L'Hospital's

Forma indeterminada $0/0$.

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ com $g(x) \neq 0$ numa vizinhança de $x = a$ exceto em $x = a$,

f e g contínuas em $x = a$

temos $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \; \dfrac{x - a}{g(x) - g(a)} \xrightarrow[\text{qdo } x \to a]{} f'(a)/g'(a)$

qdo. f e g são deriváveis em $x = a$.

Teo. Sejam f, g deriváveis em (a,b) com $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$.
Assuma $g'(x) \neq 0$ em (a,b). Então se $\lim_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Vale também $x \to b-$.

Exemplos:

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\{1-e^{2x}\} = 1-\cancel{e^{2\cdot 0}}^{\,1} = 0$$

Além disso temos $\lim_{x\to 0} x = 0$. Assim podemos usar L'Hospital's:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^{2x})'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{2x}\cdot 2}{1} = -2e^{2\cdot 0} = -2$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{x} = -2.$$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0 = \lim_{x \to 0} x .$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

$$\leadsto \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 .$$

(Fórmula do Valor-Médio de Cauchy) Sejam f e g contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b). Então $\exists\, c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c)\big(g(b)-g(a)\big) = g'(c)\big(f(b)-f(a)\big).$$

dem. Seja $h(x) = f(x)\big(g(b)-g(a)\big) - g(x)\big(f(b)-f(a)\big)$.

$h(a) = f(a)\big(g(b)-g(a)\big) - g(a)\big(f(b)-f(a)\big) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$

$= h(b)$. $\therefore$ Pelo TVM $\exists\, c \in (a,b)$ tal que

$h'(c) = \dfrac{\big(h(b)-h(a)\big)}{b-a} = 0$ de onde concluímos o teorema

pois $h'(x) = f'(x)\big(g(b)-g(a)\big) - g'(x)\big(f(b)-f(a)\big)$ $\blacksquare$

Teo. L'Hospital's $0/0$:

dem. Para cada $x \in (a,b)$, $\exists c \in (a,x)$ tal que

$$f'(c)\,(g(x) - g(a)) = g'(c)\,(f(x) - f(a))$$

$$\rightsquigarrow \quad f'(c)\,g(x) = g'(c)\,f(x) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Daí $$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}. \quad \blacksquare$$

Note que $a < c < x$.

Teo. Assuma f e g deriváveis em $(M, +\infty)$.

Suponha $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ com $g'(x) \neq 0$.

Então se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ então $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = L$.

dem. Aplica-se o teorema anterior para

$F(t) = f(1/t)$ e $G(t) = g(1/t)$. Note que, qdo

$t \to 0+$, $1/t \to +\infty$, e daí $\lim_{t\to0+} F(t) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

e $\lim_{t\to0+} G(t) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

CQD

Resultado análogo com $x \to -\infty$ também pode ser obtido.

Indeterminação ∞/∞.

Teo. (i) Sejam f, g deriváveis em (a,b) com g e $g' \neq 0$ em (a,b).

Assuma $\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = \infty$. $\boxed{x \to a+}$

Então, se $\lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \rightsquigarrow \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

(ii) Sejam f, g deriváveis em $(a, +\infty)$ com g e $g' \neq 0$ em (a,b).

Suponha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty$. $\boxed{x \to -\infty}$

Então, se $\lim_{x \to +\infty} f'(x)/g'(x) = L \rightsquigarrow \lim_{x \to +\infty} f(x)/g(x) = L$.

dem. Exercício.

O comportamento de $\ln x$ e e^x no infinito!

(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad \forall a>0.$ Com efeito

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = \lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty \quad \text{e}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^a)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{a x^{a-1}} = \frac{1}{a} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a} = 0$$

(ii) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{ax}} = 0 \quad \forall a > 0.$ De fato,

$$\lim_{x \to +\infty} x = \lim_{x \to +\infty} e^{ax} = +\infty \quad e$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{(e^{ax})'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{ax} \cdot a} = \frac{1}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{ax}} = 0.$$

Exercício: Mostre que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^b}{x^a} = 0 \quad \forall a, b > 0.$

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^b}{e^{ax}} = 0 \quad \forall\, a, b > 0.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^b = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{ax} = +\infty.$ Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $b - k < 0.$

(o menor k com essa propriedade)

$$\frac{\left(x^b\right)^{(k)}}{\left(e^{ax}\right)^{k}} = \frac{\left(bx^{b-1}\right)^{(k-1)}}{\left(ae^{ax}\right)^{(k-1)}} = \dots = \frac{b(b-1)\dots(b-k+1)\,x^{b-k}}{a^k e^{ax}}$$

Desta vez podemos usar a regra de L'Hospital's k-vezes obtendo que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)\, x^{b-k}}{a^k e^{ax}} = 0 \quad \text{pois} \quad b-k<0$$

$$\therefore \lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0.$$