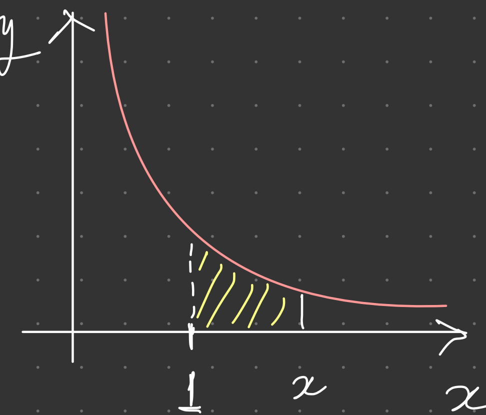
Funções Logarítmica e Exponencial

$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, $x > 0$ é chamado logaritmo natural.



- Se $x > 1$ é a área delimitada por $1/t$ de 1 a x.
- Se $x < 1$ é ⊖ a área.

1) $\ln 1 = 0$.

2) $\ln x > 0$ se $x > 1$ e $\ln x < 0$ se $x < 1$.

3) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ $\left(\text{de maneira mais geral } \frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}, \ x \neq 0 \right)$.

Teo. Fundamental do Cálculo

Teo. $\ln x$ é crescente.

dem $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} > 0$ se $x > 0$. $\therefore$ $\ln x$ é estritamente crescente.

Teo. Sejam $a, b > 0$. Então $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

dem. Considere a função $g(x) = \ln(ax)$, $x > 0$.

$$g'(x) = \frac{1}{ax} \cdot (ax)' = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(\ln x) \qquad \therefore g(x) = \ln x + \text{constante}$$

Como $g(1) = \ln a = \overbrace{\ln 1}^{0} + \text{constante} \rightsquigarrow \text{constante} = \ln a$.

$\therefore \ln(ax) = \ln x + \ln a \rightsquigarrow \ln ab = \ln a + \ln b$. ∎

Corolário: Por indução temos $\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i$.

$a_i > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$.

Corolário: Sejam $a > 0$ e r racional positivo.

Então $\ln(a^r) = r \ln a$.

dem. Se $r = 1/n$ temos $a = a^{n/n} = (a^{1/n})^n$ daí

$$\ln a = \ln (a^{1/n})^n = n \ln a^{1/n} \quad \therefore \ln a^{1/n} = \frac{1}{n} \ln a.$$

Se $r = \frac{m}{n}$ $\quad \ln a^{m/n} = \ln (a^{1/n})^m = m \ln a^{1/n} = \frac{m}{n} \ln a$. $\blacksquare$

Corolário: Dado $M>0$ $\exists\, a>0$ tal que $\ln a > M$.

dem. Seja $\hat{a}>1$ qualquer. Então $\ln \hat{a} > 0$ e portanto $\exists\, n\in\mathbb{N}$ tal que $n \ln \hat{a} > M$ $\therefore \ln \hat{a}^n > M$. Tome $a = \hat{a}^n$. $\blacksquare$

Corolário: Seja $a>0$. Então $\ln a^{-1} = -\ln a$.

dem. $0 = \ln 1 = \ln aa^{-1} = \ln a + \ln a^{-1}$.

$\therefore \ln a^{-1} = -\ln a$. $\blacksquare$

Exercício: (a) Mostre que dado $M<0$, existe $0<a<1$ tal que $\ln a < M$.

(b) $\ln a^r = r \ln a$ $\forall a>0$ e $r\in\mathbb{Q}$.

Logaritmos com base $b \neq 1$ $\qquad \log_b x \qquad$ $\ln x$ satisfaz

Seja f uma função real tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$

$\forall x, y \in$ Domínio $f = D(f)$

(i) Se $f \not\equiv 0$ então $0 \notin$ Domínio de f pois

$$f(0) = f(0 \cdot y) = f(0) + f(y) \quad \forall\, y \in D(f).$$

$$\therefore\ f(y) = 0 \quad \forall\, y \in D(f).$$

(ii) $f(1) = 0$ pois $\cancel{f(1)} = f(1 \cdot 1) = \cancel{f(1)} + f(1) \rightsquigarrow f(1) = 0$.

(iii) $f(-1) = 0$ pois $0 = f(1) = f(-1 \cdot -1) = f(-1) + f(-1) \rightsquigarrow f(-1) = 0$.

(iv) $f(-x) = f(x)$, $x \neq 0$ pois

$$f(-x) = f(-1 \cdot x) = \cancelto{0}{f(-1)} + f(x) = f(x) \rightsquigarrow f \text{ é função par.}$$

(v) Suponha f derivável. $f(xy) = f(x) + f(y) \rightsquigarrow$

y fixo $\quad \dfrac{d}{dx}\big(f(xy)\big) = \dfrac{df}{dx}(xy) \cdot (xy)'_x = \dfrac{df}{dx}(xy) \cdot y$

por outro lado $\quad \dfrac{d}{dx}\big(f(x) + f(y)\big) = \dfrac{df}{dx}(x)$.

$$\therefore \quad \frac{df}{dx}(xy) \cdot y = \frac{df}{dx}(x) \quad \forall x, y \in D(f).$$

Em $x = 1$ temos $\quad f'(y) = \dfrac{f'(1)}{y}$, $y \neq 0$.

Assim f' é monótona e integrável e daí

$$\int_c^x \frac{f'(1)}{y}\,dy = f(x) - f(c)$$ em qualquer intervalo $[c,x]$ sem o zero.

