# MAP 2220
# Splines Cúbicos - I

# Hipóteses

**Notação**

Considere o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e uma partição $\mathcal{P}$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

cujos pontos $x_j,\ 0 \leq j \leq n$ seão chamados nós.

# Hipóteses

## Notação

Considere o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e uma partição $\mathcal{P}$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

cujos pontos $x_j,\ 0 \leq j \leq n$ seão chamados nós.

## Os artistas

**Definição 1.**

*Um Spline Cúbico em* $[a, b]$ *de nós em* $\mathcal{P}$ *é uma função* $S : [a, b] \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$ *tal que* $S|_{[x_{i-1}, x_i]}$ *é um polinômio de grau menor ou igual a* 3, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

# Problema de Interpolação por Splines cúbicos

## O problema

Dados $[a, b] \subset \mathbb{R}$, uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tabelada nos pontos de uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

com $y_j = f(x_j),\ 0 \leq j \leq n$
*procurar um spline cúbico $S$ em $[a, b]$ de nós em $\mathcal{P}$ tal que*
$S(x_i) = y_i,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

# Lembranças de Álgebra Linear

Fixe no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a partição $\mathcal{P}$ de nós
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
$\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ o conjunto dos splines cúbicos em $[a, b]$ e nós em $\mathcal{P}$.

### Trivialidade

**Fato 1.**

*$\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$*

### Problema Preliminar

Calcular a dimensão de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$.

# Resolve-se o "Problema Preliminar"

Seja $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ em $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$

1. $S"\big|_{[x_{i-1},x_i]}$ é afim;

# Resolve-se o "Problema Preliminar"

Seja $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ em $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$

1. $S"\big|_{[x_{i-1},x_i]}$ é afim;
2. Se $S"(x_i) = m_i, \;\; i = 0, 1, \ldots, n$ então, para $1 \leq i \leq n$, tem–se $S"(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} m_i + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} m_{i-1}, \;\; \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$

# Resolve-se o "Problema Preliminar"

Seja $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ em $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$

1. $S''\big|_{[x_{i-1},x_i]}$ é afim;
2. Se $S''(x_i) = m_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ então, para $1 \leq i \leq n$, tem–se $S''(x) = \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} m_i + \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}} m_{i-1},\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$
3. Como $S$ é de classe $\mathcal{C}^2$, integrando a expressão acima duas vezes resulta que existem reais $c_i$ e $d_i$ tais que, se $h_i = x_i - x_{i-1}$: $S(x) = \frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} m_i + \frac{(x_i-x)^3}{6h_i} m_{i-1} + c_i x + d_i,\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$.

# Resolve-se o "Problema Preliminar"

Seja $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ em $\mathcal{S}_\mathcal{P}$

1. $S''\big|_{[x_{i-1},x_i]}$ é afim;
2. Se $S''(x_i) = m_i, \ i = 0, 1, \ldots, n$ então, para $1 \le i \le n$, tem–se $S''(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} m_i + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} m_{i-1}, \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$
3. Como $S$ é de classe $\mathcal{C}^2$, integrando a expressão acima duas vezes resulta que existem reais $c_i$ e $d_i$ tais que, se $h_i = x_i - x_{i-1}$: $S(x) = \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} m_i + \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} m_{i-1} + c_i x + d_i, \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$.
4. Portanto: $S(x) = \frac{h_i^2}{6}\left[\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)^3 m_i + \left(\frac{x_i - x}{h_i}\right)^3 m_{i-1}\right] + c_i x + d_i, \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$.

# Resolve-se o “Problema Preliminar”

Seja $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ em $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$

1. $S''\big|_{[x_{i-1}, x_i]}$ é afim;
2. Se $S''(x_i) = m_i, \ i = 0, 1, \dots, n$ então, para $1 \leq i \leq n$, tem–se $S''(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} m_i + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} m_{i-1}, \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$
3. Como $S$ é de classe $\mathcal{C}^2$, integrando a expressão acima duas vezes resulta que existem reais $c_i$ e $d_i$ tais que, se $h_i = x_i - x_{i-1}$: $S(x) = \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} m_i + \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} m_{i-1} + c_i x + d_i, \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$.
4. Portanto: $S(x) = \frac{h_i^2}{6} \left[ \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right)^3 m_i + \left( \frac{x_i - x}{h_i} \right)^3 m_{i-1} \right] + c_i x + d_i, \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$.

