Interpolação Polinomial

Forma de Lagrange - Splines lineares

Nelson Kuhl

IME/USP

7 de dezembro de 2021

Revisão e comentários

1. Vamos denotar por $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial de dimensão $n+1$ gerado pelos polinômios reais de grau menor ou igual a n;

Revisão e comentários

1. Vamos denotar por $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial de dimensão $n+1$ gerado pelos polinômios reais de grau menor ou igual a n;
2. dada a tabela

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}, \tag{1}$$

   onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, sabemos que existe um **único** polinômio $p_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $p_n(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$, chamado de polinômio interpolador da tabela;

Revisão e comentários

1. Vamos denotar por $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial de dimensão $n+1$ gerado pelos polinômios reais de grau menor ou igual a n;
2. dada a tabela
$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}, \qquad (1)$$
onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, sabemos que existe um **único** polinômio $p_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $p_n(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$, chamado de polinômio interpolador da tabela;
3. escolhendo-se bases diferentes para $\mathcal{P}_n$, obteremos **representações diferentes** para este único polinômio interpolador.

Os polinômios L_k

Para a representação na forma de Lagrange, os seguintes polinômios são usados.

Os polinômios L_k

Para a representação na forma de Lagrange, os seguintes polinômios são usados.

Definição 1

Considere os pontos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ da tabela (1). Para cada $k = 0, 1, \ldots$ n, defina

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{2}$$

Os polinômios L_k

Para a representação na forma de Lagrange, os seguintes polinômios são usados.

Definição 1

Considere os pontos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ da tabela (1). Para cada $k = 0, 1, \ldots$ n, defina

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{2}$$

Propriedades:

- L_k é um polinômio de grau exatamente n, $0 \leq k \leq n$; (3)
- $L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq n.$ (4)

Os polinômios L_k

Por exemplo, para $n = 3$, com 4 pontos distintos x_0, x_1, x_2 e x_3, temos

Os polinômios L_k

Por exemplo, para $n = 3$, com 4 pontos distintos x_0, x_1, x_2 e x_3, temos

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

Os polinômios L_k

Por exemplo, para $n = 3$, com 4 pontos distintos x_0, x_1, x_2 e x_3, temos

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

Os polinômios L_k

Por exemplo, para $n = 3$, com 4 pontos distintos x_0, x_1, x_2 e x_3, temos

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

Os polinômios L_k

Por exemplo, para $n = 3$, com 4 pontos distintos x_0, x_1, x_2 e x_3, temos

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Os polinômios L_k

Por exemplo, para $n = 3$, com 4 pontos distintos x_0, x_1, x_2 e x_3, temos

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

É fácil ver que o grau de cada L_k é 3,

Os polinômios L_k

Por exemplo, para $n = 3$, com 4 pontos distintos x_0, x_1, x_2 e x_3, temos

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

É fácil ver que o grau de cada L_k é 3, que $L_0(x_0) = 1$ e $L_0(x_i) = 0$, $i = 1, 2$ e 3,

Os polinômios L_k

Por exemplo, para $n = 3$, com 4 pontos distintos x_0, x_1, x_2 e x_3, temos

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

É fácil ver que o grau de cada L_k é 3, que $L_0(x_0) = 1$ e $L_0(x_i) = 0$, $i = 1, 2$ e 3, que $L_1(x_1) = 1$ e $L_1(x_i) = 0$, $i = 0, 2$ e 3, etc.

A forma de Lagrange

Teorema 1

O polinômio interpolador p_n da tabela (1) pode ser representado como

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x). \tag{5}$$

Esta representação é chamada de forma de Lagrange para o polinômio interpolador.

A forma de Lagrange

Teorema 1

O polinômio interpolador p_n da tabela (1) pode ser representado como

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x). \tag{5}$$

Esta representação é chamada de forma de Lagrange para o polinômio interpolador.

Demonstração Defina a função $q(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$. Da propriedade (3), segue que esta função é um polinômio de grau menor ou igual a n.

A forma de Lagrange

Teorema 1

O polinômio interpolador p_n da tabela (1) pode ser representado como

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x). \tag{5}$$

Esta representação é chamada de forma de Lagrange para o polinômio interpolador.

Demonstração Defina a função $q(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$. Da propriedade (3), segue que esta função é um polinômio de grau menor ou igual a n. E da propriedade (4) obtemos $q(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$.

