Interpolação polinomial

Forma de Newton - Diferenças divididas

Nelson Kuhl

IME/USP

13 de junho de 2021
(modificado em 15 de junho de 2021)

Introdução

A forma de Newton nada mais é do que a representação do polinômio interpolador em uma base específica.

Introdução

A forma de Newton nada mais é do que a representação do polinômio interpolador em uma base específica. Considere a tabela

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}, \qquad (1)$$

onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$.

Introdução

A forma de Newton nada mais é do que a representação do polinômio interpolador em uma base específica. Considere a tabela

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}, \tag{1}$$

onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Então os $n+1$ polinômios

$$\begin{aligned} &1,\ x - x_0,\ (x - x_0)\cdot(x - x_1), \dots,\ (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}), \\ &\dots,\ (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})\cdots(x - x_{n-1}), \end{aligned} \tag{2}$$

formam uma base para $\mathcal{P}_n$.

Introdução

A forma de Newton nada mais é do que a representação do polinômio interpolador em uma base específica. Considere a tabela

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}, \tag{1}$$

onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Então os $n+1$ polinômios

$$\begin{aligned} &1,\ x - x_0,\ (x - x_0)\cdot(x - x_1), \dots,\ (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}), \\ &\dots,\ (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})\cdots(x - x_{n-1}), \end{aligned} \tag{2}$$

formam uma base para $\mathcal{P}_n$. Logo, existem únicos coeficientes $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ tais que o polinômio interpolador p_n da tabela pode ser representado como

$$\begin{aligned} p_n(x) = c_0 &+ c_1\cdot(x - x_0) + c_2\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1) + \dots \\ &+ c_k\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) + \dots \\ &+ c_n\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3}$$

A forma de Newton

A representação (3) para o polinômio interpolador é chamada de **forma de Newton** para o polinômio interpolador.

A forma de Newton

A representação (3) para o polinômio interpolador é chamada de **forma de Newton** para o polinômio interpolador. Para ilustrar, quando $n = 3$, a base escolhida para $\mathcal{P}_3$ é formada pelos polinômios

$$
\begin{aligned}
&1, \\
&x - x_0, \\
&(x - x_0)(x - x_1), \text{ e} \\
&(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).
\end{aligned}
$$

A forma de Newton

A representação (3) para o polinômio interpolador é chamada de **forma de Newton** para o polinômio interpolador. Para ilustrar, quando $n = 3$, a base escolhida para $\mathcal{P}_3$ é formada pelos polinômios

$$\begin{aligned}
&1,\\
&x - x_0,\\
&(x - x_0)(x - x_1), \text{ e}\\
&(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).
\end{aligned}$$

O polinômio interpolador é então representado como

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

A forma de Newton

A representação (3) para o polinômio interpolador é chamada de **forma de Newton** para o polinômio interpolador. Para ilustrar, quando $n = 3$, a base escolhida para $\mathcal{P}_3$ é formada pelos polinômios

$$\begin{aligned}&1,\\&x - x_0,\\&(x - x_0)(x - x_1), \text{ e}\\&(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).\end{aligned}$$

O polinômio interpolador é então representado como

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Note que, apesar de x_3 não aparecer na base, a informação $p(x_3) = y_3$ tem de ser usada para a construção do polinômio interpolador.

A forma de Newton

Em relação ao exemplo estudado anteriormente,

$$\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 2^x & 0.5 & 1 & 2 & 4 \end{array},$$

A forma de Newton

Em relação ao exemplo estudado anteriormente,

x	-1	0	1	2
2^x	0.5	1	2	4

,

existem únicos coeficientes $\{c_j\}_{j=0}^{3}$ tais que o polinômio interpolador da tabela é igual a

A forma de Newton

Em relação ao exemplo estudado anteriormente,

x	-1	0	1	2
2^x	0.5	1	2	4

,

existem únicos coeficientes $\{c_j\}_{j=0}^{3}$ tais que o polinômio interpolador da tabela é igual a

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x + c_3(x+1)x(x-1).$$

A forma de Newton

Em relação ao exemplo estudado anteriormente,

x	-1	0	1	2
2^x	0.5	1	2	4

,

existem únicos coeficientes $\{c_j\}_{j=0}^{3}$ tais que o polinômio interpolador da tabela é igual a

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x + c_3(x+1)x(x-1).$$

Primeiramente, veremos uma maneira simples de se obter os coeficificentes. Posteriormente apresentaremos um método equivalente usando diferenças divididas, importantes em técnicas de interpolação.

