ambos comprimento e largura são perpendiculares a um campo magnético uniforme de 2.0 T dirigido verticalmente para fora do plano da fita. A diferença de potencial através da largura da fita é de 4,27 μV. Nenhuma voltagem externa é aplicada na fita.

(0,5) a) Se o lado da largura da fita que está a sua esquerda (quando você olha na direção da corrente) está no potencial mais alto, qual é então o sinal dos portadores de carga? Justifique sua resposta.

(1,0) b) Encontre a velocidade dos portadores de carga considerando que o módulo da carga dos portadores é $1{,}602\times10^{-19}$ C.

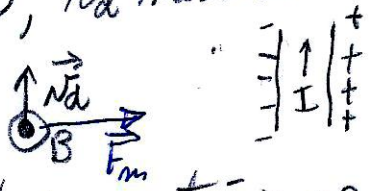
(1,0) c) Encontre a densidade dos portadores de carga.



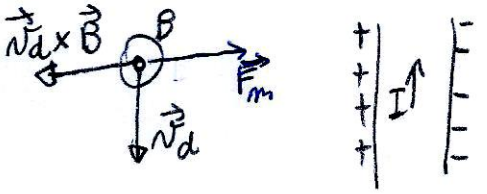
$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$

$\vec{J} = nq\vec{v}_d$

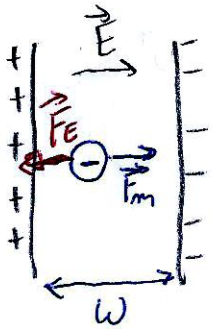
Se portadores tiverem $q>0$, $\vec{v}_d$ mesma direção que $\vec{J}$



Se portadores tiverem $q<0$, v_d será no sentido contrário ao de $\vec{J}$, ou seja para baixo



(a) A análise acima mostra que $q<0$, já que potencial positivo está localizado no lado esquerdo



$\vec{F}_E = q\vec{E}$

no equilíbrio, $F_E = F_m$

$eE = ev_dB$

$v_d = \frac{E}{B}$

$V = Ew$

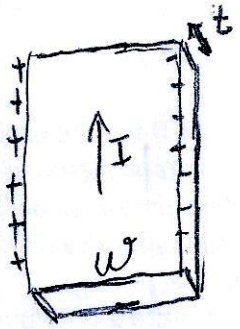
$E = \frac{V}{w}$

(b) $v_d = \frac{V}{wB} = \frac{4{,}27\times10^{-6}}{20\times10^{-3}\times2{,}0} = 1{,}067\times10^{-4}\ m/s$

(c) $J = n e v_d$

$\frac{I}{A} = n e v_d$

$n = \frac{I}{t w e v_d}$



$$n = \frac{20}{20 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^{-3} \times 1{,}602 \times 10^{-19} \times 1{,}067 \times 10^{-4}}$$

$$\boxed{n = 5{,}85 \times 10^{28} \ (m^3)^{-1}}$$

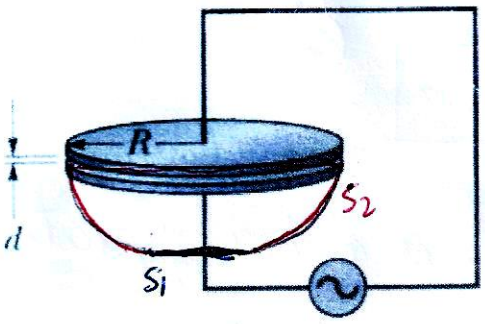
3) Um capacitor de placas circulares de raio R=0,18 m está ligado a uma fonte de tensão variável $V=V_m\text{sen}(\omega t)$, onde V_m=220 V e ω=130 rad/s. O valor máximo da corrente de deslocamento no interior do capacitor é i_d=7,60 μA e a capacitância $C=(\varepsilon_0 A)/d$. Despreze o efeito de borda.

(0,5) a) Qual o valor máximo da corrente i no circuito.

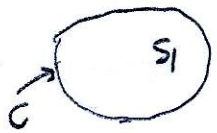
(1,0) b) Qual o valor da distância d entre as placas do capacitor.