A forma de Lagrange

Teorema 1

O polinômio interpolador p_n da tabela (1) pode ser representado como

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x). \qquad (5)$$

Esta representação é chamada de forma de Lagrange para o polinômio interpolador.

Demonstração Defina a função $q(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$. Da propriedade (3), segue que esta função é um polinômio de grau menor ou igual a n. E da propriedade (4) obtemos $q(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$. Como o polinômio interpolador é único, segue que $q = p_n$.

$\square$

A forma de Lagrange

Teorema 1

O polinômio interpolador p_n da tabela (1) pode ser representado como

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x). \tag{5}$$

Esta representação é chamada de forma de Lagrange para o polinômio interpolador.

Demonstração Defina a função $q(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$. Da propriedade (3), segue que esta função é um polinômio de grau menor ou igual a n. E da propriedade (4) obtemos $q(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$. Como o polinômio interpolador é único, segue que $q = p_n$.

$\square$

Observação: Os polinômios $\{L_k\}_{k=0}^{n}$ formam uma base para $\mathcal{P}_n$.

Exemplo

Retornando ao exemplo da aula anterior:

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

com $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 4$.

Exemplo

Retornando ao exemplo da aula anterior:

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

com $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 4$.

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

Exemplo

Retornando ao exemplo da aula anterior:

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

com $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 4$.

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2}$$

Exemplo

Retornando ao exemplo da aula anterior:

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

com $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 4$.

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = -\frac{(x+1)x(x-2)}{2}$$

Exemplo

Retornando ao exemplo da aula anterior:

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

com $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 4$.

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = -\frac{(x+1)x(x-2)}{2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{(x+1)x(x-1)}{6}$$

Exemplo

O polinômio interpolador na forma de Lagrange é então dado por

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= \frac{1}{2} \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 2 \cdot L_2(x) + 4 \cdot L_3(x) \\
&= -\frac{x(x-1)(x-2)}{12} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - \\
&\quad (x+1)x(x-2) + \frac{2}{3}(x+1)x(x-1).
\end{aligned}
$$

Exemplo

O polinômio interpolador na forma de Lagrange é então dado por

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= \frac{1}{2} \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 2 \cdot L_2(x) + 4 \cdot L_3(x) \\
&= -\frac{x(x-1)(x-2)}{12} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - \\
&\quad (x+1)x(x-2) + \frac{2}{3}(x+1)x(x-1).
\end{aligned}
$$

Exercício Agrupe as potências de x e verifique que obtemos exatamente a expressão da aula anterior para a representação do polinômio interpolador na base canônica $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathcal{P}_3$.

Exemplo de Runge

Da fórmula do erro para a interpolação polinomial,

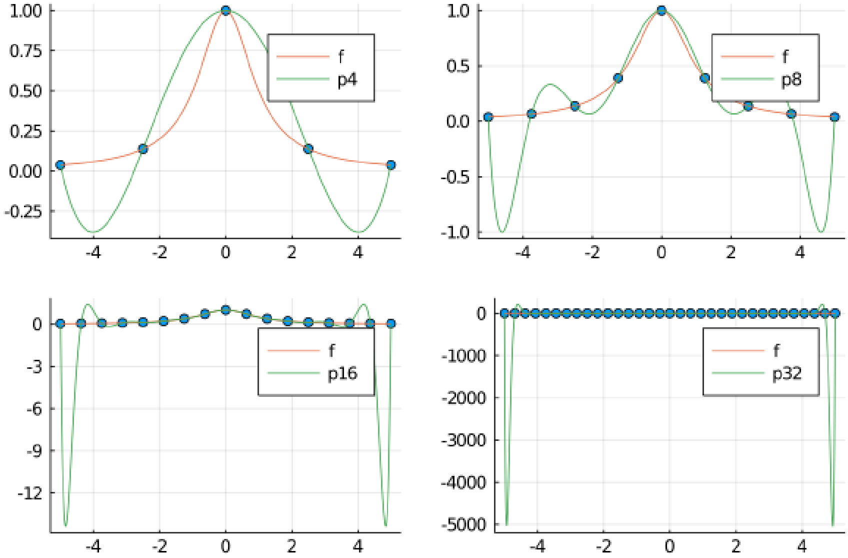
$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

não podemos garantir a convergência do polinômio interpolador para a função ao aumentarmos o número de pontos. Um exemplo clássico que ilustra este fato é o exemplo de Runge, no qual são obtidos os polinômios interpoladores para a função

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

em pontos igualmente espaçados no intervalo $[-5, 5]$. Gráficos com $n + 1 =$ 5, 9, 17 e 33 pontos são mostrados a seguir.