Cálculo dos coeficientes

Os coeficientes da forma de Newton são obtidos impondo-se as restrições $p_n(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$, na representação (3), o que nos dá o seguinte sistema linear triangular inferior:

Cálculo dos coeficientes

Os coeficientes da forma de Newton são obtidos impondo-se as restrições $p_n(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$, na representação (3), o que nos dá o seguinte sistema linear triangular inferior:

$$
\begin{aligned}
&c_0 = y_0 \\
&c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1 \\
&c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\
&\vdots \\
&c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots \\
&+ c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) = y_n
\end{aligned}
$$

Cálculo dos coeficientes

Os coeficientes da forma de Newton são obtidos impondo-se as restrições $p_n(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$, na representação (3), o que nos dá o seguinte sistema linear triangular inferior:

$$
\begin{aligned}
& c_0 = y_0 \\
& c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1 \\
& c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\
& \vdots \\
& c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots \\
& + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) = y_n
\end{aligned}
$$

Como os pontos x_i são distintos, a diagonal da matriz é diferente de zero e o sistema pode ser facilmente resolvido por substituições progressivas.

Cálculo dos coeficientes

Para o exemplo, temos

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 0.5 \\
c_0 + c_1 \cdot 1 &= 1 \\
c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2 \cdot 1 &= 2 \\
c_0 + c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 3 \cdot 2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 &= 4,
\end{aligned}
$$

Cálculo dos coeficientes

Para o exemplo, temos

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 0.5 \\
c_0 + c_1 \cdot 1 &= 1 \\
c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2 \cdot 1 &= 2 \\
c_0 + c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 3 \cdot 2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 &= 4,
\end{aligned}
$$

cuja solução é $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$ e $c_3 = \frac{1}{12}$. O polinômio interpolador fica

$$p_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)x + \frac{1}{12}(x+1)x(x-1). \tag{4}$$

Cálculo dos coeficientes

Para o exemplo, temos

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 0.5 \\
c_0 + c_1 \cdot 1 &= 1 \\
c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2 \cdot 1 &= 2 \\
c_0 + c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 3 \cdot 2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 &= 4,
\end{aligned}
$$

cuja solução é $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$ e $c_3 = \frac{1}{12}$. O polinômio interpolador fica

$$p_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)x + \frac{1}{12}(x+1)x(x-1). \tag{4}$$

Agrupe as potências de x em (4) e verifique que o resultado é igual ao obtido na primeira aula de interpolação.

Cálculo dos coeficientes

Para o exemplo, temos

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 0.5\\
c_0 + c_1 \cdot 1 &= 1\\
c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2 \cdot 1 &= 2\\
c_0 + c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 3 \cdot 2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 &= 4,
\end{aligned}
$$

cuja solução é $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$ e $c_3 = \frac{1}{12}$. O polinômio interpolador fica

$$p_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)x + \frac{1}{12}(x+1)x(x-1). \tag{4}$$

Agrupe as potências de x em (4) e verifique que o resultado é igual ao obtido na primeira aula de interpolação. Há uma outra forma de se obter os coeficentes, com implicações mais abrangentes. Ela envolve propriedades da forma de Newton e do polinômio interpolador de subtabelas.

