VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

Disciplina de Cálculo II (LOB1004)
Profa. Responsável: Diovana Napoleão
Escola de Engenharia de Lorena EEL-USP
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

OBJETIVO DA ABORDAGEM DO TÓPICO

- ✓ **Neste tópico será apresentado um dos principais usos da derivada ordinária que estão relacionados com a determinação dos valores de máximo e mínimo de uma respectiva função;**

- ✓ **Analisaremos como usar as derivadas parciais para localizar pontos de máximo e mínimo de uma função (Pontos Extermantes);**

- ✓ **E a importante aplicação das derivadas parciais é a otimização de funções determinando seu desempenho máximo ou mínimo.**

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

Considere a Figura 1,

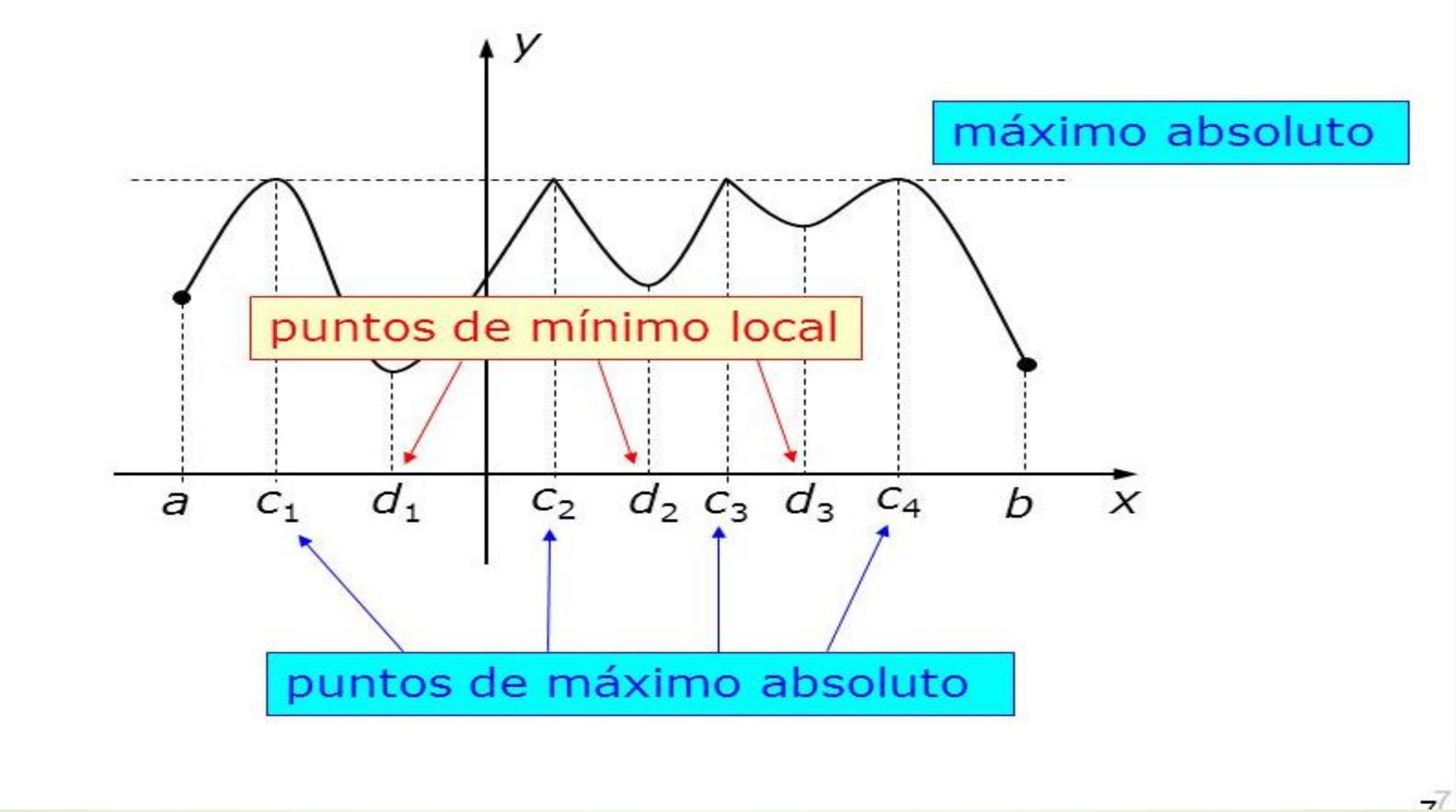


Figura 1- Representação dos picos de uma função

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

Definição 1 (Máximo Global e Local)

Uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ tem um **máximo absoluto** ou **máximo global** em **a** se

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}.$$

Dizemos **a** é um **máximo relativo** ou **máximo local** de f se

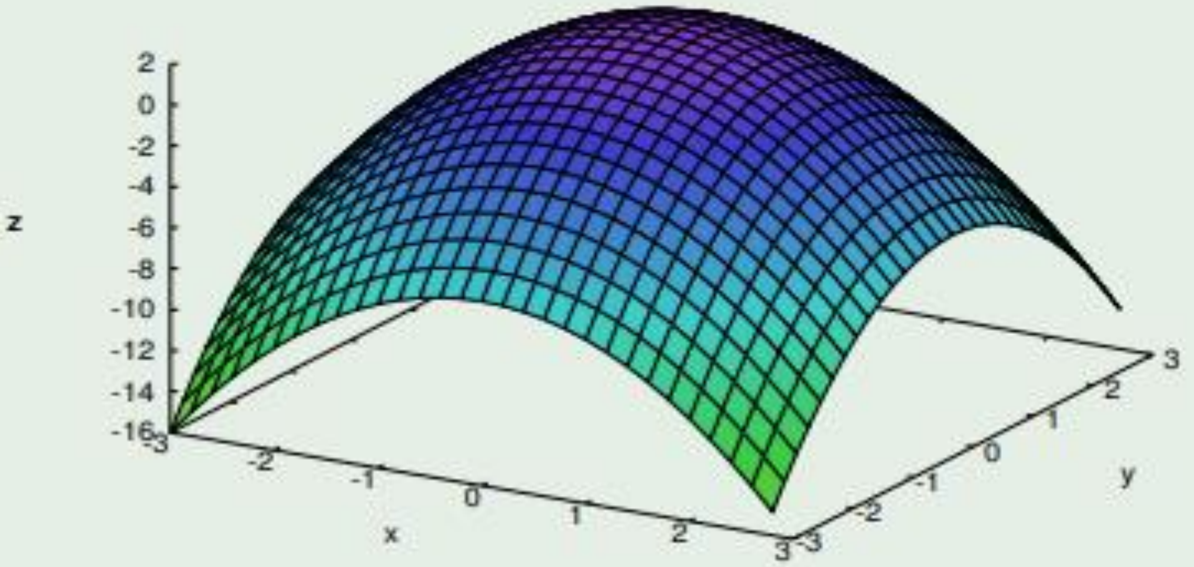
$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{x} \text{ próximo de } \mathbf{a}.$$

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

Exemplo 1 abordando o ponto de máximo da função apresentada,

Considere a função

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2.$$



Note que $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2 \leq 2 = f(0, 0)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0, 0)$ é um máximo absoluto de f.

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

Definição 2 (Mínimo Global e Local)

Uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ tem um **mínimo absoluto** ou **mínimo global** em **a** se

