

LISTA SOBRE SPLINES - MAP2220 - BMAC 2021

Espera-se que o estudante tenha algum tipo de suporte computacional para auxiliar a resolver a lista.

Questão 1 A função $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, $x \in \mathbb{R}$, foi tabelada nos pontos igualmente espaçados $x_j = -5 + j$, $j \in \{0, 1, \dots, 10\}$ e obteve-se:

x_j	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y_j	.001597	.003891	.01220	.05882	0.5	1	0.5	.05882	.01220	.003891	.001597

- (i) Encontre o spline cúbico natural, $S(x)$ que interpola a tabela acima e calcule $S(j + 0.5)$, para $j \in \{-5, -4, \dots, 3, 4\}$.
- (ii) Use que $f'(-5) = .001276$ e $f'(5) = -.001276$, encontre o spline cúbico completo $\bar{S}(x)$ que interpola a tabela acima e calcule $\bar{S}(j + 0.5)$, para $j \in \{-5, -4, \dots, 3, 4\}$.
- (iii) Faça um esboço do gráfico de $S(x)$, $\bar{S}(x)$ e $f(x)$ para $x \in [-5, 5]$.

Questão 2 Suponha que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ foi tabelada nos pontos da partição \mathcal{P} de $[a, b]$ com nós $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ (com $n \geq 4$) e obteve-se $y_j = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$.

Quer-se obter um Spline interpolador $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ de f (i.e. $S(x_j) = y_j$, para $0 \leq j \leq n$) tal que $S|_{[x_0, x_2]}$ e $S|_{[x_{n-2}, x_n]}$ sejam funções de classe C^3 .

- (i) Prove que isto acontece se, e só se, $S|_{[x_0, x_2]}$ e $S|_{[x_{n-2}, x_n]}$ são polinômios de grau menor ou igual a 3 (não precisam ser o mesmo polinômio)
- (ii) Prove que existe um, e só um spline $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ que tem as propriedades desejadas.
- (iii) Considere a tabela

x_j	-5	-3	0	2	5
$y_j = f(x_j)$.001597	.01220	1	.05882	.001597

e determine o spline $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ que satisfaz as condições enunciadas nesta questão.

Questão 3 Considere $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par, com $f(x) = 1 - x$, para $0 \leq x \leq 1$

- (i) Determine o polinômio de grau menor ou igual a 4 que melhor aproxima f pelo M.M.Q. em $[-1, 1]$.
- (ii) Considere a partição \mathcal{P} de $[-1, 1]$ formada pelos pontos $x_j = -1 + j$ para $j \in \{0, 1, 2\}$. Determine o spline $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ que melhor aproxima f pelo M.M.Q. em $[-1, 1]$ e esboce o gráfico de S .
- (iii) Compare os erros quadráticos cometidos nas aproximações anteriores.