Uma propriedade dos coeficientes

Suponha que $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ são os **coeficientes da forma de Newton** para o polinômio interpolador da tabela

$$\begin{array}{c|cccccc} x & x_0 & x_1 & \ldots & x_k & \ldots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \ldots & y_k & \ldots & y_n \end{array}. \tag{5}$$

Uma propriedade dos coeficientes

Suponha que $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ são os **coeficientes da forma de Newton** para o polinômio interpolador da tabela

$$\begin{array}{c|cccccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_k & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_k & \dots & y_n \end{array}. \tag{5}$$

Então, a expressão truncada no índice k,

$$\begin{aligned} p_k(x) =& c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &+ c_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

é o polinômio interpolador da subtabela formada pelos primeiros $k + 1$ pontos (x_i, y_i), $0 \le i \le k$.

Uma propriedade dos coeficientes

Suponha que $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ são os **coeficientes da forma de Newton** para o polinômio interpolador da tabela

$$\begin{array}{c|cccccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_k & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_k & \dots & y_n \end{array}. \tag{5}$$

Então, a expressão truncada no índice k,

$$\begin{aligned} p_k(x) =& c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &+ c_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

é o polinômio interpolador da subtabela formada pelos primeiros $k+1$ pontos (x_i, y_i), $0 \le i \le k$. De fato, o grau de p_k é menor ou igual a k e

$$p_k(x_i) = p_n(x_i) = y_i, \quad 0 \le i \le k.$$

Uma propriedade dos coeficientes

Portanto, para cada $k = 0, 1, \ldots, n$, o coeficiente c_k da forma de Newton é igual ao **coeficiente de x^k do polinômio interpolador da subtabela formada pelos primeiros $k + 1$ pontos**. Subtabelas terão um papel importante na nossa análise e vamos então definir a seguinte notação.

Uma propriedade dos coeficientes

Portanto, para cada $k = 0, 1, \ldots, n$, o coeficiente c_k da forma de Newton é igual ao **coeficiente de x^k do polinômio interpolador da subtabela formada pelos primeiros $k+1$ pontos**. Subtabelas terão um papel importante na nossa análise e vamos então definir a seguinte notação.

Notação

Dada a Tabela (5), denotaremos por

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]$$

o coeficiente de x^k do polinômio interpolador da **subtabela** formada pelos $k+1$ pontos (x_{i+j}, y_{i+j}), $0 \leq j \leq k$. A notação explicita o fato de que este coeficiente é caracterizado unicamente por x_{i+j} e $y_{i+j} = f(x_{i+j})$, $0 \leq j \leq k$.

Uma propriedade dos coeficientes

Portanto, para cada $k = 0, 1, \ldots, n$, o coeficiente c_k da forma de Newton é igual ao **coeficiente de x^k do polinômio interpolador da subtabela formada pelos primeiros $k+1$ pontos**. Subtabelas terão um papel importante na nossa análise e vamos então definir a seguinte notação.

Notação

Dada a Tabela (5), denotaremos por

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]$$

o coeficiente de x^k do polinômio interpolador da **subtabela** formada pelos $k+1$ pontos (x_{i+j}, y_{i+j}), $0 \le j \le k$. A notação explicita o fato de que este coeficiente é caracterizado unicamente por x_{i+j} e $y_{i+j} = f(x_{i+j})$, $0 \le j \le k$.

- Com esta notação, $c_k = f[x_0, \ldots, x_k]$, $0 \le k \le n$.

Um resultado teórico (demonstração no último slide)

Teorema 1

Dada a tabela (5), defina $p_{0\ldots n-1}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n-1$ e $p_{1\ldots n}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$. Então, para todo x, o polinômio interpolador p_n da tabela (5) satisfaz

$$p_n(x) = \frac{(x - x_0)p_{1\ldots n}(x) - (x - x_n)p_{0\ldots n-1}(x)}{x_n - x_0}. \tag{6}$$

Um resultado teórico (demonstração no último slide)