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}.$$

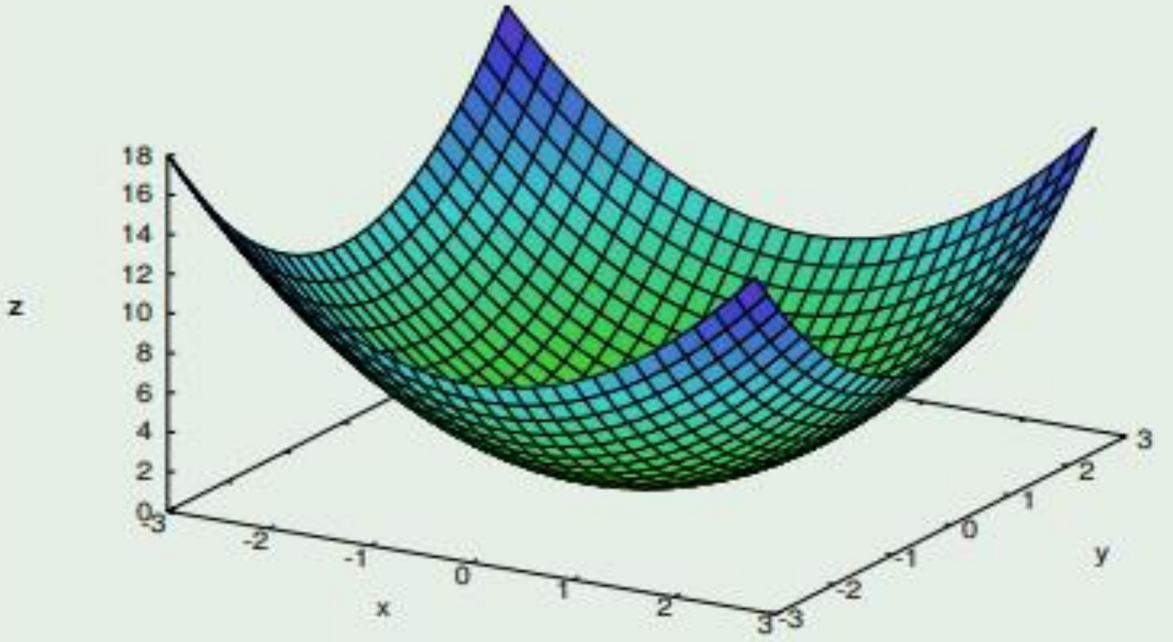
Dizemos **a** é um **mínimo relativo** ou **mínimo local** de f se

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \text{ próximo de } \mathbf{a}.$$

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

Exemplo 2 abordando o ponto de mínimo da função apresentada,

Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Note que $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0, 0)$ é um mínimo absoluto de f.

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

Ponto Crítico

Considere uma função diferenciável f. O plano tangente a superfície dada por $z = f(x, y)$ no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, com $z_0 = f(x_0, y_0)$, é definido pela equação

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Se o plano tangente é paralelo ao plano (x, y), ou seja, se

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0,$$

então dizemos:

- O ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é um **ponto estacionário** da superfície;
- O ponto (x_0, y_0), no domínio de f, é um **ponto estacionário** ou **ponto crítico** de f.

Dizemos também que (x_0, y_0) é um ponto crítico de f se uma das derivadas parciais não existir.

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

Teorema 1

Seja (x_0, y_0) um ponto interior D_f e suponhamos que $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ existam. Uma condição necessária que seja (x_0, y_0) seja um extremente local de f é que $\frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial x} = 0$ **e** $\frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial y} = 0$.

Teorema 2 – Teste da Segunda Derivada

Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro (a, b) e suponha que $\frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial x} = 0$ **e** $\frac{\partial f_{(x_0,y_0)}}{\partial y} = 0$. **Então consideraremos:**

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA

$$D = D(a,b) = f_{xx}\left(a,b\right).f_{yy}(a,b) - \left[\,f_{xy}(a,b)\right]^2$$