(0,5) c) Qual é o valor da derivada $d\phi_E/dt$, onde ϕ_E é o fluxo elétrico através da região entre as placas.

(0,5) d) Determine o valor máximo do vetor campo magnético **B** entre as placas a uma distância r=0,11 m do eixo passando pelo centro das placas.

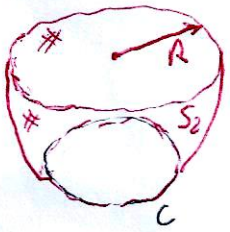


Aplicando a lei de Ampère-Maxwell ao contorno C abaixo, primeiro em relação a área S_1



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

Em relação a S_2 para o mesmo contorno C



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_d$$

ou seja $i = i_d = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\phi_E$

$$\boxed{i_{máx} = i_{d\,máx}}$$

(a) $\boxed{i_{máx} = 7{,}60\ \mu A}$

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C\frac{dV}{dt}$$

$$i = CV_m\omega\cos(\omega t) \quad (1)$$

$$i_{max} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V_m \omega$$

$$d = \frac{\varepsilon_0 A V_m \omega}{i_{máx}}$$

$$d = \frac{8{,}85\times10^{-12}\times\pi\times(0{,}18)^2\times 220\times 130}{7{,}60\times10^{-6}}$$

$$\boxed{d = 3{,}39\times10^{-3}\ m} \quad (b)$$

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{d}{dt}(EA) = A\frac{dE}{dt} \quad (2)$$

mas $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{A\varepsilon_0}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{A\varepsilon_0} i \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) e usando (1)

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{A}{A\varepsilon_0} C V_m \omega \cos(\omega t)$$

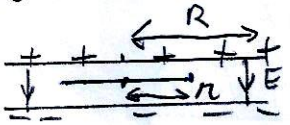
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\varepsilon_0 A}{\varepsilon_0 d} V_m \omega \cos(\omega t)$$

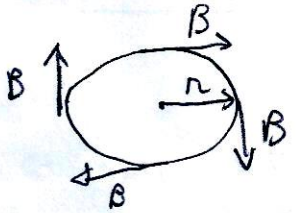
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi R^2}{d} V_m \omega \cos(\omega t)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi \times (0{,}18)^2 \times 220 \times 130}{3{,}39 \times 10^{-3}} \cos \omega t$$

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = 8{,}59 \times 10^5 \cos(130t) \quad \frac{N}{C}\frac{m^2}{s}} \quad (c)$$

- Aplicando a lei de Ampère Maxwell no meio do capacitor





$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_d'$$

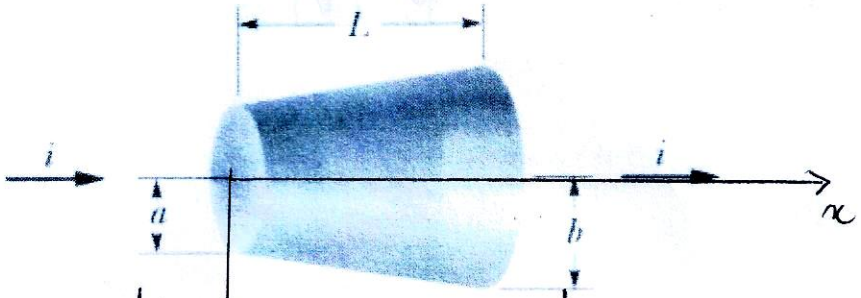
onde $i_d' = i_d \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$

$$B\, 2\pi r = \frac{\mu_0 i_d r^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i_d r^2}{R^2 2\pi r} = \frac{\mu_0 r i_d}{2\pi R^2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0{,}11 \times 7{,}60 \times 10^{-6}}{2\pi \times (0{,}18)^2}$$

$$\boxed{B = 5{,}16 \times 10^{-12}\ T} \quad (d)$$

4) Uma corrente elétrica de 1,00 mA atravessa um tronco de cone circular reto de resistividade 731 Ω.m, raio menor a =2,00 mm, raio maior b=2,30 mm e comprimento L=1,94 cm. A densidade de corrente é uniforme ao longo de uma seção reta perpendicular ao eixo do objeto:
(1,5) a) Qual é a resistência elétrica R do objeto.
(1,0) b) Qual a potência dissipada e a diferença de potencial entre as faces circulares de raios a e b.