Exemplo de Runge



Exemplo de Runge

Os gráifcos sugerem que ao aumentarmos a quantidade de pontos igualmente espaçados, o polinômio interpolador irá oscilar com amplitudes cada vez maiores. Na verdade, pode-se provar que ao aumentarmos a quantidade de pontos igualmente espaçados, os polinômios interpoladores convergirão uniformemente para f se $|x| < x_c \approx 3.63$, ocorrendo divergência se $x_c < |x| < 5$. [1]

[1] James F. Epperson, *On the Runge example*, Amer. Math. Monthly 94 (1987), no. 4, 329–341

Exemplo de Runge

Os gráifcos sugerem que ao aumentarmos a quantidade de pontos igualmente espaçados, o polinômio interpolador irá oscilar com amplitudes cada vez maiores. Na verdade, pode-se provar que ao aumentarmos a quantidade de pontos igualmente espaçados, os polinômios interpoladores convergirão uniformemente para f se $|x| < x_c \approx 3.63$, ocorrendo divergência se $x_c < |x| < 5$. [1]

Em geral, interpolação de ordem alta com pontos igualmente espaçados não é boa para aproximações. Pode-se buscar uma escolha adequada de pontos, quando possível. Ou também usar interpolação polinomial por partes com os pontos dados, como veremos a seguir.

[1] James F. Epperson, *On the Runge example*, Amer. Math. Monthly 94 (1987), no. 4, 329–341

Splines lineares

Uma técnica muito flexível de interpolação para se evitar polinômios de grau alto é a interpolação polinomial por partes. O caso mais simples é o da interpolação linear por partes que descreveremos agora. Será apresentada também uma aplicação da fórmula do erro para a interpolação polinomial.

Splines lineares

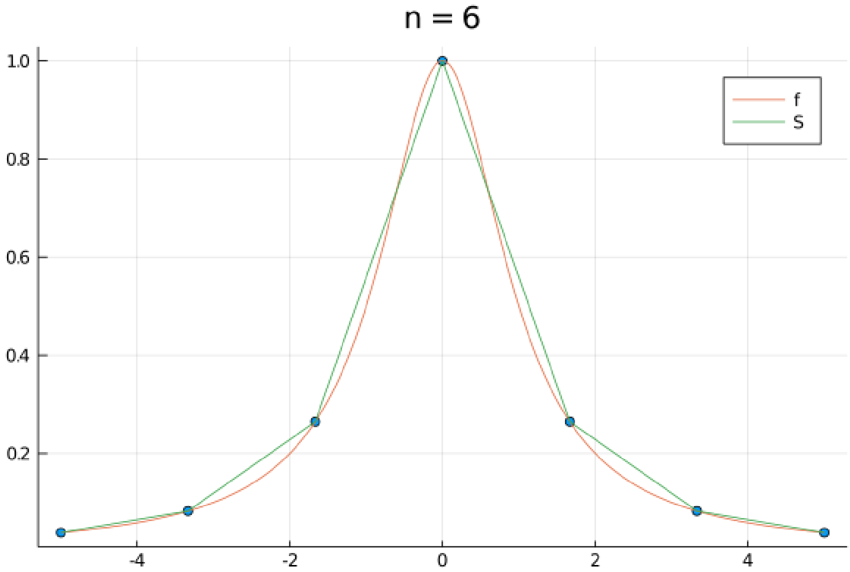
Uma técnica muito flexível de interpolação para se evitar polinômios de grau alto é a interpolação polinomial por partes. O caso mais simples é o da interpolação linear por partes que descreveremos agora. Será apresentada também uma aplicação da fórmula do erro para a interpolação polinomial.

Formulação do problema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e seja $\Delta = \{x_k = a + kh,\ 0 \leq k \leq n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ formada por $n + 1$ pontos equidistantes com espaçamento $h = \frac{b-a}{n}$. Deseja-se estimar o erro ao aproximarmos f por uma função $S_\Delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $S_\Delta(x_k) = f(x_k)$, $0 \leq k \leq n$, e tal que a restrição de S_Δ a cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$, é um polinômio de grau menor ou igual a 1.