**Conjectura 1.**

$$\dim \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = n + 3$$

# Uma base de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$

A partir da expressão:

$$S(x) = \frac{h_i^2}{6}\left[\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)^3 m_i + \left(\frac{x_i-x}{h_i}\right)^3 m_{i-1}\right] + c_i x + d_i,\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Considere, para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, um spline cúbico $S_k$ tal que $S_k"(x_i) = \delta_{ik}$.

Além disso, tome $S_{n+1}(x) = x,\ x \in [a, b]$ e $S_{n+2}(x) \equiv 1$.

# Uma base de $\mathcal{S}_\mathcal{P}$

A partir da expressão:

$$S(x) = \frac{h_i^2}{6}\left[\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)^3 m_i + \left(\frac{x_i-x}{h_i}\right)^3 m_{i-1}\right] + c_i x + d_i,\ \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Considere, para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, um spline cúbico $S_k$ tal que $S_k"(x_i) = \delta_{ik}$.

Além disso, tome $S_{n+1}(x) = x,\ \ x \in [a, b]$ e $S_{n+2}(x) \equiv 1$.

**Questão 1.**

$B = \{S_0(x), S_1(x), \ldots, S_n(x), S_{n+1}(x), S_{n+2}(x)\}$ *é uma base de* $\mathcal{S}_\mathcal{P}$*?*

# Uma base de $\mathcal{S}_\mathcal{P}$

**Fato 2.**

*$B$ gera $\mathcal{S}_\mathcal{P}$*

Demonstração.

Seja $S \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$ e, para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, faça $m_i = S''(x_i)$.

Então, se $R(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i S_i(x), \ \forall x \in [a, b]$, da definição de $S_i$, vem

$R''(x_i) = m_i = S''(x_i), \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Portanto, $S''(x) = R''(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i S_i''(x), \ \forall x \in [a, b]$ e, pelo teorema fundamental do cálculo, existem $\alpha$ e $\beta$ tais que

$S(x) = \alpha + \beta x + R(x) = \alpha + \beta x + \sum_{i=0}^{n} m_i S_i(x), \ \forall x \in [a, b]$. $\square$

# Uma base de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$

**Fato 3.**

*$B$ é linearmente independente.*

Demonstração.

Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ reais tais que
$L(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k S_k(x) + a_{n+1}x + a_{n+2} = 0, \ \forall x \in [a, b]$.

Derive $L(x)$ duas vezes e obtenha $L''(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k S_k''(x) = 0, , \ \forall x \in [a, b]$.

Como, para $0 \leq i \leq n$, tem–se $L''(x_i) = a_i, \ \therefore a_i = 0, \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Assim, $L(x) = a_{n+1}x + a_{n+2} = 0, \ \forall x \in [a, b]$, portanto
$a_{n+1} = a_{n+2} = 0$. $\square$

# Uma base de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$

**Corolário 1.**

1. *$B$ é base de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$,*
2. $\dim \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = n + 3$.

Veja que este resultado afirma que:
*Se, para $0 \leq k \leq n$, $S_k(x)$ é um spline cúbico de nós em $\mathcal{P}$ tal que $S_k''(x_i) = \delta_{ik}$, para todo $i \in \{0, 1 \ldots, n\}$, então $\{S_0(x), S_1(x), \ldots, S_n(x), x, 1\}$ é base de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$.*
Não importa qual "primitiva"é tomada para definir $S_k(x)$.

# Uma base de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$

## Uma Possível Escolha de $S_k$

- $S_0(x) = \frac{(x_1 - x)^3}{6h_1}$, se $x \in [x_0, x_1]$, e $S_0(x) = 0$, se $x_1 \leq x \leq b$.
- $S_n(x) = \frac{(x - x_{n-1})^3}{6h_n}$, se $x \in [x_{n-1}, x_n]$, e $S_n(x) = 0$, se $a \leq x \leq x_{n-1}$.

