Interpolação Polinomial

Existência e estimativa de erro

Nelson Kuhl

IME/USP

6 de dezembro de 2021

Introdução

- Diferentemente de mínimos quadrados, o deseja-se obter funções que passam *exatamente* pelos pontos de uma tabela;

Introdução

- Diferentemente de mínimos quadrados, o deseja-se obter funções que passam *exatamente* pelos pontos de uma tabela;
- pode-se então obter expressões para derivação e integração numérica a partir de valores de uma função especificados em um conjunto discreto de pontos;

Introdução

- Diferentemente de mínimos quadrados, o deseja-se obter funções que passam *exatamente* pelos pontos de uma tabela;
- pode-se então obter expressões para derivação e integração numérica a partir de valores de uma função especificados em um conjunto discreto de pontos;
- técnicas de interpolação são usadas também em resolução numérica de equações diferenciais e em computação gráfica;

Introdução

- Diferentemente de mínimos quadrados, o deseja-se obter funções que passam *exatamente* pelos pontos de uma tabela;
- pode-se então obter expressões para derivação e integração numérica a partir de valores de uma função especificados em um conjunto discreto de pontos;
- técnicas de interpolação são usadas também em resolução numérica de equações diferenciais e em computação gráfica;
- entre as classes de funções usadas para interpolação, a dos polinômios é muito popular devido às propriedades analíticas deles.

Formulação do problema

Dada uma tabela

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}, \tag{1}$$

onde $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$, o objetivo é obter um polinômio $p(x)$ tal que

$$p(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Formulação do problema

Dada uma tabela

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}, \tag{1}$$

onde $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$, o objetivo é obter um polinômio $p(x)$ tal que

$$p(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Formulado dessa maneira, o problema é muito geral pois, se $p(x)$ é solução, então

$$q(x) = p(x) + r(x) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

onde $r(x)$ é um polinômio arbitrário, também é solução, uma vez que $\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ se anula em todos os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Existência e unicidade

Para o problema ficar bem definido, precisamos impor restrições. Elas são sugeridas dos fatos bem conhecidos de que por dois pontos passa uma única reta, por três pontos passa uma única parábola (ou uma reta, se forem colineares), etc... . Temos o seguinte resultado.

Existência e unicidade

Para o problema ficar bem definido, precisamos impor restrições. Elas são sugeridas dos fatos bem conhecidos de que por dois pontos passa uma única reta, por três pontos passa uma única parábola (ou uma reta, se forem colineares), etc... . Temos o seguinte resultado.

Teorema 1

Dada uma tabela da forma (1) com $n+1$ abscissas x_i e $n+1$ ordenadas y_i, $0 \leq i \leq n$, onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, existe um **único** polinômio p_n de grau **menor ou igual** a n tal que

$$p_n(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n. \tag{2}$$

Este polinômio é chamado de polinômio interpolador da tabela (1).

Existência e unicidade

Demonstração

Dado que um polinômio p_n de grau menor ou igual a n pode ser representado unicamente na forma $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, usando (2) obtemos o seguinte sistema linear

$$\sum_{j=0}^{n} (x_i)^j a_j = y_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

para os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Existência e unicidade

Demonstração

Dado que um polinômio p_n de grau menor ou igual a n pode ser representado unicamente na forma $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, usando (2) obtemos o seguinte sistema linear

$$\sum_{j=0}^{n} (x_i)^j a_j = y_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

para os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Matricialmente temos

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Existência e unicidade

- O sistema linear (3) terá uma única solução se e somente se a sua matriz tiver determinante não nulo;

Existência e unicidade

- O sistema linear (3) terá uma única solução se e somente se a sua matriz tiver determinante não nulo;
- isto é equivalente a termos somente a solução nula para o sistema homogênio;

Existência e unicidade

- O sistema linear (3) terá uma única solução se e somente se a sua matriz tiver determinante não nulo;
- isto é equivalente a termos somente a solução nula para o sistema homogênio;
- resolver o sistema homogênio, isto é, resolver (3) com $y_i = 0$, $0 \le i \le n$, equivale a obter os coeficientes de um polinômio de grau menor ou igual a n que se anula nos $n + 1$ pontos distintos x_i, $0 \le i \le n$;