Para um fio

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

Para um segmento dx do fio

$$dR = \frac{\rho\, dx}{\pi r^2}$$

$$r = a + \left(\frac{b-a}{L}\right)x$$

$$R = \int_0^L \frac{\rho\, dx}{\pi\left[a + \left(\frac{b-a}{L}\right)x\right]^2}$$

$$a + \left(\frac{b-a}{L}\right)x = k$$

$$dx = \frac{dk}{\left(\frac{b-a}{L}\right)}$$

$x = 0 \Rightarrow k = a$

$x = L \Rightarrow k = b$

$$R = \frac{\rho}{\pi}\,\frac{1}{\left(\frac{b-a}{L}\right)}\int_a^b \frac{dk}{k^2}$$

$$R = \frac{\rho L}{\pi(b-a)}\,\frac{k^{-1}}{(-1)}\Bigg|_a^b$$

$$R = \frac{\rho L}{\pi(b-a)}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$R = \frac{\rho L}{\pi(b-a)}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

$$\boxed{R = \frac{\rho L}{\pi a b}}$$

$$R = \frac{731 \times 1{,}94 \times 10^{-2}}{\pi \times 2{,}00 \times 2{,}3 \times 10^{-6}}$$

$$\boxed{R = 9{,}81 \times 10^{5}\ \Omega}$$ (a)

(b) $P = RI^2$.

$P = 9{,}81 \times 10^5 \times (1{,}00 \times 10^{-3})^2 = \boxed{0{,}981\ W}$

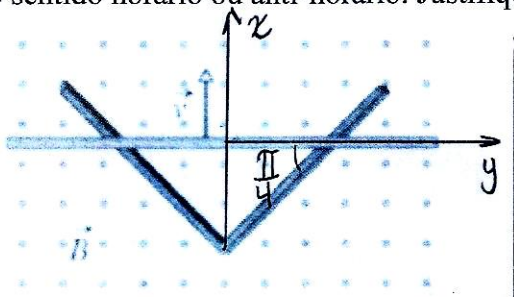
$V_b - V_a = RI$

$V_b - V_a = 9{,}81 \times 10^5 \times 1{,}00 \times 10^{-3} = \boxed{981\ V}$

5) Na figura abaixo, dois trilhos condutores retilíneos formam um ângulo reto. Uma barra condutora disposta na horizontal formando um ângulo de 45° com cada um dos trilhos e em contato com eles no vértice no instante em t=0, tem velocidade escalar constante de 5,20 m/s na vertical, movendo-se sobre os trilhos, sem atrito. Um campo magnético B=0,350 T, dirigido para fora da página, existe em toda região. Determine:

(1,0) a) O fluxo magnético através do triângulo formado pelos trilhos e a barra no instante t=3,00 s

(1,5) b) A tensão induzida no triângulo neste instante. Se a resistência elétrica neste instante deste triângulo for de 600 Ω, calcule também a corrente induzida e diga se flui no sentido horário ou anti-horário. Justifique sua resposta.



$\Phi_B = \int \vec{B}.d\vec{A} = BA$ (1)

$A = \frac{1}{2} y x$ (2)

$tg\frac{\pi}{4} = \frac{x}{y} = 1$

$y = x$ (3)

Substituindo (2) e (3) em (1)

$\Phi_B = B x^2$

mas $x = 0 + vt$

$$\boxed{\Phi_B = B v^2 t^2}$$

$\Phi_B = 0,350 \times (5,2)^2 \times 3^2$

$$\boxed{\Phi_B = 85,2\ Wb}$$

(b) $\mathcal{E} = \frac{d}{dt}\Phi_B = 2Bv^2t$

$|\mathcal{E}| = 2 \times 0,350 \times (5,2)^2 \times 3$

$$\boxed{|\mathcal{E}| = 56,8\ V}$$

O fluxo, que é para fora da página, está aumentando com o tempo. Então, pela lei de Lentz, a corrente induzida é no sentido horário para gerar um fluxo entrando na página e tentando compensar este aumento do fluxo.

$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{56,8}{600} = \boxed{94,6\ mA}$