# Uma base de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$

## Uma Possível Escolha de $S_k$

- $S_0(x) = \frac{(x_1-x)^3}{6h_1}$, se $x \in [x_0, x_1]$, e $S_0(x) = 0$, se $x_1 \le x \le b$.
- $S_n(x) = \frac{(x-x_{n-1})^3}{6h_n}$, se $x \in [x_{n-1}, x_n]$, e $S_n(x) = 0$, se $a \le x \le x_{n-1}$.
- Para $1 \le k \le n$ seja $\chi_k$ a função característica de $[x_{k-1}, x_k]$, i.e. $\chi_k(x) = 1$, se $x \in [x_{k-1}, x_k]$ e $\chi_k(x) = 0$ caso contrário. Então:
  $S_k(x) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x} \left[ \int\limits_{x_{k-1}}^{u} [\frac{t-x_{k-1}}{h_k}\chi_k(t) + \frac{x_{k+1}-t}{h_{k+1}}\chi_{k+1}(t)]dt \right] du.$

# Uma base de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$

## Exemplo

Considere a partição de $[0, 3]$ dada por $x_i = i,\ \ i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

- $S_0(x) = \frac{(1-x)^3}{6}$, se $x \in [0, 1]$, e $S_0(x) = 0$, se $1 \le x \le 3$.
- $S_3(x) = \frac{(x-2)^3}{6}$, se $x \in [2, 3]$, e $S_3(x) = 0$, se $0 \le x \le 2$.
- $S_1(x) = \int\limits_0^x \left[ \int\limits_0^u t\chi_1(t) + (2-t)\chi_2(t)]dt \right] du$

$$\therefore S_1(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6},\ \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{3} - x + x^2 - \frac{x^3}{6},\ \text{se } 1 \le x \le 2 \\ x - 1,\ \text{se } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

- $S_2(x) = \begin{cases} 0,\ \text{se } 0 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{6} + \frac{x-x^2}{2} + \frac{x^3}{6},\ \text{se } 1 \le x \le 2 \\ \frac{5-7x+3x^2}{2} - \frac{x^3}{6},\ \text{se } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

# Considerações:

1. Um spline cúbico $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ é chamado natural se $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$. Note que o subconjunto de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ formado pelos splines naturais é um subespaço vetorial e, como $\dim \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = n + 3$, vem que a dimensão desse subespaço é $n + 1$. É claro, pela construção da base $B$, que os splines de $B_0 = B \setminus \{S_0, S_n\}$ são todos naturais, portanto $B_0$ é uma base do subespaço dos splines naturais de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$.
2. É importante ressaltar que a expressão de um spline $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ tal que $S''(x_i) = m_i$, num intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ ser, como visto antes,

$$S(x) = \frac{h_i^2}{6}\left[\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)^3 m_i + \left(\frac{x_i - x}{h_i}\right)^3 m_{i-1}\right] + c_i x + d_i, \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

e $B$ ser uma base de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ isso não quer dizer que os valores $c_i$ e $d_i$ sejam os mesmos para diferentes valores de $i$, isso é, em geral, falso.

# Introdução

1. Como mencionado, o problema é, tabelar uma $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nos pontos da partição $\mathcal{P}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, e procurar um spline cúbico $S$ de nós em $\mathcal{P}$ tal que $S(x_j) = f(x_j) = y_j$.
2. Como a dimensão de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ é $n + 3$ e no problema de interpolação apresentado há $n + 1$ condições $(S(x_j) = y_j,\ 0 \leq j \leq n)$, não há solução única para esse problema! Na verdade, se $B$ é a base supramencionada o sistema $\sum_{k=0}^{n+2} a_k S_k(x_j) = y_j,\ 0 \leq j \leq n$, é um sistema de $n + 1$ equações e $n + 3$ incógnitas que tem posto $n + 1$ (pois $B$ é uma base!) e assim tem como solução um espaço afim de dimensão 2.

# Introdução

3. Uma questão que pode ser colocada é como determinar (todas) as soluções do problema de interpolação apresentado? Há modos simples de fazer isso?
4. Outro problema é procurar "restrições adicionais" para o spline $S$ procurado (além das condições $S(x_i) = y_i$) de forma a haver apenas um spline que satisfaça todas as propriedades requeridas;

# Procura-se *uma* solução... I - "Força Bruta"

$B$ é uma base de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, assim as soluções do problema de interpolação estudado são os splines $S(x) = \sum_{k=0}^{n+2} a_k S_k(x)$ em que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2})$ são as soluções do sistema linear de $n+1$ equações e $n+3$ incógnitas $\sum_{k=0}^{n+2} a_k S_k(x_j) = y_j,\ 0 \leq j \leq n.$

# Procura-se *uma* solução... I - “Força Bruta”

$B$ é uma base de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, assim as soluções do problema de interpolação estudado são os splines $S(x) = \sum_{k=0}^{n+2} a_k S_k(x)$ em que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2})$ são as soluções do sistema linear de $n+1$ equações e $n+3$ incógnitas $\sum_{k=0}^{n+2} a_k S_k(x_j) = y_j, \ 0 \le j \le n$.

