

Lista 19 - Derivadas parciais de ordem superior e regra da cadeia

(1) Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = x^4y^3 + 3x + 6y$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2} + \ln y$

(c) $f(x, y) = e^{x^3y^2}$

(2) Considere a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{5x^2 + 2y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

(3) Seja $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$. Verifique que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4f^2$.

(4) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de uma variável, de classe C^2 , e a um número real não nulo.

Considere a função $u(x, y) = f(x - ay) + g(x + ay)$. Verifique que $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(5) Seja dada $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 , tal que $\nabla f(3, 2) = (-1, 3)$, e suponhamos que $9 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3, 2) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3, 2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3, 2) = -2$. Seja $z(t) = f(3t^3, 3t - 1)$. Calcule $z''(1)$.