Lista de Exercícios de Cálculo II (LOB1004) - 7

Profa. Responsável: Diovana A. S. Napoleão

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais

Assunto referente: Regra da Cadeia, Derivação de funções definidas implicitamente, Determinante Jacobiano

1- Suponha que, para todo t, f (t^2, 2t)=t^3 - 3t. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

2- Seja para todo (x, y), f(x, y, $x^2 + y^2$) = 0. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,2) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)$.

3- Considere função $F(x,y) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$. Mostre que $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

4- Suponha que as funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$ sejam dadas implicitamente pelo sistema:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Expresse $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial x}$ em termos de x, y, z.

5- Se $z = f(x,y)$, onde $x = r\cos(\mathrm{t}),\ \mathrm{y} = r\,\mathrm{sen}(\mathrm{t})$, mostre que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$.

6- Calcule:

a) $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$, sendo $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $G(x,y,z) = x + y + z$

b) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}$, sendo $u = x\,y\,z$ e $v = x^3 + y^2$

c) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}$, sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$

Respostas: a) $2(x-y)$**, b)** $-2xy^2$**, c)** $-2(s+3r)$

7- Determine o jacobiano das funções:

a) $x = u + 4v$, $y = 3u - 2v$
b) $x = u^2 - v^2$, $y = u^2 + v^2$
c) $x = \dfrac{u}{u+v}$, $y = \dfrac{v}{u-v}$
d) $x = \alpha\, sen\, \beta$, $y = \alpha \cos \beta$
e) $x = u\,v$, $y = v\,w$, $z = u\,w$
f) $x = e^{u-v}$, $y = e^{u+v}$, $z = e^{u+v+w}$

8- Sejam $u = x + y$ e v= $\dfrac{y}{x}$. Calcule o jacobiano $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

Resposta: $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)$

9- Seja $g(u,v) = f(x,y)$,sendo $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ são dadas implicitamente pelo sistema $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x\,y \end{cases}$. Suponha $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

a) Mostre que $\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial x}{\partial u}$.

b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}$.

Resposta: b) $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ **=0**