## Notas

1. O posto de $[S_k(x_j)], \ 0 \le k \le n+3, \ 0 \le j \le n$ é $n+1$.
2. Se $j \ge 1$ então $S_0(x_j) = 0$.
3. Se $1 \le k \le n$ e $0 \le j \le k-1$ então $S_k(x_j) = 0$.
4. Assim, a matriz $[S_k(x_j)]$ é triangular inferior.

# Procura-se *uma* solução... I - "Força Bruta"

## Formas de individualizar o Spline interpolador

1. Procurar um spline interpolador $S$ natural, i.e. $S"(x_0) = S"(x_n) = 0$. Com a parafernália anterior, resolver esse problema é procurar a solução $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2})$ do sistema visto em que $a_0 = a_n = 0$.

# Procura-se *uma* solução. . . I - “Força Bruta”

## Formas de individualizar o Spline interpolador

1. Procurar um spline interpolador $S$ natural, i.e. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$. Com a parafernália anterior, resolver esse problema é procurar a solução $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2})$ do sistema visto em que $a_0 = a_n = 0$.
2. Procurar um spline interpolador que seja combinação linear de $\{S_0(x), S_1(x), \ldots, S_n(x)\}$. Isto corresponde a procurar a solução $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2})$ do sistema anterior tal que $a_{n+1} = a_{n+2} = 0$.

# Procura-se *uma* solução. . . I - “Força Bruta”

## Formas de individualizar o Spline interpolador

1. Procurar um spline interpolador $S$ natural, i.e. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$. Com a parafernália anterior, resolver esse problema é procurar a solução $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2})$ do sistema visto em que $a_0 = a_n = 0$.
2. Procurar um spline interpolador que seja combinação linear de $\{S_0(x), S_1(x), \ldots, S_n(x)\}$. Isto corresponde a procurar a solução $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2})$ do sistema anterior tal que $a_{n+1} = a_{n+2} = 0$.
3. Suponha que se conhecem $f'(x_0)$ e $f'(x_n)$. Nessa situação parece sensato procurar um spline interpolador $S$ que satisfaça $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$.
   Dessa forma chega-se a um sistema de $n+3$ equações com $n+3$ imncógnitas, pode-se mostrar que este sistema (se $n \geq 2$) tem posto máximo, portanto solução única.

# Procura-se *uma* solução... II

Seja $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ tal que $S(x_i) = y_i, \ \forall i \in \{0, 1, \dots n\}$.
Se $S"(x_i) = m_i$ então para $x \in [x_{i-1}, x_i]$, tem-se

1. $S(x) = \frac{h_i^2}{6}\left[\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)^3 m_i + \left(\frac{x_i-x}{h_i}\right)^3 m_{i-1}\right] + c_i x + d_i$
2. $S(x_{i-1}) = y_{i-1}, \ S(x_i) = y_i$

Algumas manipulações algébricas depois, escreve–se $c_i$ e $d_i$ em termos das demais variáveis e, para $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$, tem–se:

$$\begin{aligned} S(x) \quad = \quad & \frac{x_i - x}{h_i} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} y_i + \\ & \frac{h_i^2}{6}\left[\left(\frac{x_i - x}{h_i}\right)^3 - \frac{x_i - x}{h_i}\right] m_{i-1} + \\ & \frac{h_i^2}{6}\left[\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)^3 - \frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right] m_i \end{aligned} \tag{1}$$

# Procura-se *uma* solução. . . II

3. A expressão (1) em si, sozinha, não serve para determinar os $m_i$, mas lembre que $S$ é $\mathcal{C}^2$, assim, para $k \in \{1, \ldots n-1\}$ tem–se $\lim_{x \to x_k -} S'(x) = \lim_{x \to x_k +} S'(x)$.