Obs.: A função S_Δ é chamada de **spline linear** interpolador de f subordinado à partição Δ.

Splines lineares



Splines lineares

Sejam S_k as restrições de S_Δ aos subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$.

Splines lineares

Sejam S_k as restrições de S_Δ aos subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$. Por definição, S_k é um polinômio de grau menor ou igual a 1 tal que $S_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ e $S_k(x_k) = f(x_k)$.

Splines lineares

Sejam S_k as restrições de S_Δ aos subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$. Por definição, S_k é um polinômio de grau menor ou igual a 1 tal que $S_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ e $S_k(x_k) = f(x_k)$. Ou seja, S_k é o polinômio interpolador da tabela

$$\begin{array}{c|cc} x & x_{k-1} & x_k \\ \hline y & f(x_{k-1}) & f(x_k) \end{array},$$

Splines lineares

Sejam S_k as restrições de S_Δ aos subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$. Por definição, S_k é um polinômio de grau menor ou igual a 1 tal que $S_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ e $S_k(x_k) = f(x_k)$. Ou seja, S_k é o polinômio interpolador da tabela

$$\begin{array}{c|cc} x & x_{k-1} & x_k \\ \hline y & f(x_{k-1}) & f(x_k) \end{array},$$

que na forma de Lagrange é dado por

$$S_k(x) = \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} f(x_{k-1}) + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} f(x_k), \quad x \in I_K.$$

Splines lineares

Sejam S_k as restrições de S_Δ aos subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$. Por definição, S_k é um polinômio de grau menor ou igual a 1 tal que $S_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ e $S_k(x_k) = f(x_k)$. Ou seja, S_k é o polinômio interpolador da tabela

$$\begin{array}{c|cc} x & x_{k-1} & x_k \\ \hline y & f(x_{k-1}) & f(x_k) \end{array},$$

que na forma de Lagrange é dado por

$$S_k(x) = \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} f(x_{k-1}) + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} f(x_k), \quad x \in I_K.$$

Usando a estimativa de erro para a interpolação com dois pontos temos

$$|f(x) - S_k(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\max_{t \in I_k} |f''(t)| \right) |(x - x_{k-1})(x - x_k)|, \; x \in I_k.$$

Splines lineares

Para $x \in I_k$, temos $|(x - x_{k-1})(x - x_k)| = (x - x_{k-1})(x_k - x)$.

Splines lineares

Para $x \in I_k$, temos $|(x - x_{k-1})(x - x_k)| = (x - x_{k-1})(x_k - x)$. Se definirmos

$$M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f^{''}(t)|$$

então, como $I_k \subset [a, b]$, obtemos

$$|f(x) - S_k(x)| \leq \frac{M_2}{2}(x - x_{k-1})(x_k - x), \; x \in I_k.$$

Splines lineares

Para $x \in I_k$, temos $|(x - x_{k-1})(x - x_k)| = (x - x_{k-1})(x_k - x)$. Se definirmos

$$M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$$

então, como $I_k \subset [a, b]$, obtemos

$$|f(x) - S_k(x)| \leq \frac{M_2}{2}(x - x_{k-1})(x_k - x), \ x \in I_k.$$

Além disso,

$$0 \leq (x - x_{k-1})(x_k - x) \leq \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}, \ \forall x \in I_k,$$

Splines lineares

Para $x \in I_k$, temos $|(x - x_{k-1})(x - x_k)| = (x - x_{k-1})(x_k - x)$. Se definirmos

$$M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$$

então, como $I_k \subset [a, b]$, obtemos

$$|f(x) - S_k(x)| \leq \frac{M_2}{2}(x - x_{k-1})(x_k - x), \; x \in I_k.$$

Além disso,

$$0 \leq (x - x_{k-1})(x_k - x) \leq \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}, \; \forall x \in I_k,$$

o que nos dá finalmente uma estimativa uniforme (independente de k)

$$|f(x) - S_k(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2, \; \forall x \in I_k.$$

Splines lineares

Teorema 2

Sejam $f \in C^2([a,b])$, $\Delta = \{x_k = a + kh,\ 0 \le k \le n\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$ formada por $n+1$ pontos equidistantes com espaçamento $h = \frac{b-a}{n}$ e S_Δ o spline linear interpolador de f subordinado à partição. Então

$$|f(x) - S_\Delta(x)| \le \frac{M_2}{8} h^2, \quad \forall x \in [a,b],$$

onde $M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$.