Existência e unicidade

- O sistema linear (3) terá uma única solução se e somente se a sua matriz tiver determinante não nulo;
- isto é equivalente a termos somente a solução nula para o sistema homogênio;
- resolver o sistema homogênio, isto é, resolver (3) com $y_i = 0$, $0 \leq i \leq n$, equivale a obter os coeficientes de um polinômio de grau menor ou igual a n que se anula nos $n+1$ pontos distintos x_i, $0 \leq i \leq n$;
- ou seja, este polinômio de grau menor ou igual a n teria pelo menos $n+1$ raízes dsitintas, e portanto só pode ser o polinômio nulo. Logo o sistema homogênio admite somente a solução nula e o sistema linear (3) tem uma única solução.

$\square$

Exemplo

Construa o polinômio interpolador da tabela

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

e use-o para aproximar $\sqrt{2}$ (isto é, *interpole* o ponto $\bar{x} = 0.5$).

Exemplo

Construa o polinômio interpolador da tabela

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

e use-o para aproximar $\sqrt{2}$ (isto é, *interpole* o ponto $\bar{x} = 0.5$). Temos 4 pontos e portanto o polinômio interpolador terá grau no màximo $n = 3$.

Exemplo

Construa o polinômio interpolador da tabela

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

e use-o para aproximar $\sqrt{2}$ (isto é, *interpole* o ponto $\bar{x} = 0.5$). Temos 4 pontos e portanto o polinômio interpolador terá grau no màximo $n = 3$. Com a nossa notação, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = 1/2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 4$.

Exemplo

Construa o polinômio interpolador da tabela

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

e use-o para aproximar $\sqrt{2}$ (isto é, *interpole* o ponto $\bar{x} = 0.5$). Temos 4 pontos e portanto o polinômio interpolador terá grau no màximo $n = 3$. Com a nossa notação, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = 1/2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 4$. O sistema linear para os coeficientes a_j, $j = 0, 1, 2, 3$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Exemplo

Construa o polinômio interpolador da tabela

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

e use-o para aproximar $\sqrt{2}$ (isto é, *interpole* o ponto $\bar{x} = 0.5$). Temos 4 pontos e portanto o polinômio interpolador terá grau no màximo $n = 3$. Com a nossa notação, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = 1/2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 4$. O sistema linear para os coeficientes a_j, $j = 0, 1, 2, 3$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

cuja solução é $a_0 = 1$, $a_1 = 2/3$, $a_2 = 1/4$ e $a_3 = 1/12$.

Exemplo

O polinômio interpolador é então dado por

$$p_3(x) = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3$$

Exemplo

O polinômio interpolador é então dado por

$$p_3(x) = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3$$

e a aproximação para $\sqrt{2}$ fica

$$p_3(0.5) = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{8} = \frac{45}{32} = 1.40625.$$

Exemplo

O polinômio interpolador é então dado por

$$p_3(x) = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3$$

e a aproximação para $\sqrt{2}$ fica

$$p_3(0.5) = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{8} = \frac{45}{32} = 1.40625.$$

Para comparação, observe que $\sqrt{2} \approx 1.41421$. O erro é da ordem de 0.008.

Estimativa de erro

- Quando os valores y_i da tabela (1) estão associados a uma função f, ou seja, $y_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, é importante obter estimativas para o erro
$$E(x) = f(x) - p_n(x) \tag{4}$$
em pontos $x \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$.

Estimativa de erro

- Quando os valores y_i da tabela (1) estão associados a uma função f, ou seja, $y_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, é importante obter estimativas para o erro
$$E(x) = f(x) - p_n(x) \tag{4}$$
em pontos $x \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$.
- Estas estimativas são importantes para derivação e integração numéricas e outras aplicações baseadas em interpolação.