## Procura-se *uma* solução. . . II

3. A expressão (1) em si, sozinha, não serve para determinar os $m_i$, mas lembre que $S$ é $\mathcal{C}^2$, assim, para $k \in \{1, \ldots n-1\}$ tem–se $\lim\limits_{x \to x_k -} S'(x) = \lim\limits_{x \to x_k +} S'(x)$.
4. Para calcular $\lim\limits_{x \to x_k -} S'(x)$ use (1) com $i = k$ e, para o cálculo de $\lim\limits_{x \to x_k +} S'(x)$, use (1) com $i = k + 1$, para ver que,

# Procura-se *uma* solução... II

3. A expressão (1) em si, sozinha, não serve para determinar os $m_i$, mas lembre que $S$ é $\mathcal{C}^2$, assim, para $k \in \{1, \ldots n-1\}$ tem–se $\lim\limits_{x \to x_k -} S'(x) = \lim\limits_{x \to x_k +} S'(x)$.
4. Para calcular $\lim\limits_{x \to x_k -} S'(x)$ use (1) com $i = k$ e, para o cálculo de $\lim\limits_{x \to x_k +} S'(x)$, use (1) com $i = k+1$, para ver que,
5. para todo $k \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$\frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} m_{k-1} + 2m_k + \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} m_{k+1} = \alpha_k,$$
$$\alpha_k = \frac{6}{h_k + h_{k+1}} \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right). \qquad (2)$$

# Procura-se *uma* solução... II

6. Como os $h_k$ e $y_k$ são conhecidos, (2) é um sistema linear nas incógnitas $m_k$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ com $n - 1$ equações.

# Procura-se *uma* solução. . . II

6. Como os $h_k$ e $y_k$ são conhecidos, (2) é um sistema linear nas incógnitas $m_k, \; k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ com $n - 1$ equações.
7. Note que esse sistema é **tridiagonal**, i.e. em cada equação só aparecem três incógnitas e, ao escrever (2) na forma matricial, a matriz dos coeficientes tem três diagonais diferentes de zero.

# Procura-se *uma* solução... II

6. Como os $h_k$ e $y_k$ são conhecidos, (2) é um sistema linear nas incógnitas $m_k$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ com $n-1$ equações.
7. Note que esse sistema é **tridiagonal**, i.e. em cada equação só aparecem três incógnitas e, ao escrever (2) na forma matricial, a matriz dos coeficientes tem três diagonais diferentes de zero.
8. Essa estrutura particular do sistema (2) faz com os cálculos envolvidos sejam mais simples do que os discutidos antes, na parte "força bruta".

# Procura-se *uma* solução... II

6. Como os $h_k$ e $y_k$ são conhecidos, (2) é um sistema linear nas incógnitas $m_k, \; k \in \{0, 1, \dots, n\}$ com $n-1$ equações.
7. Note que esse sistema é **tridiagonal**, i.e. em cada equação só aparecem três incógnitas e, ao escrever (2) na forma matricial, a matriz dos coeficientes tem três diagonais diferentes de zero.
8. Essa estrutura particular do sistema (2) faz com os cálculos envolvidos sejam mais simples do que os discutidos antes, na parte "força bruta".
9. As três diagonais que não são nulas são a diagonal principal, cujo coeficiente de cada termo é 2, e as duas "encostadas" a ela, cujos coeficientes são, $a_{k-1,k} = \frac{h_k}{h_k+h_{k+1}}$ e $a_{k+1,k} = \frac{h_{k+1}}{h_k+h_{k+1}}$. Como cada um desses coeficientes está no intervalo aberto $(0, 1)$ o sistema (2) é de diagonal dominante e portanto tem posto máximo.

# Procura-se *uma* solução. . . II

## Individualizando a solução

# Procura-se *uma* solução... II

## Individualizando a solução

1. Spline natural: Se o spline interpolador procurado for natural, então $m_0 = m_n = 0$ e (2) torna-se um sistema linear de $n-1$ equações com $n-1$ incógnitas, tridiagonal, e de diagonal dominante.
   Sistemas desse tipo podem ser resolvidos de forma eficiente pelo método da eliminação de Gauss, sem ser necessário condensação pivotal (e o critério das linhas mostra que o Método de Gauss-Siedel também pode ser usado com sucesso).

# Procura-se *uma* solução. . . II

## Individualizando a solução

2. Spline completo: Seja $f : [a, b] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$. Procura-se $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, tal que $S(x_j) = f(x_j)$ para $0 \leq j \leq n$, $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$.