Teorema 1

Dada a tabela (5), defina $p_{0\ldots n-1}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n-1$ e $p_{1\ldots n}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$. Então, para todo x, o polinômio interpolador p_n da tabela (5) satisfaz

$$p_n(x) = \frac{(x - x_0)p_{1\ldots n}(x) - (x - x_n)p_{0\ldots n-1}(x)}{x_n - x_0}. \tag{6}$$

Comparando-se os coeficientes de x^n dos dois lados de (6), concluimos que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Um resultado teórico (demonstração no último slide)

Teorema 1

Dada a tabela (5), defina $p_{0\ldots n-1}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela (x_i, y_i), $0 \le i \le n-1$ e $p_{1\ldots n}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela (x_i, y_i), $1 \le i \le n$. Então, para todo x, o polinômio interpolador p_n da tabela (5) satisfaz

$$p_n(x) = \frac{(x - x_0)p_{1\ldots n}(x) - (x - x_n)p_{0\ldots n-1}(x)}{x_n - x_0}. \tag{6}$$

Comparando-se os coeficientes de x^n dos dois lados de (6), concluimos que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

O procedimento pode ser continuado para subtabelas, nos levando a concluir que $f[x_i, \ldots, x_{i+k}]$ é uma **diferença dividida de ordem k**.

Diferenças divididas de ordem j

- $j = 0: \;\; f[x_i] = y_i, \;\; 0 \leq i \leq n$
- $j = 1: \;\; f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \;\; 0 \leq i \leq n-1$
- $j = 2: \;\; f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+2}, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_i]}{x_{i+2} - x_i}, \;\; 0 \leq i \leq n-2$

$\vdots$

- $j = k: \;\; f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] =$
$$\frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, \;\; 0 \leq i \leq n-k$$

etc...

Exemplo

x	-1	0	1	2
2^x	0.5	1	2	4

Exemplo

x	-1	0	1	2
2^x	0.5	1	2	4

x	f_0	f_1	f_2	f_3
-1	$\mathbf{\frac{1}{2}}$			
		$\frac{1-1/2}{0+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$		
0	1		$\frac{1-1/2}{1+1} = \mathbf{\frac{1}{4}}$	
		$\frac{2-1}{1-0} = 1$		$\frac{1/2-1/4}{2+1} = \mathbf{\frac{1}{12}}$
1	2		$\frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$	
		$\frac{4-2}{2-1} = 2$		
2	4			

Exemplo

x	-1	0	1	2
2^x	0.5	1	2	4

x	f_0	f_1	f_2	f_3
-1	$\mathbf{\frac{1}{2}}$			
		$\frac{1-1/2}{0+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$		
0	1		$\frac{1-1/2}{1+1} = \mathbf{\frac{1}{4}}$	
		$\frac{2-1}{1-0} = 1$		$\frac{1/2-1/4}{2+1} = \mathbf{\frac{1}{12}}$
1	2		$\frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$	
		$\frac{4-2}{2-1} = 2$		
2	4			

Em negrito estão os coeficientes da forma de Newton, que são os mesmos que aparecem em (4). Para chegarmos até o último coeficiente, precisamos calcular todas as diferenças divididas. O número de operações aritméticas é igual ao da resolução do sistema triangular.

Subtabelas

A tabela de diferenças divididas contém os coeficientes da forma de Newton de polinômios interpoladores de certas subtabelas. Verifique como exercício as expressões abaixo, relacionadas ao exemplo. Os coeficientes já foram calculados na contrução da tabela de diferenças divididas.