Estimativa de erro

- Quando os valores y_i da tabela (1) estão associados a uma função f, ou seja, $y_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, é importante obter estimativas para o erro
$$E(x) = f(x) - p_n(x) \tag{4}$$
em pontos $x \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$.
- Estas estimativas são importantes para derivação e integração numéricas e outras aplicações baseadas em interpolação.
- Como por contrução $E(x_i) = 0$, $0 \leq i \leq n$, é razoável esperarmos uma expressão da forma
$$E(x) = g(x) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Estimativa de erro

- De fato, se f for derivável e se definirmos

$$W(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j), \tag{5}$$

Estimativa de erro

- De fato, se f for derivável e se definirmos

$$W(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j), \tag{5}$$

então podemos concluir da regra de L'Hospital que a função

$$g(x) = \begin{cases} \frac{E(x)}{W(x)} & \text{se } x \neq x_i,\ 0 \leq i \leq n \\ \frac{E'(x_i)}{W'(x_i)} & \text{se } x = x_i, 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

está bem definida e é contínua pois $W'(x_i) \neq 0$, $0 \leq i \leq n$.

Estimativa de erro

- De fato, se f for derivável e se definirmos

$$W(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j), \tag{5}$$

então podemos concluir da regra de L'Hospital que a função

$$g(x) = \begin{cases} \frac{E(x)}{W(x)} & \text{se } x \neq x_i,\ 0 \leq i \leq n \\ \frac{E'(x_i)}{W'(x_i)} & \text{se } x = x_i, 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

está bem definida e é contínua pois $W'(x_i) \neq 0$, $0 \leq i \leq n$.

- Logo, para f derivável, podemos afirmar que existe uma função g tal que

$$E(x) = g(x)W(x). \tag{6}$$

Estimativa de erro

- De fato, se f for derivável e se definirmos

$$W(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j), \tag{5}$$

então podemos concluir da regra de L'Hospital que a função

$$g(x) = \begin{cases} \frac{E(x)}{W(x)} & \text{se } x \neq x_i,\ 0 \leq i \leq n \\ \frac{E'(x_i)}{W'(x_i)} & \text{se } x = x_i, 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

está bem definida e é contínua pois $W'(x_i) \neq 0$, $0 \leq i \leq n$.

- Logo, para f derivável, podemos afirmar que existe uma função g tal que

$$E(x) = g(x)W(x). \tag{6}$$

- Nosso objetivo é estimar g. Para isso, assumiremos que f tem tantas derivadas quanto forem necessárias.

Estimativa de erro

- Seja $\bar{x} \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$, e defina

$$F(x) = E(x) - g(\bar{x})W(x).$$

Estimativa de erro

- Seja $\bar{x} \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$, e defina
$$F(x) = E(x) - g(\bar{x})W(x).$$

- Como $E(x_i) = W(x_i) = 0$, concluimos que $F(x_i) = 0$, $0 \leq i \leq n$. De (6) segue que $F(\bar{x}) = 0$, e portanto F se anula em pelo menos $n+2$ pontos distintos.

Estimativa de erro

- Seja $\bar{x} \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$, e defina

$$F(x) = E(x) - g(\bar{x})W(x).$$

- Como $E(x_i) = W(x_i) = 0$, concluimos que $F(x_i) = 0$, $0 \leq i \leq n$. De (6) segue que $F(\bar{x}) = 0$, e portanto F se anula em pelo menos $n+2$ pontos distintos.
- Do teorema do valor médio, segue que F' se anula em pelo menos $n+1$ pontos distintos, contidos no intervalo J gerado pelos pontos x_i, $0 \leq i \leq n$, e $\bar{x}$.