a- Se D>0 e $f_{xx}(a,b)\rangle 0$ então f(a, b) é um **mínimo local**

b- Se D>0 e $f_{xx}(a,b)\langle 0$ então f(a, b) é um **máximo local**

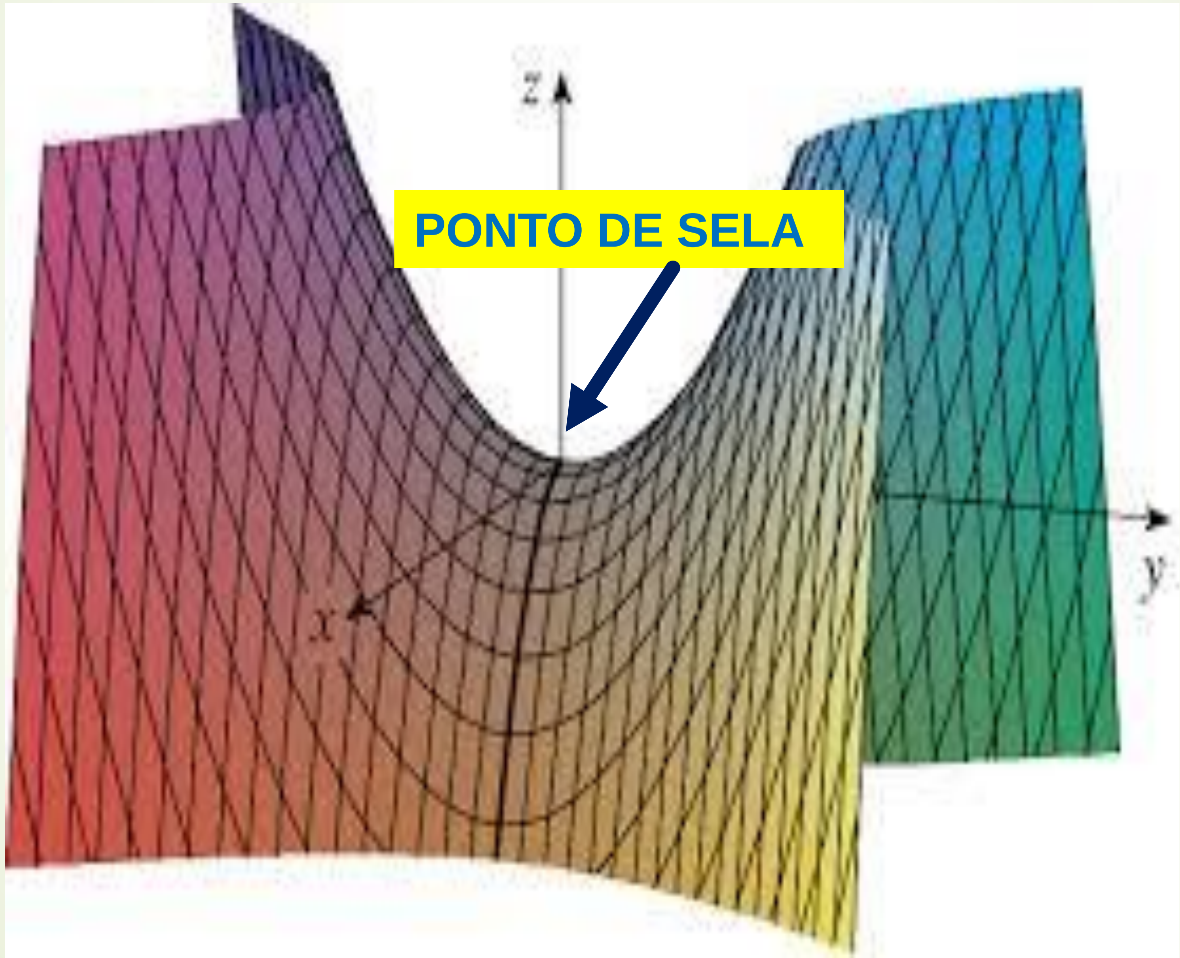
c- Se D<0 então f(a, b) não é **mínimo local e nem máximo local**

Fórmula do determinante Hessiano calculado no ponto (x, y)

A matriz Hessiana *n x n* com as derivadas de segunda ordem de uma função de n variáveis é denominada matriz Hessiana, sendo denotada por D ou H(x).

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}\left(x,y\right).f_{yy}(x,y) - \left[\,f_{xy}(x,y)\right]^2$$

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO



VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO ABSOLUTOS

Método do intervalo fechado

1º- Encontrar os valores de f nos números críticos de f em (a, b)
2º- Encontrar os valores de f nas extremidades do intervalo
3º- O maior valor entre as etapas 1 e 2 será o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores será o mínimo absoluto

VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO

Teorema do valor extremo para as funções de duas variáveis

Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em R^2, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

Teorema de Weierstraiss

Esse teorema garante que se a função for contínua e o intervalo for fechado e limitado a função assume um máximo e mínimo, valendo também para funções de duas variáveis.