No caso $x>0$ e tomando $c=1$ temos

$$f(x) = \int_1^x \frac{f'(1)}{y}\,dy$$

Se $x<0$ usa-se $f(x) = f(-x)$ para se obter

$$f(x) = \int_1^{-x} \frac{f'(1)}{y}\,dy$$

$$\therefore\ f(x) = f'(1)\int_1^{|x|} \frac{dy}{y}\,,\quad x \neq 0.$$

OBS: (a) $f \not\equiv 0$ a não ser que $f'(1) = 0$.

(b) $\ln x = \int_1^x \frac{dy}{y}$, $x > 0$ é dada com $f'(1) = 1$.

Def. Definimos $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ para $b > 0$ e $b \neq 1$.

Logaritmo de x na base b.

Nesse caso procura-se $f(x) = c \ln x$, $c \neq 0$.

Toma-se $b > 0$ tal que $f(b) = 1$, ie. $c = (\ln b)^{-1}$

E assim $f(x) = \ln x / \ln b$.

Def. O número Nepheriano é definido como o valor real e tal que $\ln e = 1$. $\log_e x$!!!

OBS: Note que e está bem definido e é único pois $\ln x$ é uma função crescente que varia de $-\infty$ à $+\infty$.

$\ln : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ é injetora e sobrejetora.

Função Exponencial

A função exponencial é definida como a inversa de $\ln : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$.

$E : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ e satisfaz $E(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$.

(i) $E(x)$ é contínua e crescente pois $\ln x$ é contínua e crescente.

(ii) $E(0) = 1$, $E(x) > 1$ se $x > 0$ e $E(x) < 1$ se $x < 0$.

(iii) $E(x)$ é derivável com $E'(x) = E(x)$.

Regra da Cadeia

dem. $\left(\ln(E(x))\right)' = (x)'$

$\frac{1}{E(x)} \cdot E'(x) = 1$

$E'(x) = \frac{1}{\ln'(E(x))} = E(x)$.

$\blacksquare$

(iv) $E(x+y) = E(x)E(y) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$.

<u>dem</u>. Por um lado temos $\ln(E(x+y)) = x+y$.

Por outro $\ln E(x)E(y) = \ln E(x) + \ln E(y) = x+y$.

$\therefore \ln E(x)E(y) = \ln E(x+y) \xrightarrow{\ln \text{ é injetiva}} E(x)E(y) = E(x+y)$.

$\blacksquare$

(v) Por indução temos $E(x_1+x_2+\dots+x_n) = E(x_1)E(x_2)\cdot\ldots\cdot E(x_n)$

$x_i \in \mathbb{R}$ $i=1,\dots,n$.

Daí segue que $E(nx) = E(x)^n$. Mais $E(x) = E\left(\frac{n}{n}x\right) = E\left(\frac{1}{n}x\right)^n$

$\rightsquigarrow E\left(\frac{1}{n}x\right) = E(x)^{1/n}$. Logo $E\left(\frac{m}{n}x\right) = E\left(\frac{1}{n}x\right)^m = E(x)^{\frac{m}{n}}$.

(vi) $E(n) = E(1+\dots+1) = E(1)^n$ com $E(1) > 1$.

Pela desigualdade de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx \ \forall x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$

temos $(E(1))^n \geq 1 + n(E(1)-1) \rightsquigarrow E(n) \geq 1 + n(E(1)-1) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow$ dado $M > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $E(x) > M$.

Por outro lado, $1 = E(0) = E(1-1) = E(1)E(-1) \rightsquigarrow E(-1) = E(1)^{-1}$

e daí $E(-n) = E(1)^{-n} \leq (1+n(E(1)-1))^{-1}$. Logo $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$

tal que $E(-n) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \rightsquigarrow \lim_{x \to -\infty} E(x) = 0$.

Imagem $E(x) = \mathbb{R}^+$ com

$\lim_{x \to -\infty} E(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$.

Exercício

(vii) O nº Nepheriano $e = E(1) > 1$ já que $\ln e = 1$ e $E(0) = 1$.

Além disso temos $E\left(\frac{m}{n}\right) = E(1)^{m/n} = e^{m/n}$ $\forall$ m, n inteiros.

Pela continuidade da função $E(x)$ temos $E(x) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lembre-se que $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Potências irracionais

Def: Se $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ define-se

$$a^b := e^{b \ln a}.$$

Exercícios: Mostre as seguintes propriedades: $a>0$, $b,c\in\mathbb{R}$.

(a) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

(b) $(a^b)^c = a^{bc}$

A função a^x $a>0$.

$$a^x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$$
$$x \to e^{x\ln a}$$

é a composta de funções deriváveis, logo é derivável.

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln a}\right) = e^{x\ln a}\cdot \ln a = a^x \ln a.$$

A função x^b, $x>0$ e $b \in \mathbb{R}$.

$$x^b : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$$
$$x \to x^b = e^{b \ln x}$$

é a composta de funções deriváveis, logo é derivável.

$$\frac{d}{dx}\left(x^b\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{b \ln x}\right) = e^{b \ln x} \cdot \frac{b}{x} = x^b \frac{b}{x}$$

$$= x^{b-1} b.$$

O nº e como limite.

$$\frac{d}{dx}(\ln x)\Big|_{x=1} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1 \quad \therefore \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \cancel{\ln 1}^{\,0}}{x} = 1$$

i.e. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = 1.$

e^x é contínua

$$\therefore e = e^1 = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}.$$

Se tomamos $\frac{1}{x} = n \in \mathbb{N}$ temos $\boxed{e = \lim_{n\to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$