Estimativa de erro

- Seja $\bar{x} \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$, e defina

$$F(x) = E(x) - g(\bar{x})W(x).$$

- Como $E(x_i) = W(x_i) = 0$, concluimos que $F(x_i) = 0$, $0 \leq i \leq n$. De (6) segue que $F(\bar{x}) = 0$, e portanto F se anula em pelo menos $n+2$ pontos distintos.
- Do teorema do valor médio, segue que F' se anula em pelo menos $n+1$ pontos distintos, contidos no intervalo J gerado pelos pontos x_i, $0 \leq i \leq n$, e $\bar{x}$.
- Continuando com este argumento, podemos afirmar que existe um ponto $\bar{t} \in J$ tal que

$$F^{(n+1)}(\bar{t}) = 0. \tag{7}$$

Estimativa de erro

- Da definição de F temos

$$F^{(n+1)}(\bar{t}) = E^{(n+1)}(\bar{t}) - g(\bar{x})W^{(n+1)}(\bar{t}).$$

Estimativa de erro

- Da definição de F temos
$$F^{(n+1)}(\bar{t}) = E^{(n+1)}(\bar{t}) - g(\bar{x})W^{(n+1)}(\bar{t}).$$

- Como $p_n^{(n+1)}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $E^{(n+1)}(\bar{t}) = f^{(n+1)}(\bar{t})$.

Estimativa de erro

- Da definição de F temos

$$F^{(n+1)}(\bar{t}) = E^{(n+1)}(\bar{t}) - g(\bar{x})W^{(n+1)}(\bar{t}).$$

- Como $p_n^{(n+1)}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $E^{(n+1)}(\bar{t}) = f^{(n+1)}(\bar{t})$.
- Como $W^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue de (7) que

$$f^{(n+1)}(\bar{t}) - g(\bar{x})(n+1)! = 0.$$

Estimativa de erro

- Da definição de F temos

$$F^{(n+1)}(\bar{t}) = E^{(n+1)}(\bar{t}) - g(\bar{x})W^{(n+1)}(\bar{t}).$$

- Como $p_n^{(n+1)}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $E^{(n+1)}(\bar{t}) = f^{(n+1)}(\bar{t})$.
- Como $W^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue de (7) que

$$f^{(n+1)}(\bar{t}) - g(\bar{x})(n+1)! = 0.$$

- Donde, $g(\bar{x}) = f^{(n+1)}(\bar{t})/(n+1)!$ e então

$$E(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{t})}{(n+1)!}W(\bar{x}).$$

Estimativa de erro

Teorema 2

Suponha que f tem pelo menos $n+1$ derivadas contínuas em um intervalo $[a, b]$ contendo os pontos distintos x_i, $0 \leq i \leq n$. Seja p_n o polinômio interpolador da tabela gerada pelos valores de f nos pontos x_i. Então, dado $x \in [a, b]$, existe $t_x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j). \tag{8}$$

Estimativa de erro

Teorema 2

Suponha que f tem pelo menos $n+1$ derivadas contínuas em um intervalo $[a, b]$ contendo os pontos distintos x_i, $0 \leq i \leq n$. Seja p_n o polinômio interpolador da tabela gerada pelos valores de f nos pontos x_i. Então, dado $x \in [a, b]$, existe $t_x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j). \tag{8}$$

- Note que o lado direito de (8) se anula quando $x = x_i$, $0 \leq i \leq n$, como esperado;

Estimativa de erro

Teorema 2

Suponha que f tem pelo menos $n+1$ derivadas contínuas em um intervalo $[a,b]$ contendo os pontos distintos x_i, $0 \leq i \leq n$. Seja p_n o polinômio interpolador da tabela gerada pelos valores de f nos pontos x_i. Então, dado $x \in [a,b]$, existe $t_x \in [a,b]$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j). \tag{8}$$

- Note que o lado direito de (8) se anula quando $x = x_i$, $0 \leq i \leq n$, como esperado;
- se f for um polinômio de grau menor ou igual a n, a sua derivada de ordem $n+1$ é nula e portanto o erro em qualquer ponto é nulo, como esperado da unicidade do polinômio interpolador;

Estimativa de erro

Teorema 2

Suponha que f tem pelo menos $n+1$ derivadas contínuas em um intervalo $[a,b]$ contendo os pontos distintos x_i, $0 \leq i \leq n$. Seja p_n o polinômio interpolador da tabela gerada pelos valores de f nos pontos x_i. Então, dado $x \in [a,b]$, existe $t_x \in [a,b]$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j). \tag{8}$$

- Note que o lado direito de (8) se anula quando $x = x_i$, $0 \leq i \leq n$, como esperado;
- se f for um polinômio de grau menor ou igual a n, a sua derivada de ordem $n+1$ é nula e portanto o erro em qualquer ponto é nulo, como esperado da unicidade do polinômio interpolador;
- o ponto t_x, que depende de x, é desconhecido e não pode ser obtido de forma construtiva.