Subtabelas

A tabela de diferenças divididas contém os coeficientes da forma de Newton de polinômios interpoladores de certas subtabelas. Verifique como exercício as expressões abaixo, relacionadas ao exemplo. Os coeficientes já foram calculados na contrução da tabela de diferenças divididas.

$$\begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline 2^x & \frac{1}{2} & 1 \end{array}, \quad p_{01}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1)$$

Subtabelas

A tabela de diferenças divididas contém os coeficientes da forma de Newton de polinômios interpoladores de certas subtabelas. Verifique como exercício as expressões abaixo, relacionadas ao exemplo. Os coeficientes já foram calculados na contrução da tabela de diferenças divididas.

$$\begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline 2^x & \frac{1}{2} & 1 \end{array}, \quad p_{01}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1)$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline 2^x & 1 & 2 \end{array}, \quad p_{12}(x) = 1 + x$$

Subtabelas

A tabela de diferenças divididas contém os coeficientes da forma de Newton de polinômios interpoladores de certas subtabelas. Verifique como exercício as expressões abaixo, relacionadas ao exemplo. Os coeficientes já foram calculados na contrução da tabela de diferenças divididas.

$$\begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline 2^x & \frac{1}{2} & 1 \end{array}, \quad p_{01}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1)$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline 2^x & 1 & 2 \end{array}, \quad p_{12}(x) = 1 + x$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline 2^x & 2 & 4 \end{array}, \quad p_{23}(x) = 2 + 2(x-1)$$

Subtabelas

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline 2^x & \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{array}, \quad p_{012}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)x$$

Subtabelas

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline 2^x & \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{array}, \quad p_{012}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)x$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline 2^x & 1 & 2 & 4 \end{array}, \quad p_{123}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x(x-1)$$

Diferenças simples

Quando as abscissas $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ são **igualmente espaçadas** com espaçamento h, $x_{j+1} = x_j + h$, $0 \leq j \leq n-1$, as diferenças divididas podem ser facilmente calculadas a partir das **diferenças simples**, definidas recursivamente como

Diferenças simples

Quando as abscissas $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ são **igualmente espaçadas** com espaçamento h, $x_{j+1} = x_j + h$, $0 \leq j \leq n-1$, as diferenças divididas podem ser facilmente calculadas a partir das **diferenças simples**, definidas recursivamente como $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ e

Diferenças simples

Quando as abscissas $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ são **igualmente espaçadas** com espaçamento h, $x_{j+1} = x_j + h$, $0 \leq j \leq n-1$, as diferenças divididas podem ser facilmente calculadas a partir das **diferenças simples**, definidas recursivamente como $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ e

$$\Delta^j f(x) = \Delta^{j-1} f(x+h) - \Delta^{j-1} f(x), \quad j \geq 2.$$

Diferenças simples

Quando as abscissas $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ são **igualmente espaçadas** com espaçamento h, $x_{j+1} = x_j + h$, $0 \leq j \leq n-1$, as diferenças divididas podem ser facilmente calculadas a partir das **diferenças simples**, definidas recursivamente como $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ e

$$\Delta^j f(x) = \Delta^{j-1} f(x+h) - \Delta^{j-1} f(x), \quad j \geq 2.$$

Também convencionamos usar $\Delta^0 f(x) = f(x)$, o que nos dá $\Delta^1 f(x) = \Delta^0 f(x+h) - \Delta^0 f(x) = f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$.

Diferenças simples

Quando as abscissas $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ são **igualmente espaçadas** com espaçamento h, $x_{j+1} = x_j + h$, $0 \leq j \leq n-1$, as diferenças divididas podem ser facilmente calculadas a partir das **diferenças simples**, definidas recursivamente como $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ e

$$\Delta^j f(x) = \Delta^{j-1} f(x+h) - \Delta^{j-1} f(x), \quad j \geq 2.$$

Também convencionamos usar $\Delta^0 f(x) = f(x)$, o que nos dá $\Delta^1 f(x) = \Delta^0 f(x+h) - \Delta^0 f(x) = f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$.

Proposição

Para abscissas igualmente espaçadas com espaçamento h,

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k! h^k}, \quad 0 \leq i \leq n-k.$$

Diferenças simples

Quando as abscissas $\{x_j\}_{j=0}^n$ são **igualmente espaçadas** com espaçamento h, $x_{j+1} = x_j + h$, $0 \leq j \leq n-1$, as diferenças divididas podem ser facilmente calculadas a partir das **diferenças simples**, definidas recursivamente como $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ e

$$\Delta^j f(x) = \Delta^{j-1} f(x+h) - \Delta^{j-1} f(x), \quad j \geq 2.$$

Também convencionamos usar $\Delta^0 f(x) = f(x)$, o que nos dá $\Delta^1 f(x) = \Delta^0 f(x+h) - \Delta^0 f(x) = f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$.