# Procura-se *uma* solução... II

## Individualizando a solução

2. Spline completo: Seja $f : [a, b] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$. Procura-se $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, tal que $S(x_j) = f(x_j)$ para $0 \leq j \leq n$, $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$.

Nesse caso, às equações do sistema linear (2) deve-se acrescentar $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$. Como em $[x_0, x_1]$, tem–se $S(x) = \frac{x_1 - x}{h_1} y_0 + \frac{x - x_0}{h_1} y_1 + \frac{h_1^2}{6} \left[ \left( \frac{x_1 - x}{h_1} \right)^3 - \frac{x_1 - x}{h_1} \right] m_0 + \frac{h_1^2}{6} \left[ \left( \frac{x - x_0}{h_1} \right)^3 - \frac{x - x_0}{h_1} \right] m_0,$
resulta $S'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{6} [2m_0 + m_1]$.
Então $S'(x_0) = f'(x_0) \Leftrightarrow 2m_0 + m_1 = \frac{6}{h_1} [\frac{y_1 - y_0}{h_1} - f'(x_0)]$.
De modo análogo, $S'(x_n) = f'(x_n) \Leftrightarrow m_{n-1} + 2m_n = \frac{6}{h_n} [f'(x_n) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}]$.

# Procura-se *uma* solução. . . II

Assim, para resolver o problema do "spline completo" deve-se resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = \frac{6}{h_1}[\frac{y_1-y_0}{h_1} - f'(x_0)] \\ \frac{h_k}{h_k+h_{k+1}} m_{k-1} + 2m_k + \frac{h_{k+1}}{h_k+h_{k+1}} m_{k+1} = \alpha_k \ (1 \le k \le n-1) \\ m_{n-1} + 2m_n = \frac{6}{h_n}[f'(x_n) - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}] \end{cases} \quad (3)$$

em que $\alpha_k = \frac{6}{h_k+h_{k+1}} \left( \frac{y_{k+1}-y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k-y_{k-1}}{h_k} \right)$.

# Procura-se *uma* solução. . . II

Assim, para resolver o problema do "spline completo" deve-se resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = \frac{6}{h_1}[\frac{y_1 - y_0}{h_1} - f'(x_0)] \\ \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} m_{k-1} + 2m_k + \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} m_{k+1} = \alpha_k \ (1 \leq k \leq n-1) \\ m_{n-1} + 2m_n = \frac{6}{h_n}[f'(x_n) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}] \end{cases} \tag{3}$$

em que $\alpha_k = \frac{6}{h_k + h_{k+1}} \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right)$.

Note que este é um sistema linear de $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas e, cono (2), é um sistema tridiagonal, com diagonal dominante.

# Procura-se *uma* solução... II

## Observações finais

1. Viu-se como resolver o problema de encontrar splines interpoladores naturais e o problema do spline completo através de sistemas lineares mais simples do que os mencionados na pare denominada "força bruta", através do cálculo das segundas derivadas dos splines procurados nos nós da partição.
2. Uma vez calculados $m_i = S"(x_i)$ o modo de calcular $S(x)$ num ponto $x \in [a, b]$ que não seja um dos nós, é determinar o único $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in [x_{k-1}, x_k]$ e usar a expressão de $S(x)$ em $[x_{k-1}, x_k]$ dada por (1) com $i = k$.

# Procura-se *uma* solução... II

## Observações finais

1. Viu-se como resolver o problema de encontrar splines interpoladores naturais e o problema do spline completo através de sistemas lineares mais simples do que os mencionados na pare denominada "força bruta", através do cálculo das segundas derivadas dos splines procurados nos nós da partição.
2. Uma vez calculados $m_i = S''(x_i)$ o modo de calcular $S(x)$ num ponto $x \in [a, b]$ que não seja um dos nós, é determinar o único $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in [x_{k-1}, x_k]$ e usar a expressão de $S(x)$ em $[x_{k-1}, x_k]$ dada por (1) com $i = k$.
3. Podem-se empregar as ideias e técnicas vistas aqui para resolver outros problemas de interpolação de splines cúbicos, por exemplo, a situação em que a função $f$ tabelada é de classe $\mathcal{C}^2$ e é periódica de período $b - a$. Nesse caso, deve procurar-se um spline interpolador $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ tal que $m_0 = S''(x_0) = S''(x_n) = m_n$ e $S'(x_0) = S'(x_n)$.