Estimativa de erro

Usando o fato de que $f^{(n+1)}$ é contínua em $[a, b]$, e portanto limitada neste intervalo, podemos obter uma estimativa de erro mais prática.

Corolário

Sob as hipóteses do Teorema 2, seja

$$M_{n+1} = \max_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|.$$

Então, para $x \in [a, b]$, temos

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|. \tag{9}$$

Exemplo

Continuando com o exemplo visto anteriormente, vamos estimar o erro entre $p_3(0.5)$ e $\sqrt{2}$ usando a fórmula (9), e compará-lo com o erro exato.

Exemplo

Continuando com o exemplo visto anteriormente, vamos estimar o erro entre $p_3(0.5)$ e $\sqrt{2}$ usando a fórmula (9), e compará-lo com o erro exato. No nosso caso, $n = 3$ e o intervalo é $[-1, 2]$. Precisamos estimar o módulo da derivada quarta de $f(x) = 2^x$ neste intervalo.

Exemplo

Continuando com o exemplo visto anteriormente, vamos estimar o erro entre $p_3(0.5)$ e $\sqrt{2}$ usando a fórmula (9), e compará-lo com o erro exato. No nosso caso, $n = 3$ e o intervalo é $[-1, 2]$. Precisamos estimar o módulo da derivada quarta de $f(x) = 2^x$ neste intervalo. Do cálculo, sabemos que $f^{(4)}(x) = (\log 2)^4 2^x$, onde log é o logarítmo natural, e portanto

$$M_4 = \max_{x \in [-1,2]} |(\log 2)^4\, 2^x| = (\log 2)^4\, 2^2 \lesssim 0.92335.$$

Exemplo

Continuando com o exemplo visto anteriormente, vamos estimar o erro entre $p_3(0.5)$ e $\sqrt{2}$ usando a fórmula (9), e compará-lo com o erro exato. No nosso caso, $n = 3$ e o intervalo é $[-1, 2]$. Precisamos estimar o módulo da derivada quarta de $f(x) = 2^x$ neste intervalo. Do cálculo, sabemos que $f^{(4)}(x) = (\log 2)^4 2^x$, onde log é o logarítmo natural, e portanto

$$M_4 = \max_{x \in [-1,2]} |(\log 2)^4 \, 2^x| = (\log 2)^4 \, 2^2 \lesssim 0.92335.$$

Logo,

$$|f(0.5) - p_3(0.5)| \le \frac{0.92335}{4!} |(0.5 + 1)0.5(0.5 - 1)(0.5 - 2)| \approx 0.022,$$

enquanto que o erro exato é da ordem de 0.008, aproximadamente três vezes menor.

Exemplo

Continuando com o exemplo visto anteriormente, vamos estimar o erro entre $p_3(0.5)$ e $\sqrt{2}$ usando a fórmula (9), e compará-lo com o erro exato. No nosso caso, $n = 3$ e o intervalo é $[-1, 2]$. Precisamos estimar o módulo da derivada quarta de $f(x) = 2^x$ neste intervalo. Do cálculo, sabemos que $f^{(4)}(x) = (\log 2)^4 2^x$, onde log é o logarítmo natural, e portanto

$$M_4 = \max_{x\in[-1,2]} |(\log 2)^4\, 2^x| = (\log 2)^4\, 2^2 \lesssim 0.92335.$$

Logo,

$$|f(0.5) - p_3(0.5)| \leq \frac{0.92335}{4!}|(0.5+1)0.5(0.5-1)(0.5-2)| \approx 0.022,$$

enquanto que o erro exato é da ordem de 0.008, aproximadamente três vezes menor. Estimativas de erro são em geral pessimistas, mas nos dão informações úteis e são relevantes para análises de convergência.