Proposição

Para abscissas igualmente espaçadas com espaçamento h,

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k! h^k}, \quad 0 \leq i \leq n-k.$$

A demonstração pode ser feita por indução (exercício).

Diferenças simples

Para o nosso exemplo

Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
$\mathbf{\frac{1}{2}}$			
	$1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$		
1		$1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$	
	$2 - 1 = 1$		$1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$
2		$2 - 1 = 1$	
	$4 - 2 = 2$		
4			

Diferenças simples

Para o nosso exemplo

Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
$\mathbf{\frac{1}{2}}$			
	$1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$		
1		$1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$	
	$2 - 1 = 1$		$1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$
2		$2 - 1 = 1$	
	$4 - 2 = 2$		
4			

Lembrando que $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$, temos

$$\Delta^0 f(-1) = \frac{1}{2},\ \Delta^1 f(-1) = \frac{1}{2},\ \Delta^2 f(-1) = \frac{1}{2} \text{ e } \Delta^3 f(-1) = \frac{1}{2}.$$

Diferenças simples

Para o nosso exemplo

Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
$\mathbf{\frac{1}{2}}$			
	$1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$		
1		$1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$	
	$2 - 1 = 1$		$1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$
2		$2 - 1 = 1$	
	$4 - 2 = 2$		
4			

Lembrando que $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$, temos

$$\Delta^0 f(-1) = \frac{1}{2},\ \Delta^1 f(-1) = \frac{1}{2},\ \Delta^2 f(-1) = \frac{1}{2} \text{ e } \Delta^3 f(-1) = \frac{1}{2}.$$

Quais são os valores de $\Delta^1 f(0)$, $\Delta^1 f(1)$ e $\Delta^2 f(1)$?

Diferenças simples

Como $h = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
f[-1] &= \frac{\Delta^0 f(-1)}{0!\,1^0} = \frac{1/2}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}, \\
f[-1, 0] &= \frac{\Delta^1 f(-1)}{1!\,1^1} = \frac{1/2}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}, \\
f[-1, 0, 1] &= \frac{\Delta^2 f(-1)}{2!\,1^2} = \frac{1/2}{2 \cdot 1} = \frac{1}{4}, \\
f[-1, 0, 1, 2] &= \frac{\Delta^3 f(-1)}{3!\,1^3} = \frac{1/2}{6 \cdot 1} = \frac{1}{12},
\end{aligned}$$

que são os coeficientes da forma de Newton calculados anteriormente.

Diferenças simples

Como $h = 1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
f[-1] &= \frac{\Delta^0 f(-1)}{0!\,1^0} = \frac{1/2}{1\cdot 1} = \frac{1}{2},\\
f[-1,0] &= \frac{\Delta^1 f(-1)}{1!\,1^1} = \frac{1/2}{1\cdot 1} = \frac{1}{2},\\
f[-1,0,1] &= \frac{\Delta^2 f(-1)}{2!\,1^2} = \frac{1/2}{2\cdot 1} = \frac{1}{4},\\
f[-1,0,1,2] &= \frac{\Delta^3 f(-1)}{3!\,1^3} = \frac{1/2}{6\cdot 1} = \frac{1}{12},
\end{aligned}
$$

que são os coeficientes da forma de Newton calculados anteriormente.

Exercício: Obtenha as diferenças divididas $f[0,1]$, $f[1,2]$ e $f[0,1,2]$ a partir da tabela de diferenças simples.

Diferenças divididas e derivadas

Seja p_n o polinômio interpolador da tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

gerada por uma função f.