Splines lineares

Teorema 2

Sejam $f \in C^2([a,b])$, $\Delta = \{x_k = a + kh,\ 0 \le k \le n\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$ formada por $n+1$ pontos equidistantes com espaçamento $h = \frac{b-a}{n}$ e S_Δ o spline linear interpolador de f subordinado à partição. Então

$$|f(x) - S_\Delta(x)| \le \frac{M_2}{8} h^2, \quad \forall x \in [a,b],$$

onde $M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$.

- Note que o erro tende a zero proporcionalmente a h^2. Esta conclusão independe do conhecimento do valor da constante M_2;

Splines lineares

Teorema 2

Sejam $f \in C^2([a,b])$, $\Delta = \{x_k = a + kh,\ 0 \leq k \leq n\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$ formada por $n+1$ pontos equidistantes com espaçamento $h = \frac{b-a}{n}$ e S_Δ o spline linear interpolador de f subordinado à partição. Então

$$|f(x) - S_\Delta(x)| \leq \frac{M_2}{8}h^2, \quad \forall x \in [a,b],$$

onde $M_2 = \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.

- Note que o erro tende a zero proporcionalmente a h^2. Esta conclusão independe do conhecimento do valor da constante M_2;
- se conhecermos o valor de M_2, podemos estimar o valor de h (ou quantos pontos precisamos usar) para garantirmos um erro menor do que uma certa tolerância.

Splines lineares

Para o exemplo de Runge onde

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5],$$

temos

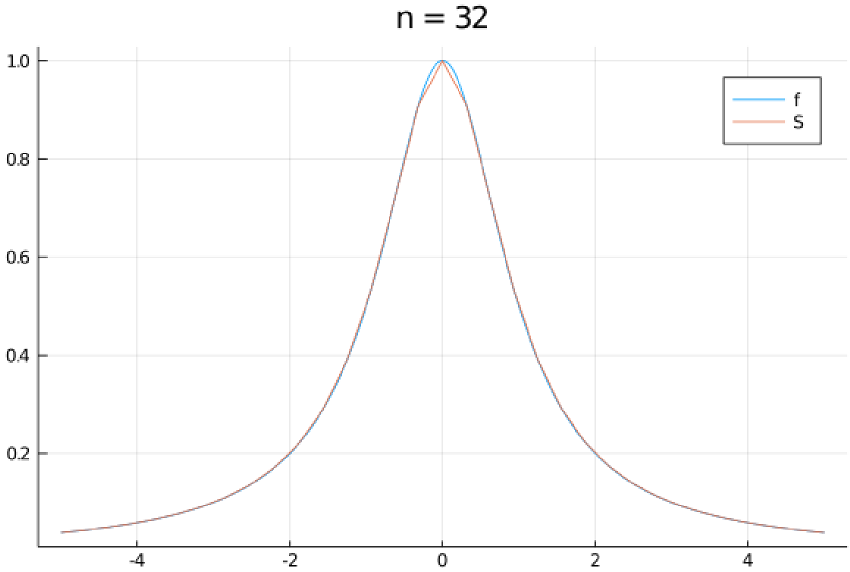
$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \Longrightarrow M_2 = 2,$$

o que nos dá

$$|f(x) - S_\Delta(x)| \leq \frac{h^2}{4}, \quad \forall x \in [-5, 5].$$

Por exemplo, para 33 pontos equidistantes, $h = 10/32 = 0.3125$ e obtemos a esimativa de erro da ordem de 0.025 (compare com o gráfico do polinômio interpolador de grau 32).

Splines lineares



Splines lineares

Se quisermos também especificar h para garantir o erro máximo menor do que uma certa tolerância ϵ, basta impor

$$\frac{h^2}{4} < \epsilon \Longrightarrow h < 2\sqrt{\epsilon}.$$

Por exemplo, para um erro menor do que 0.01, escolhemos $h < 0.2$ (ou $n > 50$). Como o número de pontos é $n + 1$, se usarmos 52 pontos igualmente espaçados, garantimos que o erro entre o spline linear interpolador e a função será menor do que 0.01 no intervalo $[-5, 5]$.