Mudança de variáveis

Teo. Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ função contínua e $v:[c,d] \mapsto \mathbb{R}$ derivável com $v(c)=a$ e $v(d)=b$. Além disso assuma v' integrável. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(v(t))\,v'(t)\,dt.$$

Exemplos: Calcule:

Mudança de variáveis

a) $$\int_0^1 x^3 \cos x^4\,dx = \int_0^1 f(v(x))\,\frac{v'(x)}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \cos x\,dx$$

$v(x) = x^4 \quad v'(x) = 4x^3$

$f(x) = \cos x$

$$\begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} b = v(1) = 1 \\ a = v(0) = 0 \end{array}$$

Basta resolver $\int_0^1 \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \Big|_0^1 = \operatorname{sen} 1.$

$$\therefore \int_0^1 x^3 \cos x^4 \, dx = \frac{\operatorname{sen} 1}{4}.$$

Mudança de variáveis

b) $$\int_0^{\pi} \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx = -\int_0^{\pi} f(v(x))\, v'(x)\, dx = -\int_1^{-1} x^2 dx$$

$v(x) = \cos x$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2/3.$$

$v'(x) = -\operatorname{sen} x$

$f(x) = x^2$

$$\begin{cases} d = \pi \\ c = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} b = \cos \pi = -1 \\ a = \cos 0 = 1 \end{cases}$$

Cálculo de primitivas (Notação de Leibniz)

c) $$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \operatorname{sen} y \, 2\,dy = -2\cos y = -2\cos\sqrt{x}$$

↑ Mudança de variável

↑ retorno à variável original

$$y = \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \rightsquigarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,dy$$

$$\therefore \int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\cos\sqrt{x} + \text{constante}.$$

Regra da cadeia

Verificação: $$\left(-2\cos\sqrt{x}\right)' = -2(-1)\operatorname{sen}\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = 2\operatorname{sen}\sqrt{x}\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \operatorname{sen}\sqrt{x}/\sqrt{x}, \quad x \neq 0.$$

Função Logaritmo Natural

Seja $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Note que $\ln$ está definida $\forall x > 0$.

Além disso temos $\ln$ é derivável $\forall x > 0$ com $\frac{d}{dx}\left(\ln x\right) = \frac{1}{x}$.

Teo. fundamental do Cálculo

Mais

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right) = \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\ln x\right) & x>0 \\ \frac{d}{dx}\left(\ln(-x)\right) & x<0 \end{cases} = \begin{cases} 1/x, & x>0 \\ \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}.$$

Regra da Cadeia

$\therefore$ A primitiva de $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$ é $\ln|x|$.

d) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-dy}{y} = -\ln|y| + c = \ln|\cos x|^{-1} + c$

$y = \cos x$

$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x \rightsquigarrow -dy = \operatorname{sen} x\,dx$

$$\therefore \int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + \text{constante}.$$

Verificando:

$$\frac{d}{dx}\left(-\ln|\cos x|\right)' = -\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$$

dem. QM. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(v(t))\,v'(t)\,dt$

$f:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$

$v:[c,d] \mapsto \mathbb{R}$

$v(t) \in [a,b]\ \forall t \in [c,d]$.

$v(c) = a$ e $v(d) = b$.

Seja $g(y) = \int_a^y f(x)\,dx$ primitiva de f.

Considere agora $g(v(t))$. Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dt}\left(g(v(t))\right) = g'(v(t)).v'(t) = f(v(t))\,v'(t).$$

$\therefore$ $g(v(t))$ é primitiva de $f(v(t))\,v'(t)$

$$\therefore \int_c^d f(v(t))\,v'(t)\,dt = g(v(d)) - g(v(c)) = \int_{v(c)}^{v(d)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

TFC

$\blacksquare$

OBS: Usando integração por partes podemos encontrar:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x$$

$$\therefore \int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + \text{constante}$$

Rascunho:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$u = \ln x \quad du/dx = 1/x$

$dv = dx \rightsquigarrow \frac{dv}{dx} = 1 \rightsquigarrow v = x$

Verificando:

$$\Big(x(\ln x - 1)\Big)' = 1 \cdot (\ln x - 1) + x(\ln x - 1)'$$

$$= \ln x - 1 + x \frac{1}{x} = \ln x.$$