Diferenças divididas e derivadas

Seja p_n o polinômio interpolador da tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

gerada por uma função f. Se acrescentarmos à tabela o ponto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, onde $\bar{x} \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$, então o polinômio interpolador desta nova tabela é dado por

$$p_{n+1}(x; \bar{x}) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}] \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Diferenças divididas e derivadas

Seja p_n o polinômio interpolador da tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

gerada por uma função f. Se acrescentarmos à tabela o ponto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, onde $\bar{x} \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$, então o polinômio interpolador desta nova tabela é dado por

$$p_{n+1}(x;\bar{x}) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}] \cdot (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Como $p_{n+1}(\bar{x};\bar{x}) = f(\bar{x})$, concluimos da expressão acima que

$$f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}] \cdot (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_n). \qquad (7)$$

Diferenças divididas e derivadas

Se f tiver pelo menos $n+1$ derivadas contínuas, então, comparando-se (7) com a fórmula do erro, concluimos que existe um ponto t pertencente ao menor intervalo contendo os pontos x_i, $0 \leq i \leq n$, e $\bar{x}$ tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}] = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

Diferenças divididas e derivadas

Se f tiver pelo menos $n+1$ derivadas contínuas, então, comparando-se (7) com a fórmula do erro, concluimos que existe um ponto t pertencente ao menor intervalo contendo os pontos x_i, $0 \leq i \leq n$, e $\bar{x}$ tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}] = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

Usando-se de forma mais geral o argumento para se chegar à expressão acima, temos:

Diferenças divididas e derivadas

Se f tiver pelo menos $n+1$ derivadas contínuas, então, comparando-se (7) com a fórmula do erro, concluimos que existe um ponto t pertencente ao menor intervalo contendo os pontos x_i, $0 \leq i \leq n$, e $\bar{x}$ tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}] = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

Usando-se de forma mais geral o argumento para se chegar à expressão acima, temos:

Teorema 2

Suponha que $f \in C^k([a,b])$. Sejam $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ $k+1$ pontos distintos em $[a,b]$. Então existe um ponto t pertencente ao menor intervalo contendo estes pontos tal que

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f^{(k)}(t)}{k!}.$$

Observações finais

- O polinômio interpolador independe da ordem dos pontos (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n$;

Observações finais

- O polinômio interpolador independe da ordem dos pontos (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n$;
- para representar o polinômio interpolador, a escolha da base de $\mathcal{P}_n$ é indiferente do ponto de vista matemático, mas importante do ponto de vista numérico;

Observações finais

- O polinômio interpolador independe da ordem dos pontos (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n$;
- para representar o polinômio interpolador, a escolha da base de $\mathcal{P}_n$ é indiferente do ponto de vista matemático, mas importante do ponto de vista numérico;
- a escolha da forma do polinômio interpolador depende do problema que se quer resolver e não há critérios rígidos. Consulte a literatura se tiver interesse.

Demonstração do Teorema 1

Denote por $q(x)$ o lado direito de (6), ou seja,

$$\frac{(x - x_0)p_{1\ldots n}(x) - (x - x_n)p_{0\ldots n-1}(x)}{x_n - x_0}.$$

Claramente, q **é um polinômio de grau menor ou igual a** n. Para $x = x_i$, $1 \leq i \leq n - 1$, os polinômios interpoladores das subtabelas coincidem com y_i e portanto

$$q(x_i) = \frac{(x_i - x_0)y_i - (x_i - x_n)y_i}{x_n - x_0} = y_i,\ 1 \leq i \leq n.$$

Além disso,

$$q(x_0) = \frac{-(x_0 - x_n)p_{0\ldots n-1}(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{-(x_0 - x_n)y_0}{x_n - x_0} = y_0,$$
$$q(x_n) = \frac{(x_n - x_0)p_{1\ldots n}(x_n)}{x_n - x_0} = \frac{(x_n - x_0)y_n}{x_n - x_0} = y_n.$$

Da unicidade do polinômio interpolador segue que $q = p_n$.

□