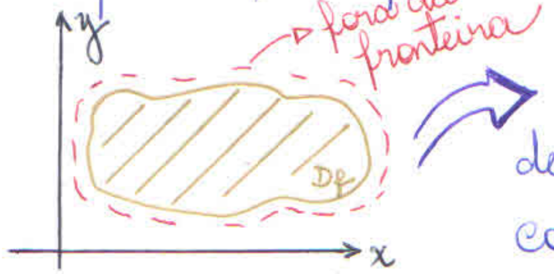
Complementação para Valores de Máximo e Mínimo para funções de n variáveis

O problema que temos para uma função de 2 variáveis definida no plano, o Df é uma região do plano.



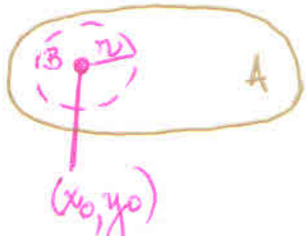
Ao encontrar pontos críticos dentro do Df, será necessário compará-los com os pontos da fronteira.

Consideraremos algumas características do Df e analisaremos as condições que temos garantida sua existência. Será apresentada 3 definições importantes para esta abordagem.

Definição 1

Ponto Interior

Um ponto $(x_0, y_0) \in A$ é um ponto interior se existir uma bola aberta $B \subset A$, de centro (x_0, y_0) e raio $(r > 0)$.



Exemplo: Considere os casos:

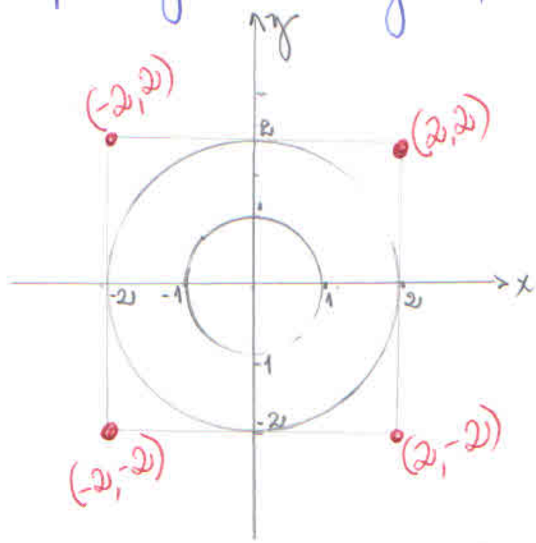
① $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D \in \mathbb{R}^2$

Como $f(0,0)=0$, 0 será correspondente ao menor valor ②

$$f(0,0)=0 \leq f(x,y) \; , \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Então $(0,0)$ é ponto de mínimo local.

② $f(x,y) = x^2 + y^2$; $D = \{(x,y) \,/\, |x| \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}$



Então $(2,2)$; $(-2,2)$; $(2,-2)$; $(-2,-2)$ serão os pontos de máx. da f definida no D_f.

O valor máx. será 8

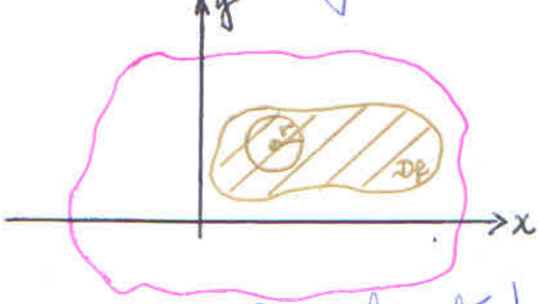
③ $f(x,y) = x^2 + y^2$; $D = \{(x,y) \,/\, |x| < 2 \, , \, |y| < 2\}$

$$f(x,y) < 8 \; , \; \forall (x,y) \in D_f$$

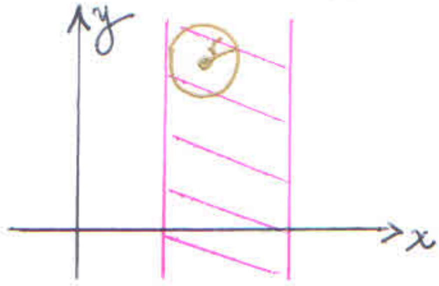
Será abordado também neste contexto conjunto fechado e fronteira.

Definição 2

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ será limitado quando existir uma bola e o conj. D estiver inteiro dentro da bola.



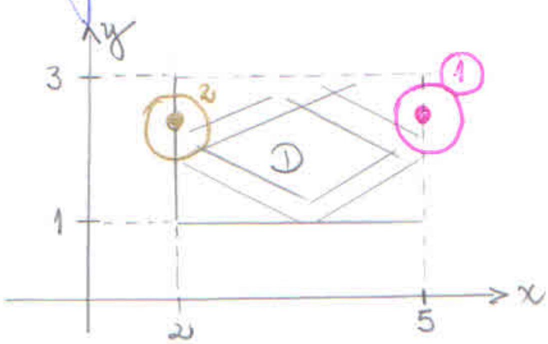
Conj. limitado



Conj. não limitado

Definição 3

Um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é ponto de fronteira de um conjunto D se para cada bola aberta de centro (x,y) e raio $r>0$ contém pontos de D e pontos que não pertencem a D. Será considerado o retângulo correspondente a um conjunto.



$$D = \{(x,y) / 2 \leq x < 5 \text{ e } 1 \leq y < 3\}$$

Pontos da fronteira de D:

$\{(2,y) / 1 \leq y < 3\} \cup$

$\{(x,1) / 2 \leq x < 5\} \cup$

$\{(5,y) / 1 \leq y < 3\} \cup$

$\{(x,3) / 2 \leq x < 5\}$ $\therefore$ A fronteira será tudo, inclusive a parte pontilhada.

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^2$ será fechado se F contiver todos os pontos de sua fronteira.